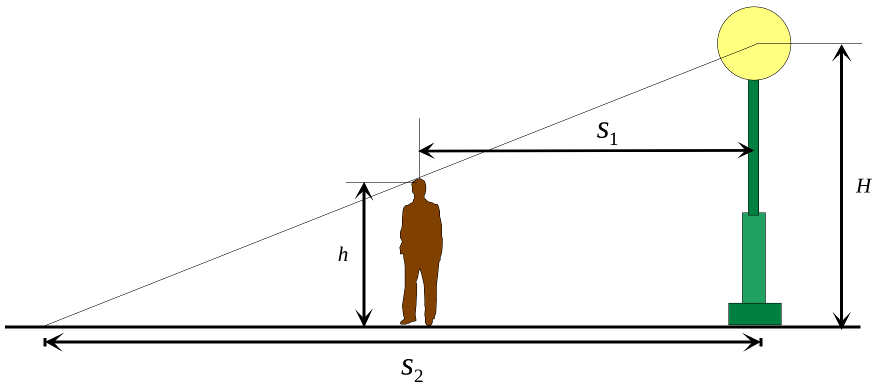
Dr Vjekoslav Sajfert

ZBIRKA ZADATAKA IZ FIZIKE

drugo ispravljeno i izmenjeno izdanje



Univerzitet u Novom Sadu
Tehnički fakultet "Mihajlo Pupin", Zrenjanin
Zrenjanin, 2014.

Zbirka zadataka iz fizike
Dr Vjekoslav Sajfert

Autor:
Dr Vjekoslav Sajfert, redovni profesor TF "Mihajlo Pupin", Zrenjanin
Recenzenti:
Dr Stevo Jaćimovski, vanredni profesor KPA u Zemunu,
Mr Vojin Kerleta, TF "M. Pupin", Zrenjanin
Dizajn korica: **Stanislava Sinđelić**
Izdavač:
Tehnički fakultet "Mihajlo Pupin", Zrenjanin
Za izdavača:
Prof. dr Milan Pavlović, dekan TF "Mihajlo Pupin", Zrenjanin
Obrada teksta na računaru:
Dr Vjekoslav Sajfert, redovni profesor TF "Mihajlo Pupin", Zrenjanin
Dizajn korica:
Stanislava Sinđelić
Korektura:
Msc Branimir Sajfert, Osnovna škola „Majka Jugovića“, Zemun
Štampa: Diginet, Zrenjanin

Tiraž: 200 primeraka

ISBN 978-86-7672-199-3

Odlukom Nastavno naučnog veća Tehničkog fakulteta "Mihajlo Pupin" od 25.03.2013. godine, ovaj udžbenik je odobren za štampanje i korišćenje u nastavi.

CIP – Katalogizacija u publikaciji
Biblioteka Matice srpske, Novi Sad
53(075.8)(076)
САЈФЕРТ, Вјекослав
Zbirka zadataka iz fizike / Vjekoslav Sajfert. - Zrenjanin:
Tehnički fakultet "Mihajlo Pupin", 2014 (Zrenjanin : Diginet). – 218 str.:
Ilustr. ; 25 cm
Biblioteka Udžbenici / Tehnički fakultet "Mihajlo Pupin", Zrenjanin ; 194)
Tiraž 200. – Bibliografija.
ISBN 978-86-7672-199-3
a) Физика – Задаци
COBISS.SR-ID 290901767

Predgovor

Ova zbirka zadataka je namenjena studentima Tehničkog Fakulteta "Mihajlo Pupin" u Zrenjaninu, ali može poslužiti i studentima srodnih fakulteta, gde je program kursa fizike sličan. Takođe može poslužiti i kao korisna literatura za pripreme za takmičenja srednjoškolaca i za pripreme za prijemne ispite na fakultetima.

Autor nije išao toliko na originalnost zadataka koliko je obratio pažnju na metodičnost, da bi olakšao studentima pripreme za pismeni deo ispita, koji je obično najveći problem.

Zahvalan sam svima koji mi ukažu na moguće greške. Takođe sam unapred zahvalan za svaku korisnu sugestiju, koja bi dovela do poboljšanja kvaliteta ove zbirke zadataka iz fizike.

Zahvalan sam recenzentima dr Stevi Jaćimovskom, mr Vojinu Kerleti i msc Branimiru Sajfertu na savesnom pregledu rukopisa i na korisnim savetima za poboljšanje teksta ove **Zbirke zadataka iz fizike**.

Autor

Da bi rešio problem moraš početi da ga rešavaš.
Ako nešto počneš to i završi.
Matematika je teška ali je mnogo lakše sa njom nego bez nje.
Rešavanje problema metodom “Korak po korak” pričinjava zadovoljstvo ukoliko se dosegne cilj.
Svako “Zašto?” ima svoje “Zato!” ukoliko je čovek dovoljno uporan.

Vjekoslav Sajfert

1. Uvod

1.1 Fizičke veličine i jedinice. SI sistem jedinica. Dimenziona analiza

1.1.1 Popuni desnu kolonu tabele 1.1.1 odgovarajućim mernim brojem

$\rho = 1000\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$	$\rho = \quad \dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$
$l = 10\mathrm{m}$	$l = \quad \mathrm{mm}$
$S = 5\mathrm{cm}^2$	$S = \quad \mathrm{m}^2$
$V = 5\mathrm{dm}^3$	$V = \quad \mathrm{m}^3$
$t = 8d$	$t = \quad \mathrm{min}$

Tabela 1.1.1

1.1.1.R Vidi tabelu 1.1.2.

$\rho = 1000\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$	$\rho = 1\dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$
$l = 10\mathrm{m}$	$l = 10^6\mathrm{m}$
$S = 5\mathrm{cm}^2$	$S = 5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$
$V = 5\mathrm{dm}^3$	$V = 5 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}^3$
$t = 8d$	$t = 11520\mathrm{min}$

Tabela 1.1.2

1.1.2 Utvrdi jedinicu za magnentu indukciju iz relacije za magnetnu Lorencovu silu:

$$F = qvB$$

1.1.2.R Rešavamo jednačinu po B (magnetna indukcija)

$$B = \frac{F}{qv}$$

Jedinica za magnentu indukciju iznosi:

$$[B] = \frac{[F]}{[q][v]} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{Am}} = \frac{\mathrm{kg}\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\mathrm{Am}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{As}^2} = \mathrm{T}$$

1.1.3 Proveri ispravnost relacije za centripetalnu silu:

$$\frac{mv^2}{r} = mr\omega^2 \qquad (1.1.1)$$

1.1.3.R Proverićemo jedinice leve i desne strane jednakosti (1.1.1):

$$\frac{[\mathrm{m}]\cdot[v]^2}{[r]} = \frac{\mathrm{kg}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{ms}^2} = \frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{N}$$

$$[m]\cdot[\mathrm{r}]\cdot[\omega]^2 = \mathrm{kgm}\left(\frac{1}{\mathrm{s}}\right)^2 = \frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{N}$$

Vidimo da su jedinice leve i desne strane jednake. Na osnovu ovoga možemo zaključiti da je relacija (1.1.1) tačna.

1.1.4 Dokazati jednakost jedinica za jačinu električnog polja:

$$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \qquad (1.1.2)$$

1.1.4.R Polazimo od relacija: $E = \frac{U}{d}$, $U = \frac{A}{q}$, $A = F \cdot s$

1.1.5 Dokaži da je $\mathrm{T} = \mathrm{kgs}^{-2}\mathrm{A}^{-1}$.

1.1.6 Popuni tabelu 1.1.3 (osnovne jedinice SI sistema jedinica).

Fizička veličina	Oznaka veličine	Naziv jedinice	Oznaka jedinice
dužina		metar	
masa			kg
vreme	t		
jačina električne stuje			A
termodinamička temeperatura	T		
svetlosna jačina	J		
količina supstancije		mol	

Tabela 1.1.3

1.1.7 Popuni tabelu 1.1.4

Broj merenja	s	ms	min	h	ns
1.	0,54				

2.		240			
3.			2,3		
4.				1,5	

Tabela 1.1.4

1.1.8 Izvrši dimenzionu analizu i odredi jedinicu izraženu preko osnovnih jedinica SI sistema za moment inercije lopte:

$$I = \frac{2}{5} m R^2$$

1.1.8.R

$\dim I = \dim m \cdot \dim R^2$

$\dim I = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^2$

$[I] = \mathrm{kgm}^2$

Period matematičkog klatna je dat izrazom:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (1.1.3)$$

1.1.9 Odredi dimenziju gravitacionog ubrzanja i na osnovu utvrđene dimenzije koja je jedinica za gravitaciono ubrzanje.

1.1.9.R Prvo rešavamo jednačinu za period matematičkog klatna po g. Kvadriramo jednačinu (1.1.3) a zatim lako dobijamo (množenjem sa g i delenjem sa T^2):

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

Sada utvrđujemo dimenziju gravitacionog ubrzanja:

$$\dim g = \frac{\dim l}{\dim T^2} = \mathrm{LT}^{-2}$$

odnosno

$$[g] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

1.1.10 Izvrši dimenzionu analizu i odredi jedinicu izraženu preko osnovnih jedinica SI sistema za koeficijent dinamičke viskoznosti:

$$\eta = \frac{2}{9} \frac{g r^2 \left(\rho_k - \rho_t\right)}{h} \tau \qquad (1.1.4)$$

1.1.10.R Korišćenjem relacije $\rho = \frac{m}{V}$ imamo:

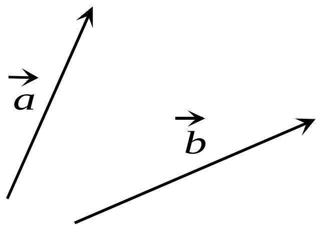
$$\dim \eta = \mathrm{L}^{-1} \cdot \mathrm{M} \cdot \mathrm{T}^{-1}$$

Za jedinicu dobijamo:

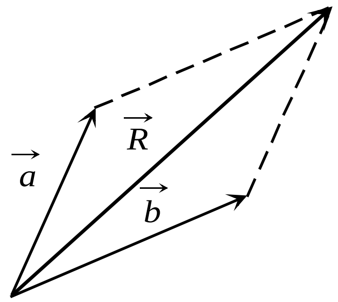
$$[\eta] = \frac{\text{kg}}{\text{ms}}$$

1.2 Vektori i operacije sa vektorima

1.2.1 Saberi dva vektora metodom paralelograma na slici 1.2.1.



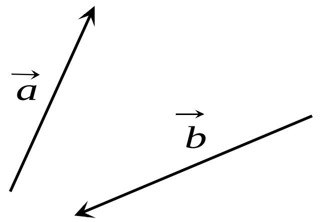
Slika 1.2.1



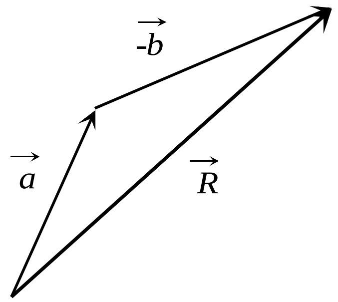
Slika 1.2.2

1.2.1.R Rešenje je dato na slici 1.2.2.

1.2.2 Oduzmi dva vektora ($\vec{a} - \vec{b}$) metodom poligona na slici 1.2.3.



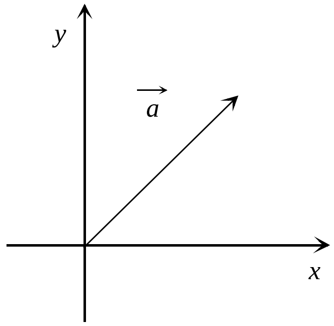
Slika 1.2.3



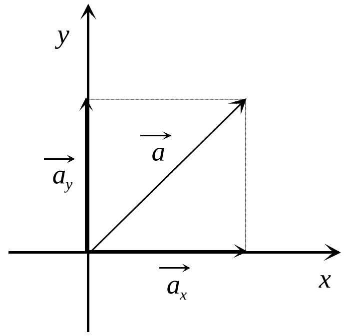
Slika 1.2.4

1.2.2.R Rešenje je dato na slici 1.2.4.

1.2.3 Na slici 1.2.5 je nacrtan vektor $\vec{a}$. Razloži ga na dve uzajamno normalne komponente u naznačenim pravcima (ose *x* i *y*).



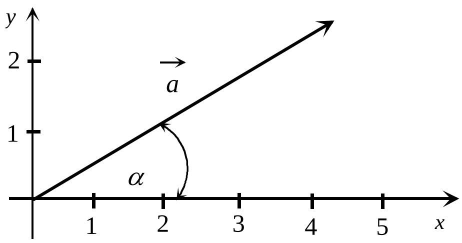
Slika 1.2.5



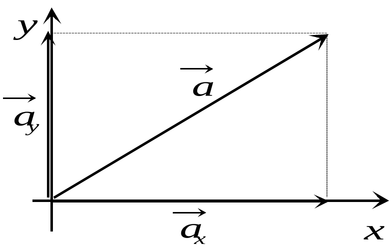
Slika 1.2.6

1.2.3.R Rešenje je dato na slici 1.2.6.

1.2.4 Odredi komponente i projekcije vektora $\vec{a}$ duž *x* i *y* ose, ako je njegov intenzitet $|\vec{a}| = a = 5$, a ugao između vektora $\vec{a}$ i pozitivnog smera *x* ose α=30°(slika 1.2.7).



Slika 1.2.7

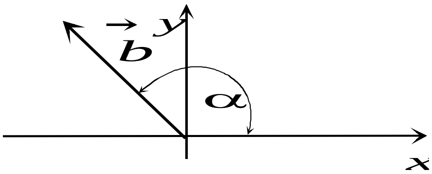


Slika 1.2.8

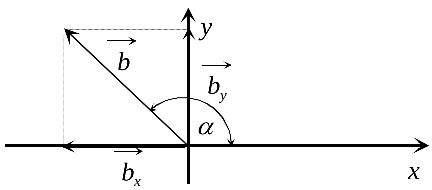
1.2.4.R Vidi sliku 1.2.8.

$a_x = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$; $a_y = 5/2$

1.2.5 Odredi komponente i projekcije vektora $\vec{b}$ duž *x* i *y* ose (slika 1.2.9), ako je $|\vec{b}| = b = \sqrt{2}$, ugao između pozitivnog smera *x* ose i vektora $\vec{b}$ α = 135° u smeru suprotnom od smera kazaljke na satu.



Slika 1.2.9



Slika 1.2.10

1.2.5.R Vidi sliku 1.2.10.

$b_x = -1$; $b_y = 1$

1.2.6 Odredi rezultantu vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ grafički i računski ako su njihovi intenziteti $|\vec{a}| = a = 2$, $|\vec{b}| = b = 3$ i

$\angle(\vec{a},\vec{b}) = 90°$

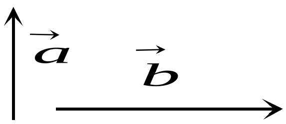
a. $\vec{R} = 2 \cdot \vec{a} + \vec{b}$ (Slika 1.2.11)

$|\vec{R}| = R = ?$

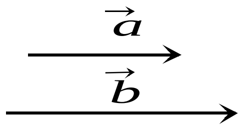
$\angle(\vec{a},\vec{b}) = 0°$

b. $\vec{R} = 3 \cdot \vec{a} - \vec{b}$ (Slika 1.2.12)

$|\vec{R}| = R = ?$

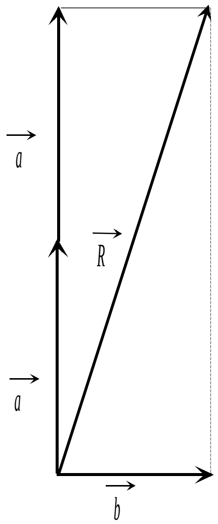


Slika 1.2.13



Slika 1.2.14

1.2.6.R a.Vidi sliku 1.2.13.



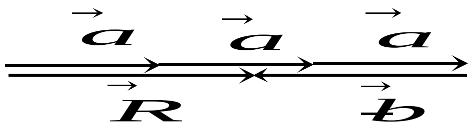
Slika 1.2.13

$\vec{R} = 2\vec{a} + \vec{b}$; $R^2 = (2a)^2 + b^2$

$R = \sqrt{(2a)^2 + b^2}$

R= 5

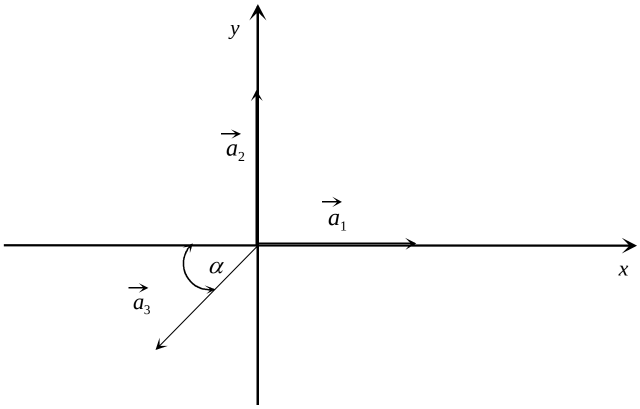
b. Vidi sliku 1.2.14.



Slika 1.2.14

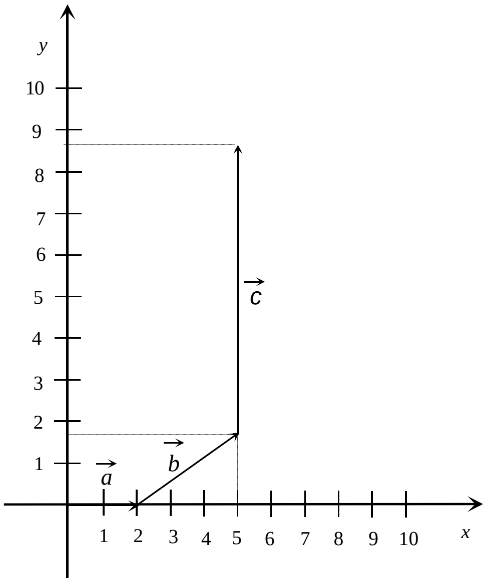
R= 3

1.2.7 Odredi rezultujući vektor $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$ (na slici 1.2.15) ako su odgovarajući intenziteti a_1=7, a_2=8 i $a_3 = 4\sqrt{2}$. Ugao između vektora $\vec{a}_3$ i negativnog dela x ose je 45°.

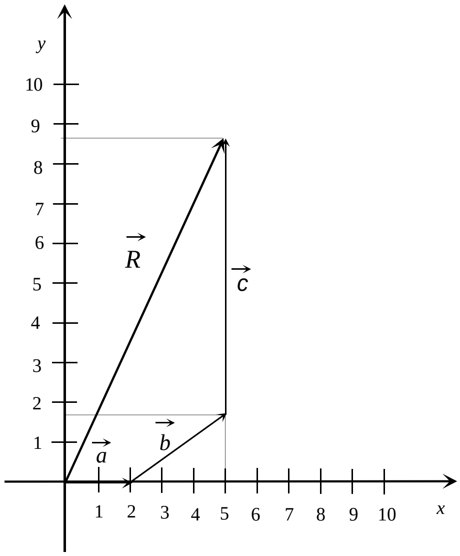


Slika 1.2.15

1.2.8 Vektor $\vec{a}$ leži duž pozitivnog smera x ose, vektor $\vec{b}$ pod uglom 30° u odnosu na pozitivan smer x ose i vektor $\vec{c}$ pod uglom 90° u odnosu na smer x ose. Uglove posmatrati u smeru kazaljke na satu. Ako su intenziteti $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3\sqrt{3}$, i $|\vec{c}| = 4\sqrt{3}$, odredi rezultantu $\vec{R}$ i intenzitet $|\vec{R}|$ (vidi sliku 1.2.16)



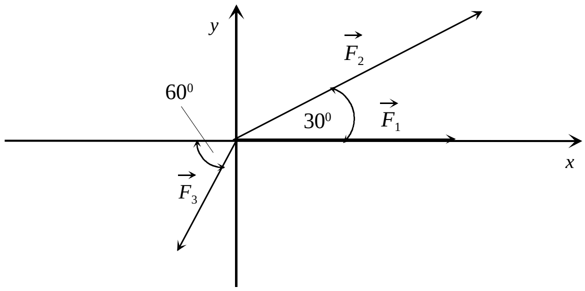
Slika 1.2.16



Slika 1.2.17

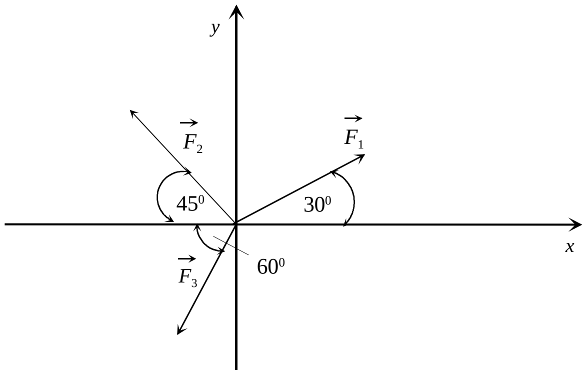
1.2.8.R Rešenje na slici 1.2.17; $R = 10$.

1.2.9 Na slici 1.2.18 nacrtaj komponente vektora $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ i odredi projekcije tih vektora na ose O_x i O_y. Koliko iznosi intenzitet rezultujućeg vektora $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$, ako su intenziteti vektora F_1=4, F_2=3$\sqrt{3}$ i F_3=3?



Slika 1.2.18

1.2.10 Na slici 1.2.19 razloži vektore $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ na komponente duž x i y ose. Ako su intenziteti vektora : $\left|\vec{F}_1\right| = 7$, $\left|\vec{F}_2\right| = 4\sqrt{2}$ i $\left|\vec{F}_3\right| = 7\sqrt{3}$ a uglovi $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$ i $\gamma = 60°$, nađi projekcije vektora na ose x i y. Koliki je intenzitet rezultujućeg vektora?

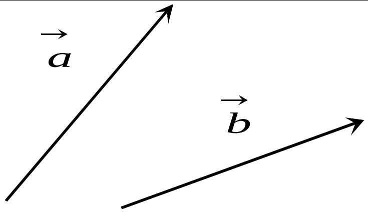


Slika 1.2.19

1.2.11 Dokaži da su vektori $\vec{e}$ i $\vec{f}$ uzajamno normalni. Vektori $\vec{e}$ i $\vec{f}$ sa dati sa:

$$\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} \quad ; \quad \vec{f} = \vec{a} - \vec{b}$$

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ imaju iste intenzitete $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ i predstavljeni su na slici 1.2.20.



Slika 1.2.20

1.2.14.R Po definiciji skalarnog proizvoda imamo:

$$\vec{e} \circ \vec{f} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \circ \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \vec{a} \circ \vec{a} - \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{a} - \vec{b} \circ \vec{b} = a^2 - b^2 = 0$$

$\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^0$

1.2.12 Dati su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$, čiji su intenziteti $|\vec{a}| = 2$ i $|\vec{b}| = 3$. Ugao između njih je $\alpha = 45^0$. Odredi:

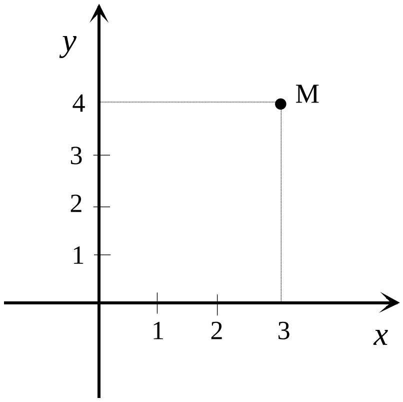
a. $\vec{a} \circ \vec{b}$

b. $\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \circ \left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)$

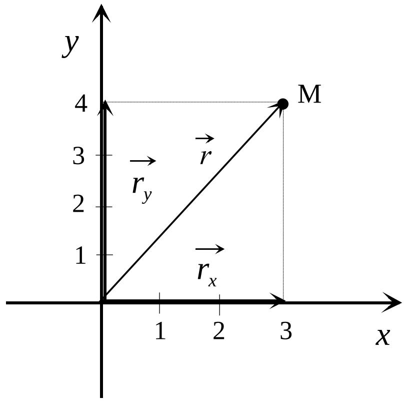
2. Mehanika materijalne tačke

2.1 Relativnost kretanja. Kretanje tela. Putanja., put i pomeraj.

2.1.1 Nacrtaj vektor položaja (ili radijus vektor) tačke M(3,4) na slici 2.1.1 i nacrtaj njegove komponente. Kolike su brojne vrednosti njegovih projekcija?



Slika 2.1.1



Slika 2.1.2

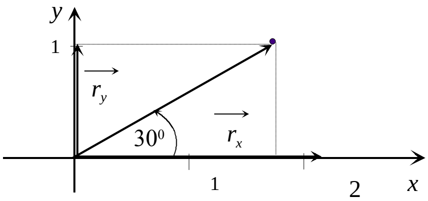
2.1.1.R Vidi sliku 2.1.2. $r_x = 3$; $r_y=4$

2.1.2 Vektor položaja u prostoru ima sledeće intenzitete komponenti: 8 m duž *x*-ose, 4 m duž *y*-ose i 3 m duž *z* - ose. Koliki je njegov intenzitet? Napiši izraz (formulu) iz kojeg sledi rešenje.

2.1.2.R $r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = \sqrt{89}$

2.1.3 Vektor položaja ima brojnu vrednost 2 m i stoji pod uglom od 30° prema horizontali. Kolike su projekcije vektora položaja? Nacrtaj horizontalnu i vertikalnu komponentu ovog vektora.

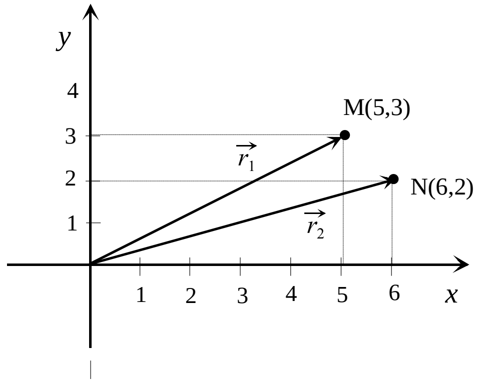
2.1.3.R Vidi sliku 2.1.3.



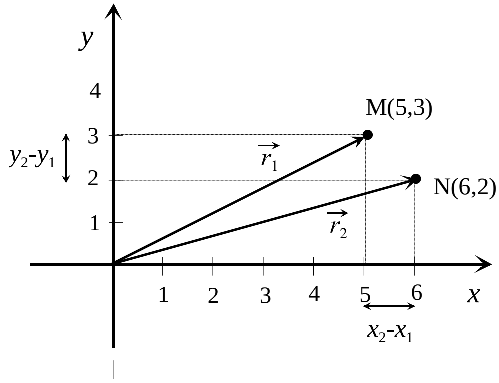
Slika 2.1.3

$$r_x = r \cdot cos30^0 = 2\text{m} \cdot 0{,}87 = 1{,}74\text{m};\ r_y = r \cdot \sin30^0 = 2\text{m} \cdot \frac{1}{2} = 1\text{m}$$

2.1.4 Na slici 2.1.4 su nacrtane tačke M (5,3) i N (6,2). Koja tačka je udaljenija od koordinatnog početka? Koliko je rastojanje između tačaka?



Slika 2.1.4



Slika 2.1.5

2.1.4.R Vidi sliku 2.1.5.

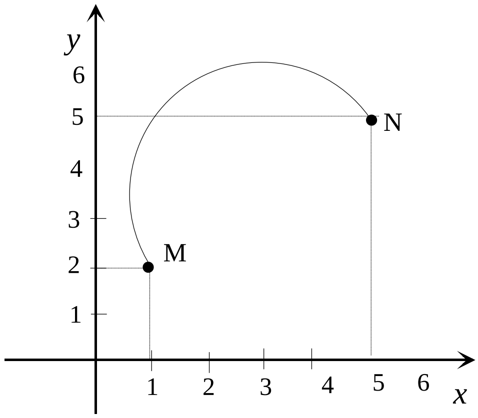
$\mathrm{M}(x_1, y_1) = \mathrm{M}(5{,}3)$; $\mathrm{N}(x_2, y_2) = N(6{,}2)$

$|\vec{r}_1| = r_1 = 5{,}8\,\mathrm{m}$; $|\vec{r}_2| = r_2 = 6{,}3\,\mathrm{m}$; $r_2 > r_1$

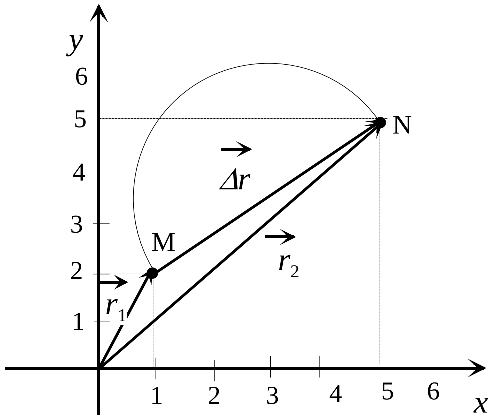
Tačka N je udaljenija od koordinatnog početka. $\Delta r = \sqrt{2}\,\mathrm{m} \approx 1{,}41\,\mathrm{m}$

2.1.5 Materijalna tačka je prešla polovinu kruga (Slika 2.1.6). Početni položaj tačke je bio M (1,2), a konačni N (5,5). Odrediti projekciju vektora pomeraja na ose *x* i *y*, modul vektora pomeraja i put koji je prešla tačka.

2.1.5.R



Slika 2.1.6



Slika 2.1.7

$\mathrm{M}(x_1, y_1) = \mathrm{M}(1{,}2)$; $\mathrm{N}(x_2, y_2) = N(5{,}5)$

$\Delta r_x = x_2 - x_1 = 5 - 1 = 4\,\mathrm{m}$; $\Delta r_y = y_2 - y_1 = 5 - 2 = 3\,\mathrm{m}$

Projekcija na *x* osu je $\Delta r_x = 4 > 0$, a projekcija na y osu $\Delta r_y = 3 > 0$.

Intenzitet vektora pomeraja iznosi $\Delta r = 5\text{m}$. Pređeni put je polovina kruga je $5\pi/2$.

2.2 Srednja i trenutna brzina. Ravnomerno pravolinijsko kretanje

2.2.1 Biciklista se kreće brzinom 7,2 km/h. Pošto se vozio 30 minuta, počeo je da mu duva vetar u leđa brzinom 3,6 km/h. Nakon 30 minuta vetar promeni smer i nastavi da duva istom brzinom u lice biciklisti, poslednjih 1800 s. Koliku srednju brzinu vožnje je postigao biciklista tokom celog puta?

2.2.1.R

$v_1 = v$

$v_2 = v + u$

$v_3 = v - u$

$$v_{sr} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2 + v_3 t_3}{t_1 + t_2 + t_3} = 2\text{m/s} = 7{,}2\text{km/h}$$

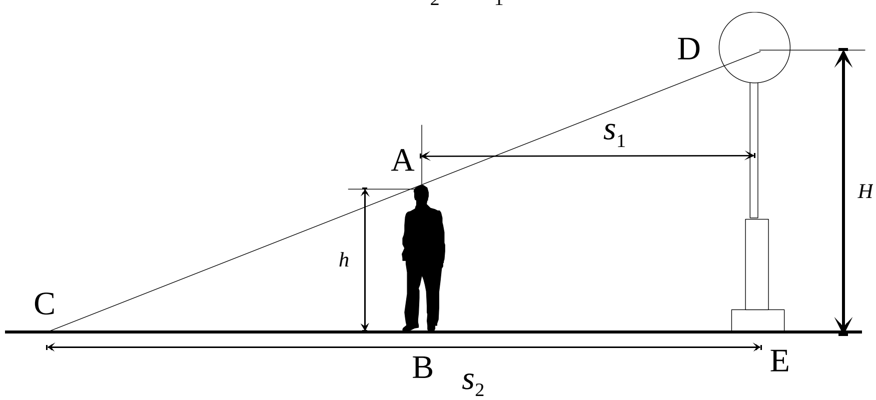
2.2.2 Čovek, visine h=1,75m, prođe stalnom brzinom v=1m/s ispod ulične sijalice koja je na visini H=3m iznad zemlje. Kolika je brzina vrha čovekove senke po zemlji?

2.2.2.R Za vreme dok čovek pređe put $s_1 = v_1 t$, vrh senke pređe put $s_2 = v_2 t$. Iz sličnosti trouglova (Slika 2.2.1) ABC i DEC sledi da je:

$$\frac{H}{h} = \frac{s_2}{s_2 - s_1}$$

odnosno

$$\frac{H}{h} = \frac{v_2 t}{v_2 t - v_1 t}$$



Slika 2.2.1

ili

$$\frac{H}{h}=\frac{v_2}{v_2-v_1}$$

Iz poslednje relacije dobijamo:

$$v_2=v_1\frac{H}{H-h}=2{,}4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

2.2.3 Koncert sluša gledalac u dvorani i slušalac pored radio aparata.

a. Na kom rastojanju od orkestra treba da sedi gledalac u dvorani da bi prvi zvuk muzi;ke numere čuo istovremeno kada i slušalac pored radio aparata koji se nalazi na udaljenosti *d*=7500km od dvorane?
b. Na kom rastojanju od prijemnika treba da se nalazi radio slušalac da bi čuo prvi zvuk muzike istovremeno kada i gledalac koji sedi u dvorani na udaljenosti *l*=30m od muzičara?
Smatrati da je brzina prostiranja zvuka *u*=340m/s, a svetlosti *c*=3·10^{8}m/s.
2.2.3.R
a. Ako je *l*- rastojanje gledaoca do orkestra, a *d* - rastojanje radio-slušaoca do pozorišta, onda je

$$\frac{l}{u}=\frac{d}{c}$$

odnosno

$$l=d\,\frac{u}{c}$$

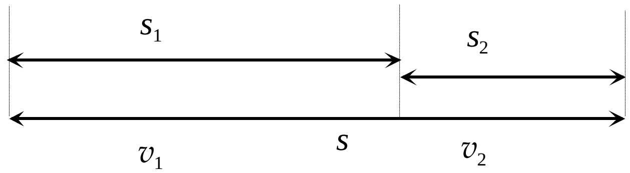
$l=8{,}5\mathrm{m}$
b. Ako je l_1 - rastojanje gledaoca od orkestra, l_2 - rastojanje slušaoca od radioaparata, *d*- rastojanje radio aparata od dvorane, onda je

$$\frac{l_1}{u}=\frac{d}{c}+\frac{l_2}{u}$$

odnosno

$$l_2=l_1-\frac{u}{c}d=21{,}5\mathrm{m}$$

2.2.4 U prvoj polovini vremena automobil se kretao brzinom od 80km/h a preostalo vreme brzinom od 60 km/h (vidi sliku 2.2.2). Kolika je srednja brzina na celom putu?



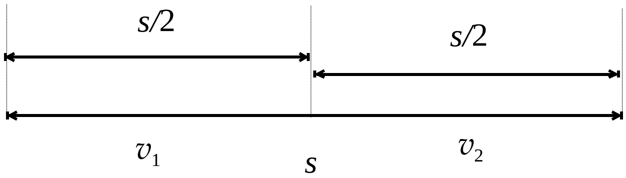
Slika 2.2.2

2.2.4.R

$$v=\frac{s_1+s_2}{t}=\frac{v_1\frac{t}{2}+v_2\frac{t}{2}}{t}=\frac{v_1+v_2}{2}=70\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

2.2.5 Kola se kreću polovinu puta brzinom 80 km/h a drugu polovinu puta brzinom 60 km/h. Kolika je srednja brzina kola na celom putu? (vidi sliku 2.2.10)

2.2.5.R



Slika2.2.3

Polazimo od definicije brzine:

$$v_1=\frac{s_1}{t_1}=\frac{\frac{s}{2}}{t_1}=\frac{s}{2t_1}\quad /\cdot t_1$$

Vreme potrebno da telo pređe prvu polovinu puta dobijamo dalje:

$$v_1t_1=\frac{s}{2}\quad /:v_1$$

$$t_1=\frac{s}{2v_1}$$

Na isti način dobijamo:

$$v_2=\frac{s_2}{t_2}=\frac{\frac{s}{2}}{t_2}=\frac{s}{2t_2}\quad /\cdot t_2$$

$$v_2t_2=\frac{s}{2}\quad /:v_2$$

$$t_2=\frac{s}{2v_2}$$

Srednju brzinu ćemo naći po definiciji:

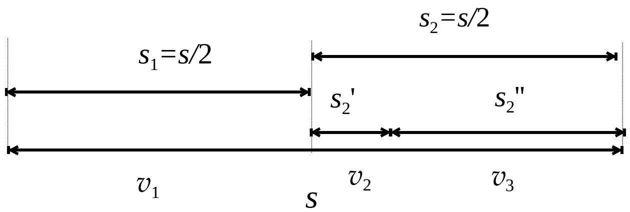
$$v_{sr}=\frac{s}{t}=\frac{s_1+s_2}{t_1+t_2}=\frac{s_1+s_2}{\frac{s}{2v_1}+\frac{s}{2v_2}}=\frac{s}{\frac{s}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)}=\frac{2}{\frac{v_1+v_2}{v_1v_2}}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$$

$$v_{sr} = 68{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

2.2.6 Na prvoj trećini puta automobil se kreće brzinom v_1, a na ostalom delu puta brzinom $v_2 = 54\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Srednja brzina automobila na celom putu je $v_{sr} = 36\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Kolika je brzina v_1?

2.2.6.R $v_1 = \dfrac{v_{sr} v_2}{3v_2 - 2v_{sr}} = 21{,}6\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$

2.2.7 Motocikl je polovinu puta prešao brzinom v_1=50km/h. Na preostalom delu puta, polovinu vremena kretao se brzinom v_2=25km/h, a drugu polovinu vremena brzinom v_3=35km/h. Kolika je srednja brzina motocikla na celom putu?



Slika 2.2.4

2.2.7.R $v_{sr} = 37{,}5\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$

2.2.8 Telo se kreće po pravoj putanji i na sukcesivnim deonicama puta, jednake dužine s, ima stalne brzine v_1, v_2, v_3, ..., v_n. Kolika je srednja brzina tela?

2.2.8.R

$$v_{sr} = \frac{s}{t} = \frac{s}{t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n} = \frac{s}{\dfrac{s}{nv_1} + \dfrac{s}{nv_2} + \dfrac{s}{nv_3} + \ldots + \dfrac{s}{nv_n}} =$$

$$v_{sr} = \frac{n}{\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2} + \dfrac{1}{v_3} + \ldots + \dfrac{1}{v_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{v_i}}$$

2.2.9 Telo se kreće po pravoj putanji tako što u jednakim sukcesivnim intervalima, koji traju Δt, ima stalne brzine v_1, v_2, v_3, ..., v_n. Kolika je srednja brzina tela?

2.2.9.R

$$v_{sr}=\frac{s}{t}=\frac{s_1+s_2+s_3+...+s_n}{t}=\frac{v_1\Delta t+v_2\Delta t+v_3\Delta t+...+v_n\Delta t}{n\Delta t}=$$

$$v_{sr}=\frac{v_1+v_2+v_3+...+v_n}{n}$$

2.2.10 Dva tela (1 i 2) krenu istovremeno iz iste tačke, u međusobno normalnim pravcima, brzinama v_1=30km/h i v_2=40km/h. Kako se menja rastojanje između tela u vremenu? Koliko je ovo rastojanje u trenutku kada prvo telo pređe put s_1=90km?

2.2.10.R

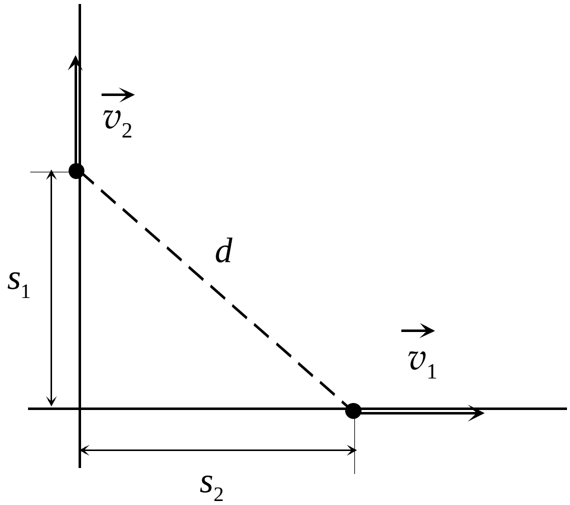
$$s_1=v_1t$$

$$s_2=v_2t$$

Sa slike 2.2.5 je očigledno:

$$d=\sqrt{s_1^2+s_2^2}=t\sqrt{v_1^2+v_2^2}$$

Prvo telo će preći put s_1=90km za vreme $t_1=\frac{s_1}{v_1}=3\text{h}$, pa je u tom trenutku rastojanje između tela $d_1=t_1\sqrt{v_1^2+v_2^2}=150\text{km}$



Slika 2.2.5

2.2.11 Dva mala tela otpočnu istovremeno kretanje uniformno, ali različitim brzinama i različitim pravolinijskim putanjama. Za vreme t=14s, oba tela pređu ukupno rastojanje s=147m, pri čemu je odnos njihovih brzina v_1:v_2=5:7. Kolike su brzine tih tela?

2.2.11.R

$$s_1=v_1\cdot t$$

$$s_2 = v_2 \cdot t$$

Ukupan put koji su prešla tela je:

$$s = s_1 + s_2 = (v_1 + v_2) \cdot t$$

odnosno:

$$v_1 + v_2 = \frac{s}{t} \qquad (2.2.1)$$

Iz uslova zadatka:

$$\frac{v_1}{v_2} = x = \frac{5}{7}$$

dobijamo:

$$v_1 = x \cdot v_2 \qquad (2.2.2)$$

Zamenom (2.2.2) u (2.2.1) dobijamo:

$$x v_2 + v_2 = \frac{s}{t}$$

odnosno

$$v_2 = \frac{s}{(x+1) \cdot t}$$

Stavljanjem dobijene vrednosti u izraz (2.2.2) dobijamo:

$$v_1 = \frac{x \cdot s}{(x+1) \cdot t}$$

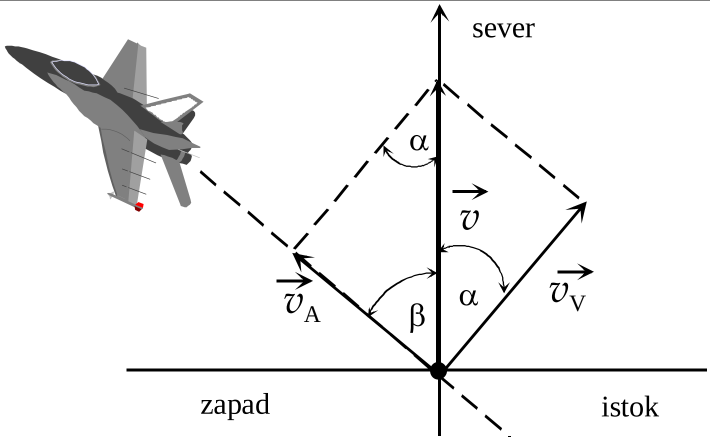
Zamenom konkretnih vrednosti dobićemo:

$$v_1 = 4{,}375 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v_2 = 6{,}125 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

2.2.12 Kolikom brzinom treba da leti avion i kakav kurs mora da održava da bi za vreme t=1h preleteo u pravcu severa put od s=300km ako za vreme puta duva severoistočni vtar brzinom v=35km/h, pod uglom α=40° prema meridijanu?

2.2.12.R

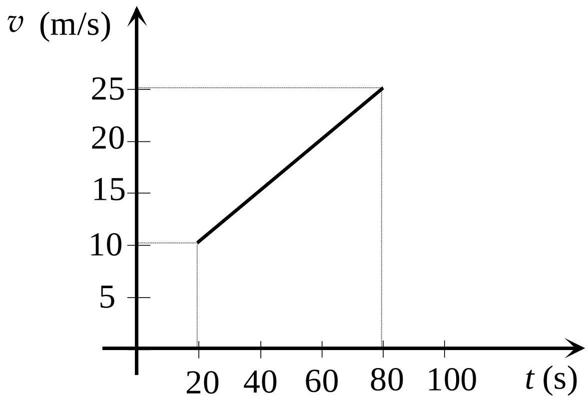


Slika 2.2.6

$$v_A = \sqrt{v_V^2 + v^2 - 2v_V v\cos\alpha} = 274{,}3\frac{\text{km}}{\text{h}};\ \beta = arcsin\left(\frac{v_V \sin\alpha}{v_A}\right) = 4{,}7°$$

2.3 Srednje i trenutno ubrzanje. Ravnomerno ubrzano pravolinijsko kretanje

2.3.1 Promena brzine nekog vozila je prikazana grafički (Slika 2.3.1). Koliko je srednje ubrzanje toga vozila?



Slika 2.3.1

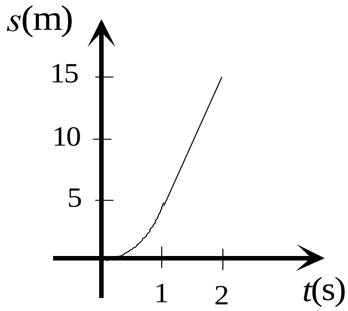
2.3.1.R Ubrzanje ćemo naći po definiciji:

$$a_s = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{15\frac{\text{m}}{\text{s}}}{60\text{s}} = 0{,}25\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

2.3.2 Telo je krenulo pravolinijski brzinom 5 m/s i ubrzanjem 2 m/s^2. Nacrtaj grafik puta u funkciji vremena u toku prvih 2 s kretanja.

2.3.2.R U tabeli je data zavisnost $s = f(t)$, a na slici 2.3.2 je to grafički prikazano.

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$



Slika 2.3.2

t(s)	0	1	2
s(m)	0	6	14

Tabela 2.3.1

2.3.3 Loptica, polazeći iz mirovanja, kreće se pravolinijski, ubrzanjem od 4 cm/s^2. Koliki put pređe za prvih pet minuta kretanja? Koliki put će preći u petoj sekundi?

$t_4 = 4\text{s}$

$t_5 = 5\text{s}$

$s_5 = ?$

$s_{45} = ?$

Za prvih pet pet minuta telo je prešlo put:

$$s_5 = \frac{at_5^5}{2} = 1800\text{m},$$

a u petoj minuti:

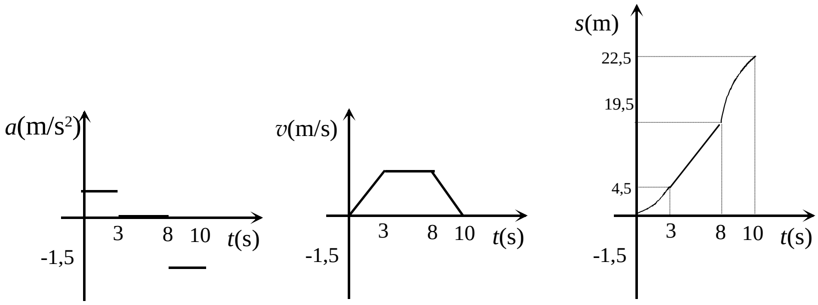
$$s_{45} = \frac{at_5^5}{2} - \frac{at_4^5}{2} = 0{,}18\text{m}.$$

2.3.4 Telo pođe iz stanja mirovanja i kreće se pravolinijski ubrzanjem intenziteta od 5 m/s^2. Posle pređenog puta od 10 m nađi koliki je intenzitet njegove brzine?

2.3.4.R $v = \sqrt{2as} = 10\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

2.3.5 Telo, koje je krenulo iz mirovanja, se prve tri sekunde kretalo jednako ubrzano sa ubrzanjem od 1 m/s^2, zatim 5 sekundi ravnomerno, a nakon toga se zaustavlja za 2s jednoliko usporeno. Nacrtati grafik ubrzanja, brzine i pređenog puta u funkciji vremena.

2.3.5.R



Slika 2.3.3

2.3.6 Automobil se kretao brzinom v_0 =20 m/s. Vozač je kočio ravnomerno i auto se zaustavio posle 2 s. Koliko je usporenje automobila? Koliki put je prešlo telo za to vreme? Nacrtaj dijagram ubrzanja, brzine i pređenog puta u funkciji vremena.

2.3.6.R

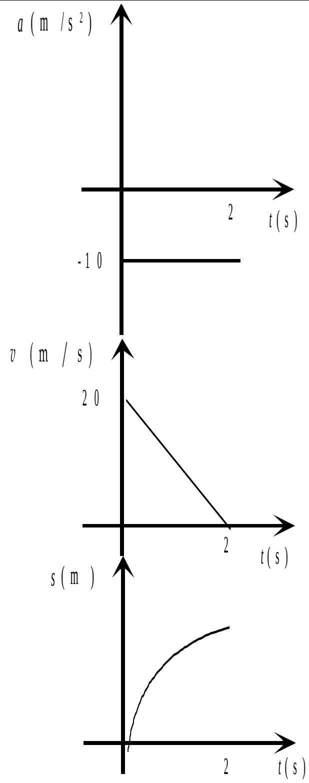
$$v = v_0 - at$$

$$s = v_0 t - \frac{at^2}{2}$$

$$v^2 = v_0^2 - 2as$$

a= - 10 m/s^2

s=20m



Slika 2.3.4

2.3.7 Koliko je ubrzanje tela koje se kreće ravnomerno ubrzano i u osmoj i u devetoj sekundi pređe put od 60m?

2.3.7.R

$$s = s_2 - s_1 = \frac{at_2^2}{2} - \frac{at_1^2}{2}$$

$$s = \frac{a}{2}\left(t_2^2 - t_1^2\right)$$

$$a = \frac{2s}{t_2^2 - t_1^2} = \frac{120}{81-49} = 3{,}125\mathrm{m/s^2}$$

2.3.8 Brzina tela raste linearno sa pređenim putem prema jednačini $v = v_0 + ks$, gde su v_0 i k pozitivne konstante. Kako se menja ubrzanje ovog kretanja u zavisnosti od pređenog puta?

2.3.8.R

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$$

$$a=(v_0+ks)\frac{\mathrm{d}(v_0+ks)}{\mathrm{d}s}=(v_0+ks)k$$

2.3.9 Vektor položaja tela menja se u toku vremena po zakonu $\vec{r}(t)=At^2\vec{i}+Bt\vec{j}+C\vec{k}$ gde je $A=5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $B=3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $C=2\mathrm{m}$, dok su $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ - jedinični vektori *x*, *y* i *z* - osa. Odrediti:

a) vektor brzine i ubrzanja tela,
b) intenzitet brzine tela posle vremena *t*=2s od početka kretanja,
c) intenzitet ubrzanja tela.

2.3.9.R

a. $$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=2At\vec{i}+B\vec{j}$$

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=2A\vec{i}$$

b. $$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{(2At)^2+B^2}=20{,}22\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

c. $$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=2A=10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

2.3.10 Vektor položaja tačke A u odnosu na koordinatni početak menja se u toku vremena po zakonu $\vec{r}(t)=bt\vec{i}-ct^2\vec{j}$, gde su *b*, *c* - pozitivne konstante, $\vec{i}$ i $\vec{j}$ - jedinični vektori *x* i *y* - osa. Odrediti:

a. jednačinu putanje *y* =*y*(*x*) tačke A,
b. vektore brzine i ubrzanja, kao i njihove intenzitete u funkciji vremena.

a. Upoređujući sa $\vec{r}(t)=x\vec{i}+y\vec{j}$, zaključujemo da je $x=bt$ i $y=-ct^2$. Ovo su parametarske jedančine krive (*t* je parametar)

2.3.10.R

Eliminacijom vremena dobijamo $y=-\frac{c}{b^2}x^2$

b. $$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=b\vec{i}-2ct\vec{j}$$

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-2c\vec{j}$$

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{(b)^2+(-2ct)^2}=\sqrt{b^2+4c^2t^2}$$

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=2c$$

2.3.11 Vektor položaja tela menja se u toku vremena po zakonu $\vec{r}(t)=(1-bt)kt\vec{r}_0$ gde je $\vec{r}_0$ - jedinični vektor, b i k - pozitivne konstante. Odrediti:
a) vektor brzine i ubrzanja tela u funkciji vremena,
b) vreme Δt posle koga se telo vraća u početni položaj,
c) put koji telo pređe za vreme Δt.
2.3.11.R

a. $$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=(1-2bt)k\vec{r}_0$$

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-2bk\vec{r}_0$$

b. Ako se telo vraća u ravnotežni položaj onda važi: $\vec{r}(t=0)=\vec{r}(t=\Delta t)$, tj.

$$\vec{r}(t=0)=0 \text{ i } \vec{r}\left(t=\Delta t=\frac{1}{b}\right)=0$$

$$\Delta t=\frac{1}{b}$$

c. $$s=\int_0^t v\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{1}{2b}}(1-2bt)k\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{2b}}^{\frac{1}{b}}(1-2bt)k\mathrm{d}t=\frac{k}{2b}$$

2.3.12 Zavisnost pređenog puta od vremena data je relacijom $s=At-Bt^2+Ct^3$, gde su A=2m/s, B=3m/s^2 i C=4m/s^3. Naći:
a. zavisnost brzine i ubrzanja od vremena;
b. rastojanje koje telo pređe, brzinu i ubrzanje tela posle t=2s od početka kretanja.
2.3.12.R

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=A-2Bt+3Ct^2=38\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -2B + 6Ct = 42\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

2.3.13 Telo se baci uz strmu ravan nagibnog ugla α=45°, početnom brzinom v_0=8m/s. Trenje zanemariti.

a. Koliki će put preći telo za jednu sekundu?
b. Posle koliko sekundi će se telo zaustaviti?

2.3.13.R

$$m\vec{a} = \vec{Q}_p$$

$$ma = -mg\sin\alpha$$

$$a = -g\sin\alpha = -6{,}94\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 4{,}53\mathrm{m}$$

$$v = v_0 + at$$

$$t = -\frac{v_0}{a} = 1{,}18\mathrm{s}$$

2.3.14 Jedno telo pređe put od s=63m za vreme t=6s, pri čemu se njegova brzina poveća 5 puta. Odrediti ubrzanje tela smatrajući ga konstantnim.

2.3.16.R

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a = \frac{5v_0 - v_0}{\Delta t} = \frac{4v_0}{\Delta t}$$

$$v_0 = \frac{a\Delta t}{4}$$

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} = \frac{at^2}{4} + \frac{at^2}{2} = \frac{3at^2}{4}$$

$$a = \frac{4s}{3t^2} = 2{,}33\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

2.4 Kružno kretanje. Ugaoni pomeraj. Srednja i trenutna ugaona brzina. Ravnomerno rotaciono kretanje

2.4.1 Točak poluprečnika r=1m rotira stalnom ugaonom brzinom ω=30rad/s.

a. Koliki je period rotacije točka?
b. Kolika je tangencijalna brzina tačaka na periferiji točka?

2.4.1R

a.

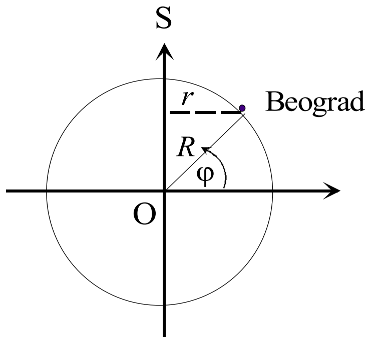
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}209\,\text{s}$$

b.

$$v = \omega r = 30\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2.4.2 Kolikom se brzinom kreće neka tačka u Beogradu usled rotacije Zemlje oko sopstvene ose? Geografska širina Beograda je $44^0 45'$, dok je poluprečnik Zemlje 6470km.

2.4.2.R Ugaona brzina Zemlje je $\omega = \frac{2\pi}{T} = 7{,}3 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, pa je linijska brzina tačke u Beogradu $v = \omega r = \omega R \cos\varphi = 329\frac{\text{m}}{\text{s}}$

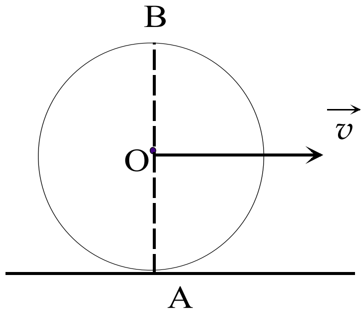


Slika 2.4.1

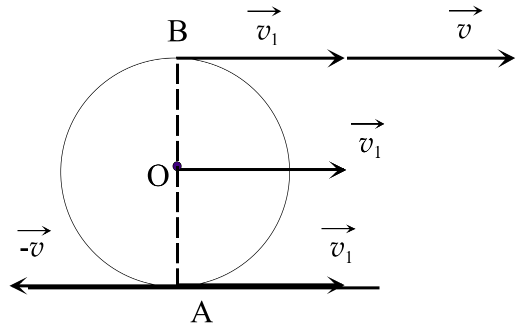
2.4.3 Dužina minutne kazaljke nekog časovnika je R=1,2m, a časovne r=1m. Kolike su ugaone brzine kazaljki, kao i brzine njihovih vrhova?

2.4.3.R Ugaona brzina minutne kazaljke je $\omega_m = \dfrac{2\pi \text{rad}}{3600\text{s}} = 1{,}7 \cdot 10^{-3}\,\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$, a časovne kazaljke $\omega_h = \dfrac{2\pi \text{rad}}{12 \cdot 3600\text{s}} = 1{,}45 \cdot 10^{-5}\,\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$. Brzina vrha minutne kazaljke je $v_m = \omega_m r_m = 2{,}1 \cdot 10^{-3}\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$, a časovne $v_h = \omega_h r_h = 72 \cdot 10^{-6}\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

2.4.4 Kolike su brzine tačaka A i B na točku bicikla koji se kreće brzinom v=40km/h?



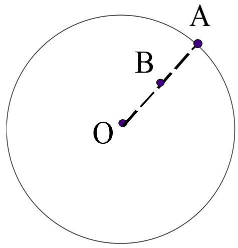
Slika 2.4.2



Slika 2.4.3

2.4.4.R Svaka tačka na točku ima brzinu jednaku rezultanti brzine $\vec{v}_1$, koja je posledica translatornog kretanja točka (ona je po pravcu, smeru i intenzitetu jednaka za sve tačke na točku) i brzine $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, koja je posledica rotacije točka. Za periferijske tačke točka ova brzina je po intenzitetu jednaka, dok joj je pravac tangencijalan. Za tačke A i B pravac i smer ove brzine su prikazani na slici, odakle se zaključuje da rezultujuća brzina tačke A iznosi $v_A = 0$, a tačke B je $v_B = 2v = 80\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$, pošto je $v = v_1$.

2.4.5 Brzina tačke A na zamajcu je v_A=50m/s, a tačke B je v_B=10m/s. Ako je radijalno rastojanje AB=20cm, kolika je ugaona brzina zamajca, a koliki njegov poluprečnik?

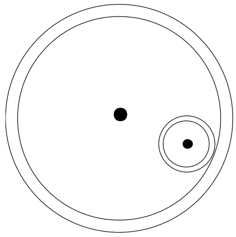


Slika 2.4.4

2.4.5.R Kako.je $v_A = \omega R$, a $v_B = \omega(R - AB)$, to je $\frac{v_A}{R} = \frac{v_B}{R - AB}$, pa je

$R = \frac{v_A AB}{v_A - v_B} = 0{,}25\text{m}$. Ugaona brzina zamajca je prema tome $\omega = \frac{v_A}{R} = 200\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

2.4.6 U šupljem cilindru poluprečnika r_1=18cm nalazi se manji cilindar. Ugaona brzina većeg cilindra je ω_1=10,5rad/s, a manjeg ω_2=31,4rad/s. Ako između cilindara nema klizanja, izračunati poluprečnik manjeg cilindra.



Slika 2.4.5

2.4.6.R

Oba cilindra imaju jednake periferijske brzine, jer nema klizanja:

$$v_1 = v_2$$

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

$$r_2 = \frac{\omega_1 r_1}{\omega_2} = 0{,}06\text{m}$$

2.4.7 Kazaljke na satu poklapaju se u 12 h. Kada će se prvi put ponovo poklopiti? Koliko puta će se poklopiti za 12 h? Rezultat izraziti u desetinama sekundi.

2.4.7.R

t= 13h 5' 27,3" ; 11 puta

2.4.8 U 6 h kazaljke su jedna naspram druge. Kada će se kazaljke prvi put poklopiti? Rezultat izraziti u desetinama sekundi.

2.4.8.R

t= 6h 32' 32,7"

2.5 Srednje i trenutno ugaono ubrzanje.Ravnomerno ubrzano kružno kretanje

2.5.1 Ventilator rotira brzinom koja odgovara frekvenciji 900 obrta u minuti. Posle isključenja motora ventilatora, rotacija se ravnomerno usporava pri čemu do zaustavjanja ventilator naparavi 75 punih obrtaja. Koliko će vremena proći od momenta isključenja motora ventilatora do potpunog zaustavljanja?

2.5.1.R

Ugaona brzina ventilatora u početnom trenutku iznosi:

$$\omega_0 = 900\frac{2\pi}{60}\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 94{,}2\frac{\text{rad}}{\text{s}} \tag{2.5. 1 }$$

Ugaoni pomeraj je:

$$\theta = \omega_0 t - \frac{\alpha t^2}{2} = 75\cdot 2\pi\text{rad} \tag{2.5. 2 }$$

Iz uslova da će se ventilator zaustaviti:

$$\omega = \omega_0 - \alpha t = 0 \tag{2.5. 3 }$$

dobijamo:

$$\alpha = \frac{\omega_0}{t} \tag{2.5. 4 }$$

Zamenom izraza (2.5.4) u (2.5.3) dobijamo:

$$\omega_0 t - \frac{\frac{\omega_0}{t}t^2}{2} = 75\cdot 2\pi\text{rad} \tag{2.5. 5 }$$

odnosno:

$$\omega_0 t - \frac{\omega_0 t}{2} = 75\cdot 2\pi\text{rad} \tag{2.5. 6 }$$

ili:

$$\frac{\omega_0 t}{2} = 75\cdot 2\pi\text{rad} \tag{2.5. 7 }$$

i konačno dobijamo vreme posle koga će se ventilator zaustaviti:

$$t = \frac{2\cdot 75\cdot 2\pi\text{rad}}{\omega_0} = 10\text{s} \tag{2.5. 8 }$$

2.5.2 Disk se obrće ravnomerno ubrzano dostigavši ugaonu brzinu ω=20 rad/s posle 10 obrta od početka kretanja. Odrediti ugaono ubrzanje tog diska.

2.5.2.R

U početnom trenutku ugaona brzina diska je $\omega_0 = 0$, pa možemo pisati:

$$\varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{2.5. 9 }$$

odnosno:

$$2\pi n = \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{2.5. 10 }$$

Iz poznate relacije za linijsku brzinu dobijamo:

$$v = \omega r = 30\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{2.5. 11 }$$

Iz relacije za ugaonu brzinu:

$$\omega = \alpha t \tag{2.5. 12 }$$

dobijamo vreme:

$$t = \frac{\omega}{\alpha}. \tag{2.5. 13 }$$

Zamenom (2.5.13) u (2.5.10):

$$2\pi n = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 \tag{2.5. 14 }$$

dobijamo konačno:

$$\alpha = \frac{\omega^2}{2\pi n} = 3{,}185\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \tag{2.5. 15 }$$

2.5.3 Ugaono ubrzanje tela pri jednoliko ubrzanom rotacionom kretanju je 3 rad/s^2. Ugaona brzina se povećala od vrednosti 3 rad/s do 6 rad/s u toku nekog vremenskog intervala. Koliki je taj vremenski interval i koliki je ugaoni pomeraj telo opisalo?

2.5.3.R

Iz definicije ubrzanja:

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} \tag{2.5. 16 }$$

dobijamo vreme:

$$\Delta t = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\alpha} = 1\text{s} \tag{2.5. 17 }$$

Ugaoni pomeraj dobijamo iz poznate relacije:

$$\varphi = \omega_0 \Delta t - \frac{\alpha \Delta t^2}{2} = 4{,}5\text{rad}$$

2.5.4 Telo rotira ugaonom brzinom 5 rad/s. U jednom trenutku počinje jednoliko da usporava rotiranje ugaonim usporenjem 2 rad/s^2 i posle izvesnog vremena se zaustavlja. Koliko je vremena proteklo do zaustavljanja i koliki je odgovarajući ugaoni pomeraj?

2.5.4.R $t_1 = \dfrac{\omega_0}{\alpha} = 2{,}5\mathrm{s}$; $\varphi_1 = \omega_0 t_1 - \dfrac{\alpha t_1^2}{2} = 6{,}25\mathrm{rad}$

2.6 Radijalno i tangencijalno ubrzanje pri rotacionom kretanju

2.6.1 Izračunati ugaonu brzinu ω, periferijsku brzinu v, tangencijalno ubrzanje a_τ i normalno ubrzanje a_n tačaka na površini Zemlje na geografskoj širini α=45°, uzimajući u obzir samo obrtanje Zemlje oko svoje ose. Pretpostaviti da je Zemlja sfera polu prečnika 6370km.

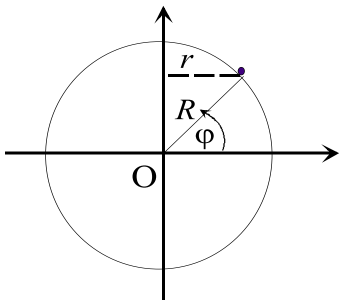
2.4.1.R

Sa slike 2.6.1 je očigledno:

$$r = R\cos\alpha\,. \tag{2.6. 1}$$

Linijska brzina je:

$$v = \omega R\cos\alpha\,. \tag{2.6. 2}$$



Slika 2.6. 1

Ugaona brzina iznosi:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{2.6. 3}$$

Linjsku brzinu dobijamo kada relaciju (2.6.3) zamenimo u (2.6.2):

$$v = \frac{2\pi}{T} R\cos\alpha = 326{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{2.6. 4}$$

Tangencijalno ubrzanje je:

$$a_\tau = 0 \tag{2.6. 5}$$

jer je intenzitet ugaone i periferijske brzine datih tačaka stalan.

Normalno ubrzanje je:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 2{,}35\cdot 10^{-2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{2.6. 6}$$

2.6.2 Disk poluprečnika R=0,1m rotira tako da se zavisnost ugla rotacije menja sa vremenom prema jednačini: $\varphi = A + Bt + Ct^3$, gde su B=2rad/s, C=1rad/s^2. Za tačke koje se nalaze na periferiji diska, posle 2s od početka kretanja, odrditi:

a. ugaonu brzinu,
b. linijsku brzinu,
c. ugaono ubrzanje,
d. tangencijalno, normalno i ukupno ubrzanje.

2.6.2.R

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = B + 3Ct^2 = 14\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

$$v = \omega R = 1{,}4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = 6C = 12\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$$

$$a_\tau = \alpha R = 1{,}2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = 19{,}6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = 19{,}64\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

2.6.3 Disk poluprečnika r=5cm rotira tako da se ugao obrtanja sa vremenom menja prema jednačini: $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, gde je D=1rad/s^3. Odrediti promenu tangencijalnog ubrzanja tačaka na periferiji diska u svakoj sekundi kretanja.

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = B + 2Ct + 3Dt^2$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = 2C + 6Dt$$

$$\alpha(t = 0s) = 2C$$

$$\alpha(t=1s)=2C+6D$$

$$a_\tau(t=0s)=\alpha r=2Cr$$
$$a_\tau(t=1s)=2Cr+6Dr$$
$$\Delta a_\tau=a_\tau(t=1s)-a_\tau(t=0s)=6Dr$$
$$\Delta a_\tau=0{,}3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

2.6.4 Normalno ubrzanje tela koje se kreće po krugu poluprečnika r menja se sa vremenom prema jednačini: $a_n=\mathrm{A}t+\mathrm{B}t^2$, gde su A i B konstante.

a. Kolika je ugaona brzina tela?
b. Koliko je tangencijalno a koliko ukupno ubrzanje tela?

2.6.4.R

a.

$$a_n=\frac{v^2}{r}$$

$$a_n=r\omega^2$$

$$\omega=\sqrt{\frac{a_n}{r}}=\sqrt{\frac{\mathrm{A}t+\mathrm{B}t^2}{r}}$$

b.

$$v=\sqrt{a_n r}$$

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{r(\mathrm{A}+2\mathrm{B}t)}{2\sqrt{r(\mathrm{A}t+\mathrm{B}t^2)}}$$

$$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}=\sqrt{\frac{r^2(\mathrm{A}+2\mathrm{B}t)^2}{4r(\mathrm{A}t+\mathrm{B}t^2)}+(\mathrm{A}t+\mathrm{B}t^2)^2}$$

2.6.5 Osovina neke mašine rotira, praveći 3000 obrtaja u minuti. U jednom trenutku osovina počinje da ravnomerno smanjuje brzinu, praveći 1000 obrta u minuti u vremenskom intervalu Δt=10s.

a. Kolika je srednja ugaona brzina osovine?
b. Za koje vreme će se osovina zaustaviti ako je usporenje ravnomerno?

c. Koliko je tangencijalno ubrzanje tačaka na periferiji osovine ako je njen prečnik d=3cm?

2.6.5.R

$$\omega_1 = \frac{3000\cdot 2\pi}{60}\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 100\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 314\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_2 = \frac{1000\cdot 2\pi}{60}\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 104{,}67\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

a.

$$\omega_{sr} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 209{,}335\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b.

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = -20{,}933\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$\omega = 0 = \omega_1 + \alpha t$$

$$t = -\frac{\omega_1}{\alpha} = 15\text{s}$$

c.

$$a_\tau = \alpha r = 0{,}314\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

2.6.6 Disk poluprečnika r= 10 cm započinje rotaciju oko sopstvene ose iz stanja relativnog mirovanja sa konstantnim ugaonim ubrzanjem α=0,5rad/s^2. Koliko je tangencijalno, a koliko radijalno i koliko je totalno ubrzanje po isteku druge sekunde od početka kretanja?

2.6.6.R

$$\omega = \alpha t = 1\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r = 0{,}1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\alpha_\tau = \alpha r = 0{,}05\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{\alpha^2 r^2+\omega^4 r^2}=r\sqrt{\alpha^2+\omega^4}=0{,}11\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

2.6.7 Automobil se kreće po horizontalnoj kružnoj putanji poluprečnika 43 m tangencijalnim ubrzanjem a_τ=2m/s^2. Početna brzina automobila je v_0=36 km/h. Za koje vreme će automobil preći prvi krug?

2.6.7.R

$$\theta=\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega_0=\frac{v_0}{R}$$

$$\alpha=\frac{a_\tau}{R}$$

$$2\pi=\frac{v_0}{R}T+\frac{1}{2}\frac{a_\tau}{R}T^2 \ /\cdot 2R$$

$$4\pi R=2v_0 T+\frac{1}{2}a_\tau T^2 \ /\div a_\tau$$

$$\frac{4\pi R}{a_\tau}=\frac{2v_0 T}{a_\tau}+T^2$$

$$T^2+\frac{2v_0}{a_\tau}T-\frac{4\pi R}{a_\tau}=0$$

$$T_{1/2}=-\frac{v_0}{a_\tau}\pm\sqrt{\left(\frac{v_0}{a_\tau}\right)^2+\frac{4\pi R}{a_\tau}}$$

$$T_1=12{,}18\mathrm{s}$$
$$T_2=-22{,}18\mathrm{s}$$

Drugo rešenje odbacujemo kao fizički nerealno.

3. Mehanika krutog tela

3.1 Inercijalni sistem referencije. Zakon sabiranja brzina.

3.1.1 Dva grada se nalaze pored reke na rastojanju d=1km. Brzina broda koji saobraća na ovoj relaciji, u odnosu na vodu, iznosi v_1=8km/h. Otvaranjem i zatvaranjem brane na reci, voda je u jednom slučaju pokretna i teče brzinom v_2=2km/h, a u drugom slučaju je mirna. Naći odnos vremena koja su potrebna brodu da bi prešao ovu relaciju uzvodno i nizvodno u oba slučaja.

3.1.1.R

Putovanje uzvodno traje:

$$t_1 = \frac{d}{v_1 - v_2} \tag{3.1. 1 }$$

a nizvodno

$$t_2 = \frac{d}{v_1 + v_2} \tag{3.1. 2 }$$

Zbir ovih vremena iznosi:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{d}{v_1 - v_2} + \frac{d}{v_1 + v_2} = \frac{2v_1 d}{v_1^2 - v_2^2} \tag{3.1. 3 }$$

Ako bi se brod kretao po mirnoj vodi

$$t' = \frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_1} = \frac{2d}{v_1} \tag{3.1. 4 }$$

Odnos vremena iznosi:

$$\frac{t}{t'} = \frac{v_1^2}{v_1^2 - v_2^2} = 1{,}07 \tag{3.1. 5 }$$

3.1.2 Dva grada se nalaze pored reke na rastojanju d=1km. Brzina broda koji saobraća na ovoj relaciji, u odnosu na vodu, iznosi v_1=8km/h. Otvaranjem i zatvaranjem brane na reci, voda je u jednom slučaju pokretna i teče brzinom v_2=2km/h, a u drugom slučaju je mirna. Izračunati dužinu puta koji pređe brod stalnom brzinom u odnosu na vodu.

3.1.2.R

Pređeni put niz reku je:

$$s_1 = v_1 t_2 = d\,\frac{v_1}{v_1 + v_2} = 0{,}8\text{km}, \tag{3.1. 6 }$$

a uzvodno

$$s_2 = v_1 t_1 = d\frac{v_1}{v_1 - v_2} = 1{,}3\text{km} \tag{3.1. 7 }$$

Zbir ovih puteva predstavlja pređeni put po vodi, pri odlasku i povratku broda. Naime:

$$s = s_1 + s_2 = 2{,}1\text{km} \tag{3.1. 8 }$$

Odavde je $2d < s$, što ukazuje na nepovoljne uslove kretanja broda po tekućoj vodi.

3.1.3 Ako se brod kreće stalnom brzinom, u odnosu na vodu, na relaciji između dva grada, vožnja traje nizvodno t_1=3h, a uzvodno t_2=6h, a Za koje vreme će brod da pređe ovu relaciju nizvodno sa isključenim motorima?

3.1.3.R

Nizvodno pređeni put iznosi:

$$s = (v + u)t_1 \tag{3.1. 9 }$$

Uzvodno:

$$s = (v - u)t_2 \tag{3.1. 10 }$$

Brod s isključenim motorom pređe put:

$$s = ut \tag{3.1. 11 }$$

Iz relacije (3.1.9) sledi:

$$\frac{s}{t_1} = v + u \tag{3.1. 12 }$$

a iz relacije (3.1.10)

$$\frac{s}{t_2} = v - u \tag{3.1. 13 }$$

Takođe iz relacije (3.1.11) dobijamo:

$$\frac{s}{u} = t \tag{3.1. 14 }$$

Oduzimanjem (3.1.12) i (3.1.13) dobijamo:

$$\frac{s}{t_1} - \frac{s}{t_2} = 2u \tag{3.1. 15 }$$

odnosno

$$u = s\frac{t_2 - t_1}{2t_1 t_2} \tag{3.1. 16 }$$

Vreme potrebno da brod pređe nizvodno sa isključenim motorom:

$$t = \frac{s}{u} = \frac{2t_1 t_2}{t_1 - t_2} = 12\text{h} \tag{3.1. 17 }$$

3.1.4 Dva tela se kreću po istoj pravoj. Kada se tela kreću jedno od drugog, rastojanje im se promeni za Δd_1=16m, za vreme Δt_1=10s. U slučaju kada se tela kreću u susret jedno drugom, rastojanje im se promeni za Δd_2=3m za vreme Δt_2=3s. Kolike su brzine tela?

3.1.4.R

Brzina udaljavanja je:

$$v' = v_1 + v_2 , \qquad (3.1.\ 18)$$

dok je brzina približavanja:

$$v'' = v_1 - v_2 , \qquad (3.1.\ 19)$$

gde je

$$v' = \frac{\Delta d_1}{\Delta t_1} = 1{,}6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad (3.1.\ 20)$$

i

$$v'' = \frac{\Delta d_2}{\Delta t_2} = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad (3.1.\ 21)$$

Sabiranjem i oduzimanjem (3.1.20) i (3.1.21) i delenjem sa dva dobijamo:

$$v_1 = \frac{v' + v''}{2} \qquad (3.1.\ 22)$$

odnosno oduzimanjem i delenjem sa dva:

$$v_2 = \frac{v' - v''}{2} \qquad (3.1.\ 23)$$

Zamenom brojnih vrednosti dobijamo:

$$v_1 = 1{,}3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad (3.1.\ 24)$$

i

$$v_2 = 0{,}3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad (3.1.\ 25)$$

3.1.5 Avion leti iz tačke A u tačku B i natrag brzinom 450km/h u odnosu na vazduh. U pravcu leta stalno u istom smeru duva vetar, čija je brzina 50km/h. Rastojanje između A i B je 2000km. Koliko vremena treba avionu za ceo put?

3.1.5.R

Ako avion leti iz A uB, vetar duva iz A prema B, njegova brzina u odnosu na zemlju iznosi:

$$\vec{v}_{AZ} = \vec{v}_{AV} + \vec{v}_{VZ} \qquad (3.1.\ 26)$$

odnosno u skalarnom obliku:

$$v_{AZ1} = v_{AV} + v_{VZ} \qquad (3.1.\ 27)$$

Vreme potrebno da avion pređe put *s* iznosi:

$$t_1 = \frac{s}{v_{AZ1}} = 4\mathrm{h} \qquad (3.1.\ 28)$$

Ako avion leti iz B u A, njegova brzina u odnosu na zemlju iznosi:

$$\vec{v}_{AZ2} = \vec{v}_{AV} + \vec{v}_{VZ} \quad (3.1.\ 29)$$

odnosno

$$v_{AZ2} = v_{AV} - v_{VZ} \quad (3.1.\ 30)$$

Odgovarajuće vreme iznosi:

$$t_2 = \frac{s}{v_{AZ2}} = 5\text{h} \quad (3.1.\ 31)$$

3.1.6 Brzina bicikliste je 54km/h, a brzina vetra u odnosu na put je 3m/s. Kolika je brzina bicikliste u odnosu na vetar, ako mu vetar duva:

a. u lice
b. u leđa

3.1.6.R

a. Brzina bicikliste u odnosu na zemlju iznosi:

$$\vec{v}_{BZ} = \vec{v}_{BV} + \vec{v}_{VZ} \quad (3.1.\ 32)$$

odnosno:

$$v_{BZ} = v_{BV} - v_{VZ} \quad (3.1.\ 33)$$

ili

$$v_{BV} = v_{BZ} + v_{VZ} \quad (3.1.\ 34)$$

Zamenom odgovarajućih brojnih vrednosti dobijamo:

$$v_{BV} = 18\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (3.1.\ 35)$$

b. Brzina bicikliste u odnosu na zemlju iznosi:

$$\vec{v}_{BZ} = \vec{v}_{BV} + \vec{v}_{VZ} \quad (3.1.\ 36)$$

odnosno:

$$v_{BZ} = v_{BV} + v_{VZ} \quad (3.1.\ 37)$$

ili

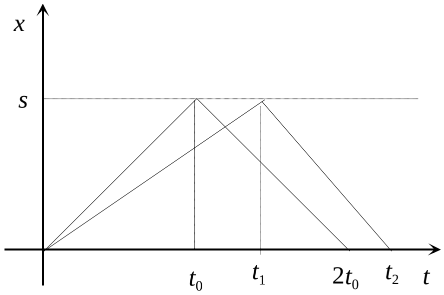
$$v_{BV} = v_{BZ} - v_{VZ} \quad (3.1.\ 38)$$

Konačno dobijamo:

$$v_{BV} = 12\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (3.1.\ 39)$$

3.1.7 Da li je potrebno isto vreme da motorni čamac ode iz mesta A u B i vrati se natrag po reci kao po jezeru? Brzina čamca u odnosu na vodu je u oba slučaja v=8km/h, brzina reke je u=2km/h, rastojanje od A do B je s=10km.

3.1.8.R



Slika 3.1 1

Pređeni put čamca po reci uzvodno:

$$s=(v-u)t_1, \tag{3.1. 40 }$$

dok je nizvodno:

$$s=(v+u)t_2 \tag{3.1. 41 }$$

Vreme potrebno da čamac uzvodno po reci pređe od A do B je:

$$t_1=\frac{s}{v-u}, \tag{3.1. 42 }$$

dok je vreme potrebno da čamac pređe od B do A:

$$t_2=\frac{s}{v+u} \tag{3.1. 43 }$$

Ukupno vreme iznosi:

$$t=t_1+t_2 \tag{3.1. 44 }$$

odnosno zamenom podataka dobijamo:

$$t=2{,}6\mathrm{h} \tag{3.1. 45 }$$

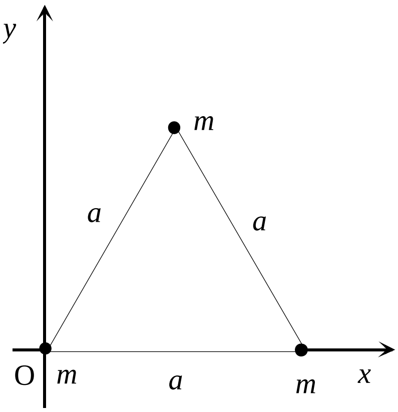
Vreme da čamac ode iz A u B i vrati se po jezeru iznosi:

$$t'=2t_0=2\frac{s}{v}=2{,}5\mathrm{h} \tag{3.1. 46 }$$

3.2 Centar mase tela

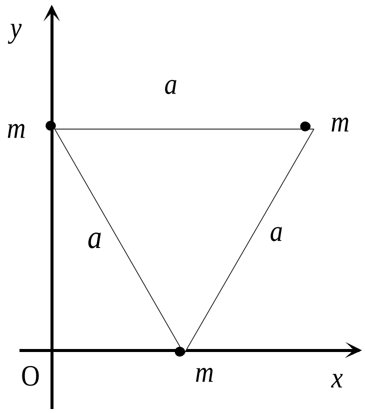
3.2.1 Odrediti centar masa sistema tela na slici.

a.



Slika 3.2 1

b.



Slika 3.2 2

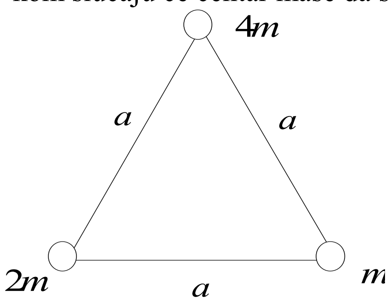
a. $x_c = \frac{a}{2}$; $y_c = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

b. $x_c = \frac{a}{2}$; $y_c = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

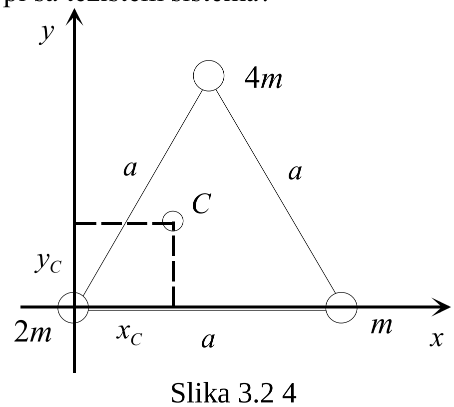
3.2.2 Tri tela malih dimenzija, masa m, $2m$ i $4m$, nalaze se u temenima jednakostraničnog trougla.

a) Gde se nalazi centar mase sistema?

b) U kom slučaju će centar mase da se poklopi sa težištem sistema?



Slika 3.2 3



Slika 3.2 4

3.2.2.R

a) Prema definiciji centra mase je

$$x_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{2m \cdot 0 + m \cdot a + 4m \cdot \frac{a}{2}}{2m + m + 4m} = \frac{3}{7}a$$

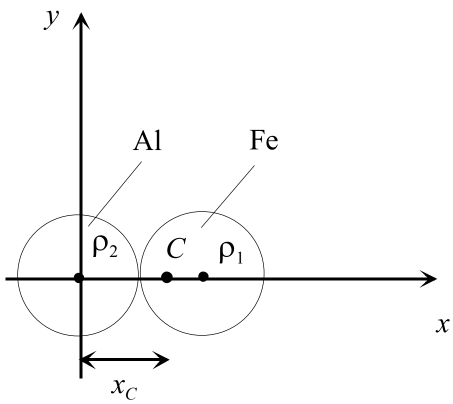
$$y_C = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{2m \cdot 0 + m \cdot 0 + 4m \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2m + m + 4m} = \frac{2ma\sqrt{3}}{7m} = \frac{2\sqrt{3}}{7}a$$

b) Ako je gravitaciono polje homogeno.

3.2.3 Dve homogene kugle, jednakih poluprečnika r=10cm, jedna načinjena od gvožđa a druga od aluminijuma, postavljene su tako da se dodiruju. Ako je gustina gvožda ρ_{Fe}=7800 kg/m^3, a aluminijuma ρ_{Al}=2700 kg/m^3, odrediti položaj centra mase ovog sistema tela.

3.2.3.R

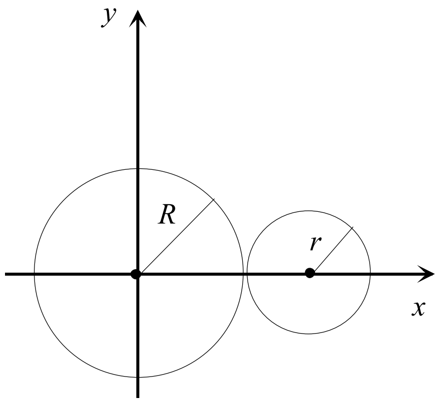
$$x_C = 2r\frac{\rho_{Al}}{\rho_{Fe} + \rho_{Al}} = 15\text{cm}$$



Slika 3.2 5

Zbog malih dimenzija tela može se smatrati da se ona nalaze u homogenom gravitacionom polju, i zbog toga se težište sistema poklapa sa njegovim centrom mase.

3.2.4 Dve homogene kuglice, načinjene od iste supstancije, nanizane su na tanak zategnut konac. Gde se nalazi centar mase sistema kuglica ako se one dodiruju? Odnos poluprečnika kuglica iznosi R/r=2.



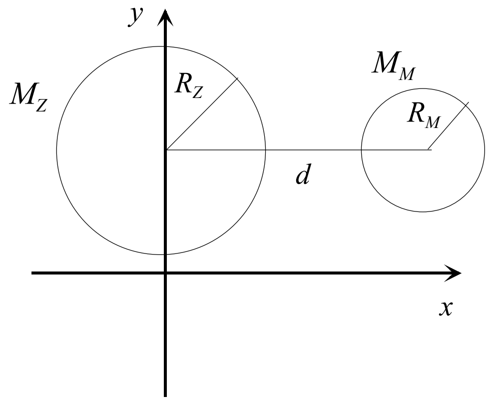
Slika 3.2 6

3.2.3.R

Za usvojeni koordinatni sistem je $y_C = 0$, dok je $x_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_2(R+r)}{m_1 + m_2}$

Mase kuglica su: $m_1 = \rho V_1 = \rho \frac{4}{3} R^3 \pi = \rho \frac{32}{3} R^3 \pi$ i $m_2 = \rho V_2 = \rho \frac{4}{3} r^3 \pi$ pa je x-koordinata centra mase $x_C = \frac{r}{3}$.

3.2.5 Odrediti položaj centra masa sistema Zemlja - Mesec. Rastojanje Zemlja - Mesec je $3.844 \cdot 10^8$ m. Masa Meseca je 81,3 puta manja od mase Zemlje. Uporediti dobijeni rezultat s poluprečnikom Zemlje R_Z=6,38·10^6 m.



Slika 3.2 7

$$r_c = \frac{0 \cdot M_Z + d \cdot M_M}{M_Z + M_M} = \frac{M_M}{M_Z + M_M} d = 4{,}7 \cdot 10^6 \,\mathrm{m}\,;\ r_c < R_Z$$

3.3 Njutnovi zakoni. Impuls

3.3.1 Koliko je ubrzanje tela mase m=10kg ako na njega deluje sila intenziteta 50N?

3.3.1.R

$$a = \frac{F}{m} = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

3.3.2 Kolika sila treba da deluje na telo mase m=2kg da bi se njegova brzina povećala od v_0=30m/s do v=50m/s za vreme od 10s?

3.3.2.R

$$F = m\frac{v - v_0}{\Delta t} = 4\mathrm{N}$$

3.3.3 Telo mase 200g se kreće pravolinijski jednoliko ubrzano iz mirovanja i za vreme od 4s pređe put od 200m. Koliki je intenzitet sile koja deluje na telo?

3.3.3.R

$$m = 200g = 0{,}2\mathrm{kg}$$
$$v_0 = 0$$
$$t = 4s$$
$$s = 200\mathrm{m}$$

$$F = ?$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a = \frac{2s}{t^2}$$

$$F = ma = m\frac{2s}{t^2}$$

$$F = 0{,}2\mathrm{kg}\frac{2\cdot 200\mathrm{m}}{(4\mathrm{s})^2} = 5\mathrm{N}$$

3.3.4 Telo, mase m=3kg, pod dejstvom stalne sile, započinje kretanje iz stanja mirovanja. Posle pređenog puta s=125m, ono ima brzinu v=25m/s. Koliki je intenzitet sile?

3.3.4.R

$$m = 3\mathrm{kg}$$
$$v_0 = 0$$
$$s = 125\mathrm{m}$$
$$v = 25\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

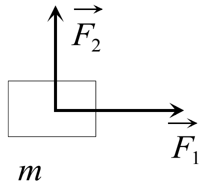
$$F = ?$$

$$v^2 = v_0^2 + 2as \Rightarrow v^2 = 2as \Rightarrow a = \frac{v^2}{2s}$$

$$F = ma = m\frac{v^2}{2s}$$

$$F = 3\mathrm{kg}\frac{\left(25\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2\cdot 125\mathrm{m}} = 7{,}5\mathrm{N}$$

3.3.5 Na slici 3.3.1 su prikazane sile koje deluju na telo. Intenziteti sila iznose: F_1=4N i F_2=3N. Odrediti ubrzanje tela ako je njegova masa m=5kg.



Slika 3.3 1

3.3.5.R

Opšti oblik jednačine kretanja u vektorskom obliku u ovom slučaju glasi:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \qquad (3.3.\ 1\ )$$

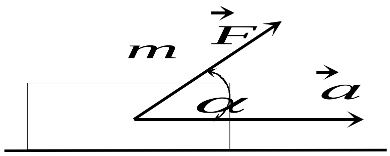
odnosno u skalarnom obliku:

$$ma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \qquad (3.3.\ 2\ )$$

odakle dobijamo da je intenzitet ubrazanja:

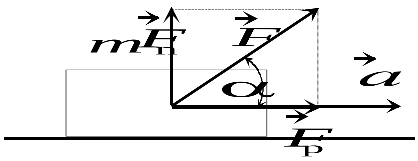
$$a = 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \qquad (3.3.\ 3\ )$$

3.3.6 Koliko je ubrzanje komada leda mase m=0.3kg, u pravcu paralelnom površini stola, ako na njega deluje konstantna sila intenziteta F=5N usmerena kao na slici 3.3.2 ($\alpha = 30°$)? Posle nekog vremena led se istopi na polovinu početne mase. Koliko ja sada ubrzanje? Trenje zanemariti.



Slika 3.3 2

3.3.6.R



Slika 3.3 3

Iz slike 3.3.3 dobijamo

$$F_p = F\cos\alpha \qquad (3.3.\ 4\ )$$

Jednačina kretanja u vektorskom obliku je:

$$m\vec{a} = \vec{F}_p \qquad (3.3.\ 5\ )$$

odnosno u skalarnom obliku:

$$ma = F_p$$

odnosno imajući u vidu (3.3.4) pišemo:

$$ma = F\cos\alpha$$

ili konačno:

$$a = \frac{F\cos\alpha}{m} = \frac{5\mathrm{N}\frac{\sqrt{3}}{2}}{0{,}3\mathrm{kg}} = 14{,}4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

3.3.7 Telo mase 200g se kreće brzinom od 72km/h. Koliki je impuls ovog tela?

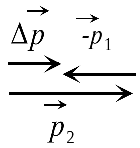
3.3.7.R

$p = mv = 0{,}2\mathrm{kg}\cdot 20\mathrm{m/s} = 4\mathrm{kgm/s}$

3.3.8 Telo mase 300g u početnom trenutku ima brzinu v_1=36 km/h a nakon izvesnog vremena v_2=108 km/h. Telo se kreće stalno pravolinijski i ne menja smer. Kolika je promena impulsa ovog tela?

3.3.8.R

Pošto je reč o pravolinijskom kretanju bez promene smera sa slike 3.3.5 vidimo da važi:



Slika 3.3 4

$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \left(-\vec{p}_1\right)$

odnosno:

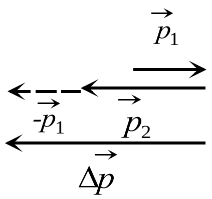
$\Delta p = p_2 - p_1$

ili:

$$\Delta p = mv_2 - mv_1 = m\left(v_2 - v_1\right) = 0{,}3\mathrm{kg}\cdot\left(30\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = 0{,}3\mathrm{kg}\cdot 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 6\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

3.3.9 Telo mase 2kg se kreće pravolinijski i u početnom trenutku ima brzinu 20m/s a nakon izvesnog vremena 180km/h. Sa slike vidimo da je došlo do promene smera brzine. Kolika je promena impulsa ovog tela?

Ovde je reč o pravolinijskom kretanju sa promenom smera i sa slike 3.3.6 vidimo da važi:



Slika 3.3 5

$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \left(-\vec{p}_1\right)$

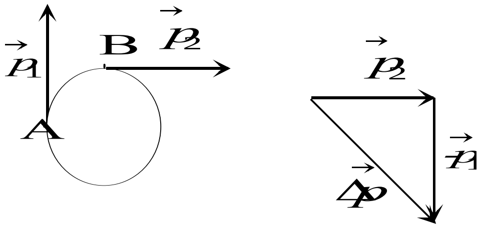
odnosno:

$\Delta p = p_2 + p_1$

odnosno:

$$\Delta p = mv_2 + mv_1 = m(v_2 + v_1) = 2\text{kg} \cdot \left(20\frac{\text{m}}{\text{s}} + 50\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 2\text{kg} \cdot 70\frac{\text{m}}{\text{s}} = 140\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3.3.10 Telo mase 400g se kreće po kružnoj putanji kao na slici 3.3.10.1 i brzine su joj po intenzitetu jednake i iznose 20m/s. Kolika je promena impulsa ovog tela (A-B)?



Slika 3.3 6

3.3.10.R

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 + (-\vec{p}_1)$$

$$\Delta p^2 = p_2^2 + p_1^2 \Rightarrow \Delta p = \sqrt{(mv_2)^2 + (mv_1)^2}$$

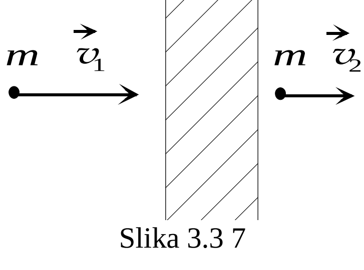
$$\Delta p = \sqrt{\left(0{,}4kg \cdot 20\frac{m}{s}\right)^2 + \left(0{,}4kg \cdot 20\frac{m}{s}\right)^2} = \sqrt{16\left(kg\frac{m}{s}\right)^2} = 4\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3.3.11 Metak mase 1g uleće u dasku brzinom 400m/s, a izleće iz nje brzinom 350m/s (vidi sliku 3.3.8). Ako se metak kroz dasku kretao 0,1ms, kolika je srednja sila kojom je daska delovala na metak?

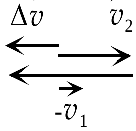
3.3.11.R

$$\Delta p = m\Delta v = 0{,}05\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 500\text{N}$$



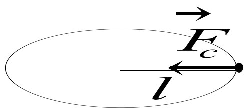
Slika 3.3 7



Slika 3.3 8

3.4 Centripetalna sila. Inercijalne sile. Centrifugalna sila

3.4.1 Telo mase 0.2kg privezano koncem dužine 50cm obrće se u horizontalnoj ravni po kružnoj putanji čineći dva obrtaja u sekundi. Kolika je centripetalna sila?



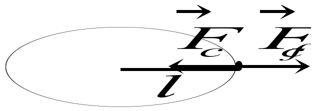
Slika 3.4. 1

3.4.1.R

$$F_c = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2$$

$$F_c = ml\omega^2 = 0{,}2\text{kg} \cdot 0{,}5\text{m} \cdot \left(4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 = 15{,}8\text{N}$$

3.4.2 Tramvaj se kreće brzinom od 18km/h po krivini čiji je prečnik 200m. Kolika inrcijalna sila deluje na putnika čija je masa 60kg? Koliku silu bi "osetio" taj putnik kada bi brzina tramvaja bila dva puta veća?



Slika 3.4. 2

3.4.2.R

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{cf} + \vec{F}_c$$

$$a' = 0$$

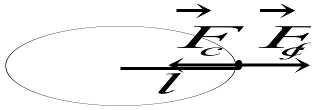
$$0 = \vec{F}_{cf} + \vec{F}_c$$

$$\vec{F}_{cf} = -\vec{F}_c$$

$$F_{cf} = \frac{mv^2}{r} = 15\text{N}$$

$$F_{cf1} = \frac{mv_1^2}{r} = 60\text{N}$$

3.4.3 Telo mase 0,1kg privezano koncem dužine 50cm ravnomerno se obrće u horizontalnoj ravni. Pri kolikom broju obrta u sekundi će konac da se prekine ako do kidanja dolazi pod delovanjem sile od 50N?



Slika 3.4. 3

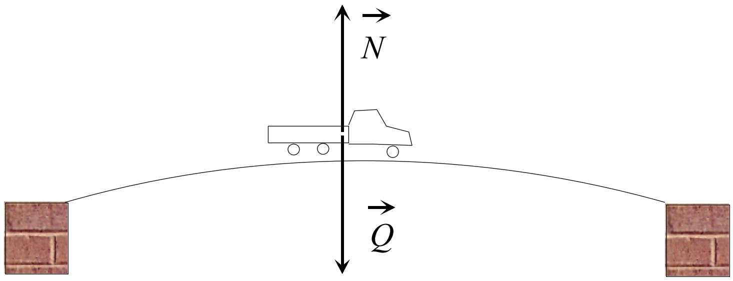
3.4.3.R

$$F_{cf} = mr\omega^2 = mr(2\pi n)^2$$

$$n = \sqrt{\frac{F_{cf}}{mr4\pi^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{F_{cf}}{mr}}$$

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{F_{cf}}{m\ell}} = 5\frac{1}{\mathrm{s}}$$

3.4.4 Kamion mase $4 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$ prelazi preko ispupčenog mosta brzinom 6m/s. Kolikom silom deluje kamion na sredinu mosta ako je radijus krivine mosta 50m?



Slika 3.4. 4

3.4.4.R

$$m\vec{a}_c = m\vec{g} + \vec{N}$$

$$ma_c = mg + N$$

$$N = mg - ma_c$$

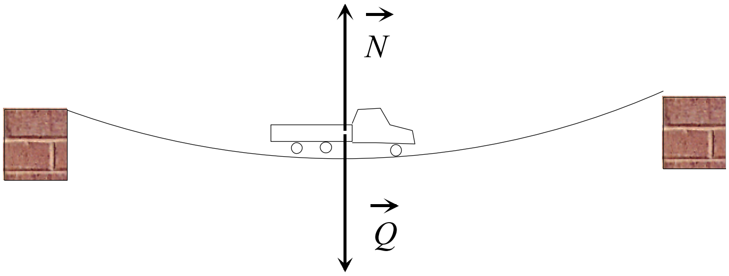
$$N = mg - \frac{mv^2}{r}$$

$$N = m\left(g - \frac{v^2}{r}\right)$$

$$\vec{P} = -\vec{N}$$

$$P = N = 3{,}6 \cdot 10^4\,\mathrm{N}$$

3.4.5 Kamion mase m=2000kg kreće se brzinom $v = 36\frac{\text{km}}{\text{h}}$ po ugnutom mostu. Radijus krivine mosta je R=100m. Kolikom silom F deluje kamion na most prolazeći kroz njegovu sredinu?



Slika 3.4. 5

3.4.5.R

$$m\vec{a}_c = \vec{N} + m\vec{g}$$
$$ma_c = N - mg$$
$$N = mg + ma_c$$
$$N = mg + \frac{mv^2}{R}$$
$$N = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right)$$

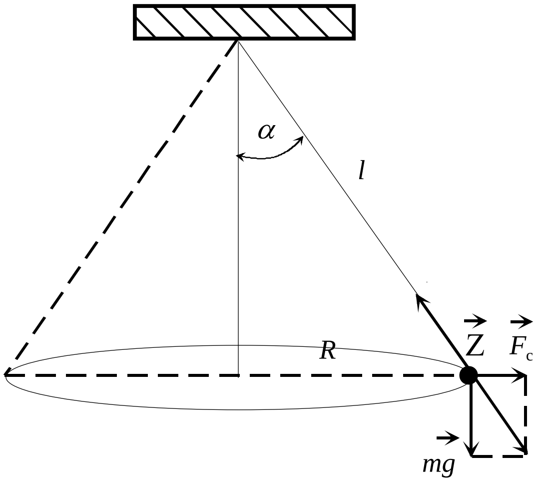
Treći Njutnov zakon

$$F = N$$
$$F = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right) = 21{,}62 \cdot 10^3\,\text{N}$$

3.4.6 Telo mase m=1kg obešeno je o uže dužine l=30 cm zanemarljive mase. Telo rotira po kružnoj putanji u horizontalnoj ravni, pri čemu uže zaklapa ugao α=45° prema vertikali. a) Kolika centrifugalna sila deluje na telo? b) Kolika je periferijska brzina tela? c) Kolika je sila zatezanja užeta?

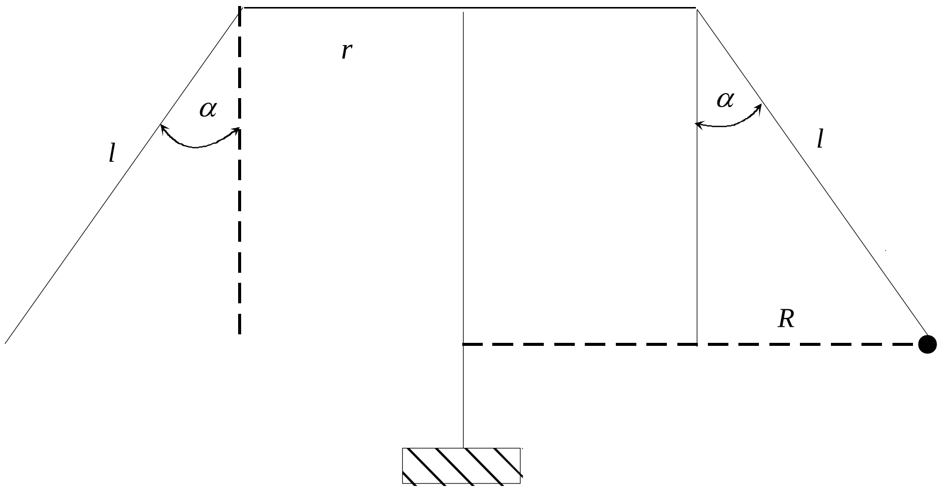
3.4.6.R (Vidi sliku 3.4.6)

$$F_c = Z\sin\alpha$$
$$mg = Z\cos\alpha$$
$$\frac{F_c}{mg} = \text{tg}\alpha$$
$$F_c = mg\,\text{tg}\alpha = 9{,}81\text{N}$$



Slika 3.4. 6

3.4.7 Na horizontalnom kružnom prstenu poluprečnika r=6 m vise stolice sa lancima dužine l=7 m. Ugao otklona lanaca prema osi rotacije u toku rotiranja prstena je α=45° (kao na slici 3.4.7.R). a) Kolika je ugaona brzina prstena? b) Da li će lanci svih stolica, bilo da u njima sedi neko ili ne, imati isti ugao otklona?



Slika 3.4. 7

3.4.7.R

a.

$$R = r + l\sin\alpha$$

$$F_c = Z\sin\alpha$$

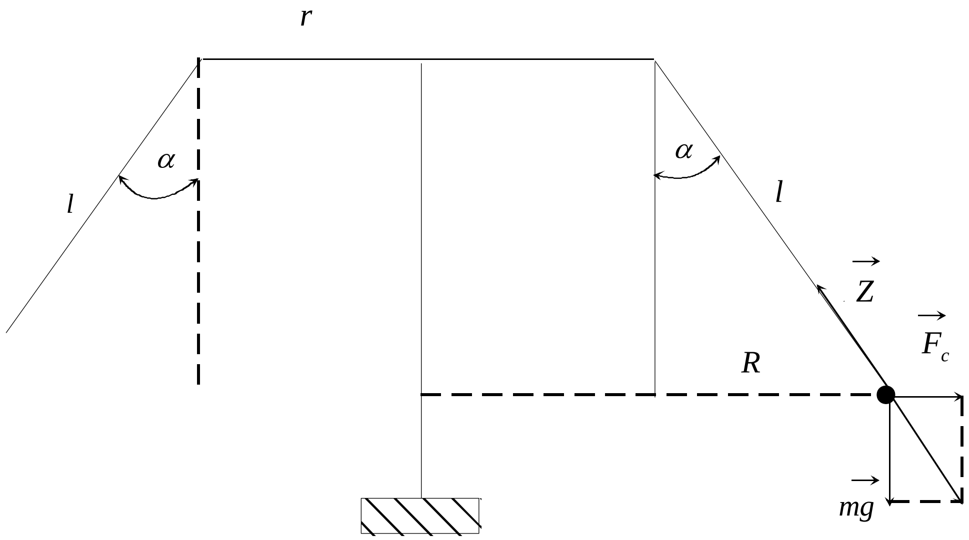
$$mg = Z\cos\alpha$$

$$\frac{F_c}{mg} = \mathrm{tg}\alpha$$

$$\frac{mR\omega^2}{mg} = \mathrm{tg}\alpha$$

$$\omega^2 = \frac{g\,\mathrm{tg}\alpha}{R}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g\,\mathrm{tg}\alpha}{r + l\sin\alpha}} = 0{,}947\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$



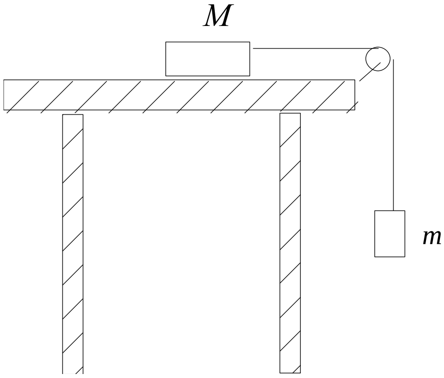
Slika 3.4. 8

b.

Iz relacije $\mathrm{tg}\alpha = \frac{R\omega^2}{g} = \frac{(r + l\sin\alpha)\omega^2}{g}$ ugao otklona ne zavisi od mase pa će ugao otklona svih stolica biti isti.

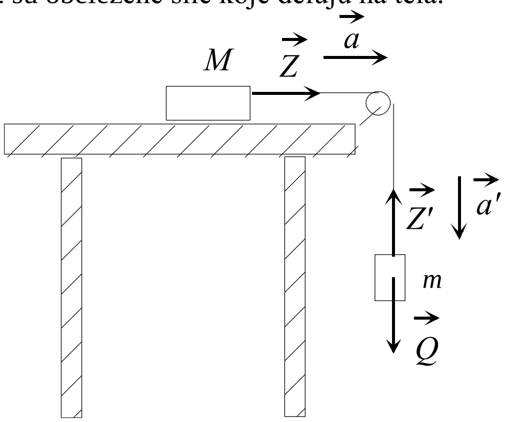
3.5 Osnovna relacija dinamike translacije

3.5.1 Naći ubrzanje sistema tegova (m i M) prikazanih na slici 3.5.1. Konac koji povezuje tegove smatrati neistegljivim i bez mase. Trenje konca o kotur, kao i trenje tela mase M o površinu stola, zanemariti. Naći i sile koje deluju na tegove. Komentarisati slučajeve : $M >> m$ i $M \approx m$.



Slika 3.5. 1

3.5.1.R Na slici 3.5.2 su obeležene sile koje deluju na tela.



Slika 3.5. 2

Jednačina kretanja za telo mase M važi:

$$M\vec{a} = \vec{Z} \quad (3.5.\ 1)$$

odnosno u skalarnom obliku:

$$Ma = Z \quad (3.5.\ 2)$$

Jednačina kretanja za telo mase m:

$$m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{Z} \quad (3.5.\ 3)$$

ili u skalarnom obliku:

$$ma = mg - Z \quad (3.5.\ 4)$$

Sabiranjem jednačina (3.5.2) i (3.5.4) dobijamo:

$$Ma + ma = Z + mg - Z \tag{3.5. 5}$$

$$a(m + M) = mg \tag{3.5. 6}$$

$$a = \frac{m}{m+M} g \tag{3.5. 7}$$

Iz relacije (3.5.1) dobijamo intenzitet sile zatezanja:

$$Z = \frac{mM}{m+M} g \tag{3.5. 8}$$

Specijalni slučajevi

1. $m = M$

$$a = \frac{g}{2} \tag{3.5. 9}$$

$$Z = \frac{mg}{2} \tag{3.5. 10}$$

2. $M >> m$

$$a = \frac{m}{m+M} g \approx \frac{m}{M} g \tag{3.5. 11}$$

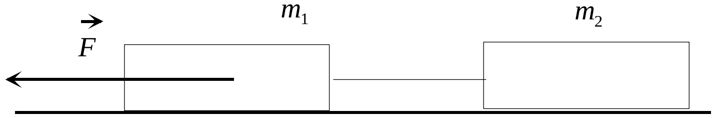
$$Z = \frac{mM}{m+M} g \approx mg \tag{3.5. 12}$$

3. $M << m$

$$a = \frac{m}{m+M} g \approx g \tag{3.5. 13}$$

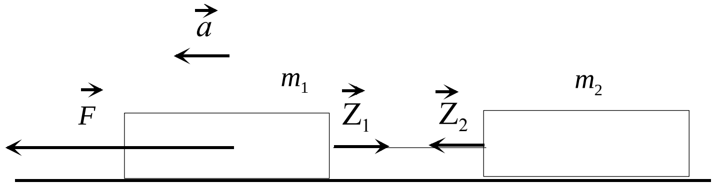
$$Z = \frac{mM}{m+M} g \approx Mg \tag{3.5. 14}$$

3.5.2 Dva tela, masa m_1=50g i m_2=100g, vezana su pomoću niti čija se težina može zanemariti. Kolikom silom treba vući prvo telo da se nit koja izdržava opterećenje Z_{max}=5N ne bi prekinula (pokidala)? Da li će se izmeniti rezultat ako se deluje na drugo telo?



Slika 3.5. 3

3.5.2.R



Slika 3.5. 4

Na slici 3.5.4 su predstavljene sile koje deluju na tela. Jednačina kretanja za telo mase m_1 je:

$$m_1\vec{a} = \vec{F} + \vec{Z}_1 \qquad (3.5.\ 15\ )$$

odnosno u skalarnom obliku:

$$m_1 a = F - Z_1 \qquad (3.5.\ 16\ )$$

Odgovarajuća jednačina za telo mase m_2 je:

$$m_2\vec{a} = \vec{Z}_2 \qquad (3.5.\ 17\ )$$

odnosno u skalarnom obliku:

$$m_2 a = Z_2 \qquad (3.5.\ 18\ )$$

Sabiranjem jednačina (3.5.16) i (3.5.18) imamo:

$$(m_1 + m_2)a = F - Z_1 + Z_1 \qquad (3.5.\ 19\ )$$

odnosno:

$$(m_1 + m_2)a = F \qquad (3.5.\ 20\ )$$

Za ubrzanje dobijamo:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} \qquad (3.5.\ 21\ )$$

Uslov zadatka je:

$$Z \le Z_{max} \qquad (3.5.\ 22\ )$$

Koristeći (3.5.18) dalje pišemo:

$$m_2 a \le Z_{max}, \qquad (3.5.\ 23\ )$$

a uvrštavanjem relacije (3.5.21) dobijamo:

$$m_2 \frac{F}{m_1 + m_2} \le Z_{max}, \qquad (3.5.\ 24\ )$$

odnosno

$$m_2 F \le (m_1 + m_2)Z_{max} \qquad (3.5.\ 25\ )$$

Konačno dobijamo:

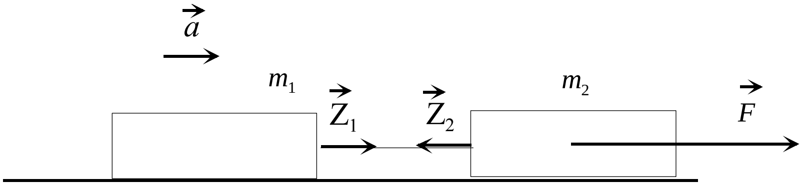
$$F \le \frac{(m_1 + m_2)Z_{max}}{m_2} \qquad (3.5.\ 26\ )$$

i konkretno:

$$F \le 7{,}5\mathrm{N} \qquad (3.5.\ 27\ )$$

b.

Slika 3.5. 5



Slika 3.5. 6

U ovom slučaju jednačina kretanja za telo mase m_2 iznosi:

$$m_2\vec{a} = \vec{F} + \vec{Z}_1 \tag{3.5. 28 }$$

odnosno u skalarnom obliku:

$$m_2 a = F - Z_1 \tag{3.5. 29 }$$

Za telo mase m_1 važi:

$$m_1\vec{a} = \vec{Z}_2 \tag{3.5. 30 }$$

odnosno u skalarnom obliku:

$$m_1 a = Z_2 \tag{3.5. 31 }$$

Sabiranjem (3.5.2.5) i (3.5.2.6) dobijamo:

$$(m_1 + m_2)a = F - Z_1 + Z_1 \tag{3.5. 32 }$$

odnosno:

$$(m_1 + m_2)a = F\ . \tag{3.5. 33 }$$

Za ubrzanje dobijamo:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} \tag{3.5. 34 }$$

Uslov zadatka:

$$Z \le Z_{max} \tag{3.5. 35 }$$

odnosno:

$$m_1 a \le Z_{max} \tag{3.5. 36 }$$

ili

$$m_1 \frac{F}{m_1 + m_2} \le Z_{max}\ . \tag{3.5. 37 }$$

Dalje imamo:

$$m_1 F \le (m_1 + m_2) Z_{max} \tag{3.5. 38 }$$

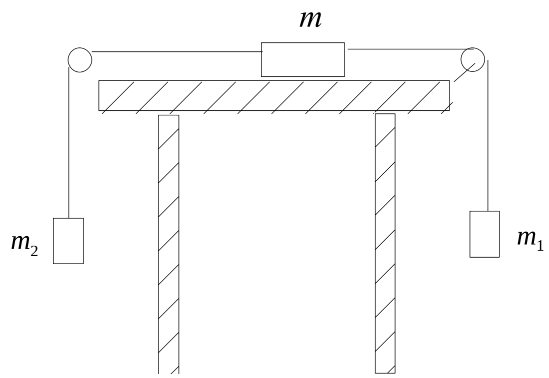
odnosno:

$$F \le \frac{(m_1 + m_2)Z_{max}}{m_1} \qquad (3.5.\ 39)$$

Konačno u ovom slučaju dobijamo:

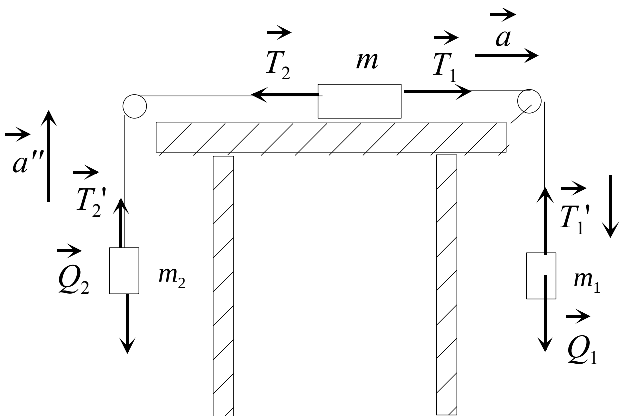
$$F \le 15\text{N} \qquad (3.5.\ 40)$$

3.5.3 Na glatkom stolu leži telo mase m=4kg. Za telo su privezane dve uzice, prebačene preko kotura, učvršćena na suprotnim krajevima stola. Za slobodne krajeve svake uzice privezani su tegovi mase m_1=1kg i m_2=2kg. Izračunati ubrzanje a tela po horizontalnoj površini stola i sile zatezanja u svakoj uzici. Zanemariti trenje i mase koturova.



Slika 3.5. 7

3.5.3.R



Slika 3.5. 8

Pošto je konac neistegljiv važi:

$$a = a' = a'' \qquad (3.5.\ 41)$$

Odgovarajući par sila je jednak:

$$T_1 = T_1', \qquad (3.5.\ 42)$$

odnosno:

$$T_2 = T_2' . \quad (3.5.43)$$

Za telo mase m_1 važi:

$$m_1\vec{a}' = m_1\vec{g} + \vec{T}_1' \quad (3.5.44)$$

odnosno

$$m_1 a = m_1 g - T_1 \quad (3.5.45)$$

Za telo mase m_2 važi:

$$m_2\vec{a}'' = m_2\vec{g} + \vec{T}_2'' \quad (3.5.46)$$

odnosno:

$$m_2 a = T_2 - m_2 g \quad (3.5.47)$$

Za telo mase m važi:

$$m\vec{a} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 \quad (3.5.48)$$

odnosno:

$$ma = T_1 - T_2 \quad (3.5.49)$$

Sabiranjem jednačina (3.5.45), (3.5.476) i (3.5.49) dobijamo:

$$m_1 a + m_2 a + ma = m_1 g - T_1 + T_2 - m_2 g + T_1 - T_2 \quad (3.5.50)$$

odnosno

$$a(m_1 + m_2 + m) = m_1 g - m_2 g \quad (3.5.51)$$

ili

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m} g \quad (3.5.52)$$

Iz (3.5.45) dobijamo:

$$T_1 = m_1 g - m_1 a \quad (3.5.53)$$

odnosno:

$$T_1 = \frac{m + 2m_2}{m_1 + m_2 + m} m_1 g = 11{,}2\text{N} \quad (3.5.54)$$

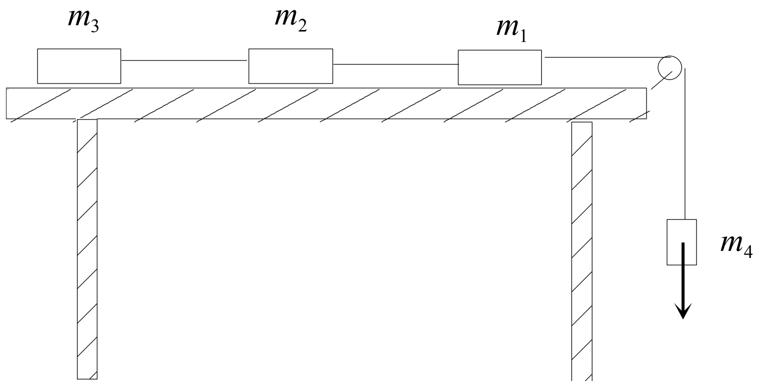
Iz (3.5.47) imamo:

$$T_2 = m_2 g + m_2 a \quad (3.5.55)$$

odnosno:

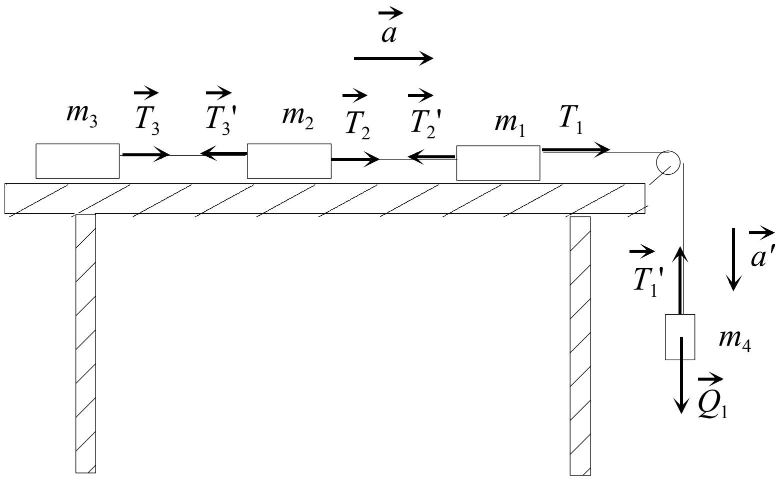
$$T_2 = \frac{m + 2m_1}{m_1 + m_2 + m} m_2 g = 16{,}8\text{N} \quad (3.5.56)$$

3.5.4 Na glatkoj horizontalnoj površini postavljena su tri tela, masa: m_1, m_2 i m_3, vezana nitima jedno s drugim, kao što pokazuje slika. Za telo mase m₁ privezano je četvrto telo pomoću niti koja je prebačena preko kotura. Naći intenzitet ubrzanja a sistema tela i intenzitet sila zatezanja svih niti T_1, T_2 i T_3. Niti smatrati nerastegljivim i zanemarljive mase. Sile trenja takođe treba zanemariti.



Slika 3.5. 9

3.5.4.R



Slika 3.5. 10

Na slici 3.5.10 su predstavljene sile koje deluju na tela.

Jednačina kretanja za telo mase m_4:

$$m_4\vec{a}' = m_4\vec{g} + \vec{T}_1' \tag{3.5. 57 }$$

odnosno:

$$m_4 a = m_4 g - T_1 \tag{3.5. 58 }$$

Za telo mase m_1:

$$m_1\vec{a} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2' \tag{3.5. 59 }$$

odnosno:

$$m_1 a = T_1 - T_2 \tag{3.5. 60 }$$

Za telo mase m_2:

$$m_2\vec{a} = \vec{T}_2 + \vec{T}_3' \tag{3.5. 61 }$$

odnosno:

$$m_2 a = T_2 - T_3 \quad (3.5.\ 62\ )$$

Za telo mase m3:

$$m_3 \vec{a} = \vec{T}_3 \quad (3.5.\ 63\ )$$

odnosno:

$$m_3 a = T_3 \quad (3.5.\ 64\ )$$

Sabiranjem jednačina (3.5.58), (3.5.60), (3.5.62) i (3.5.64) dobijamo:

$$m_1 a + m_2 a + m_3 a + m_4 a = m_4 g - T_1 + T_1 - T_2 + T_2 - T_3 + T_3 \quad (3.5.\ 65\ )$$

odnosno:

$$a(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) = m_4 g \quad (3.5.\ 66\ )$$

ili

$$a = \frac{m_4 g}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \quad (3.5.\ 67\ )$$

Za sile zatezanja dobijamo:

$$T_1 = m_4 g - m_4 a = m_4 g \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \quad (3.5.\ 68\ )$$

odnosno

$$T_2 = T_1 - m_1 a = m_4 g \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \quad (3.5.\ 69\ )$$

ili

$$T_3 = m_3 a = m_4 g \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \quad (3.5.\ 70\ )$$

3.5.5 Na krajevima konca, prebačenog preko kotura, obešena su tela mase m_1=50g i m_2=75g. Zanemarujući trenje i težinu kotura i smatrajući da je konac nerastegljiv, odrediti ubrzanje kojim će se kretati sistem tela, silu zatezanja konca i težinu koju će pokazivati dinamometar o koji je okačen kotur (vidi sliku 3.5.11).

3.5.5.R

Na slici 3.5.12 su predstavljene sile koje deluju na tela. Možemo pisati:

$$T_1 = T_1' , \quad (3.5.\ 71\ )$$

takođe

$$T_2 = T_2', \quad (3.5.\ 72\ )$$

i ako je masa kotura zanemarljiva:

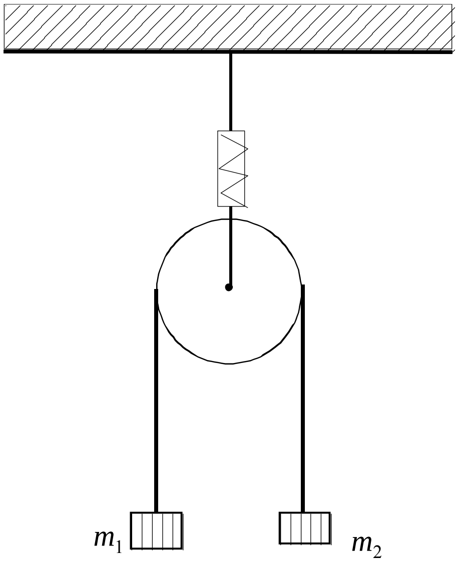
$$T_1 = T_2 = T \quad (3.5.\ 73\ )$$

Jednačina kretanja za telo mase m_1 važi:

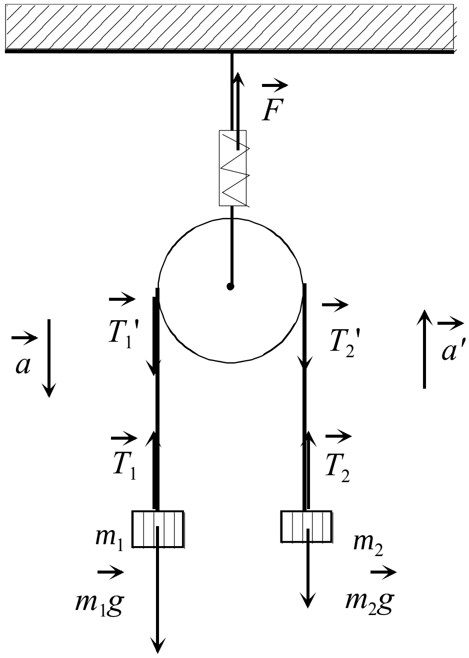
$$m_1 a = m_1 g - T , \quad (3.5.\ 74\ )$$

dok za telo mase m_2 važi:

$$m_2 a = T - m_2 g \tag{3.5. 75 }$$



Slika 3.5. 11



Slika 3.5. 12

Sabiranjem jednačina (3.5.74) i (3.5.75) imamo:

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 - m_2)g \tag{3.5. 76 }$$

odnosno za ubrzanje dobijamo:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g = -1{,}96 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{3.5. 77 }$$

Sila zatezanja iznosi:

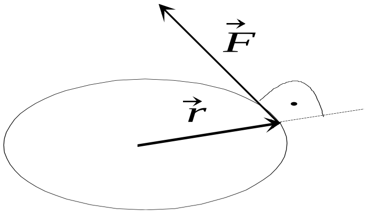
$$T = m_1 g - m_1 a = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = 0{,}6\mathrm{N} \tag{3.5. 78 }$$

Težina koju pokazuje dinamometar je:

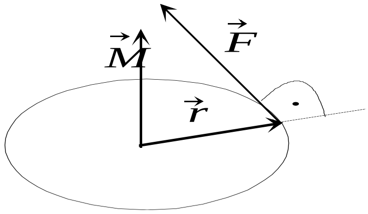
$$F = 2T = 1{,}2\mathrm{N} \tag{3.5. 79 }$$

3.6 Moment sile. Statika

3.6.1 Točak poluprečnika 20cm može da rotira oko svoje ose. Na obod točka deluje tangencijalna sila inteniteta 30N. Koliki je moment sile? Nacrtaj vektor momenta sile na slici 3.6.1.1.



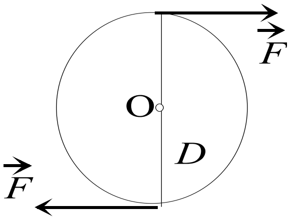
Slika 3.6. 1



Slika 3.6. 2

3.6.1.R
$M = rF = 6\text{Nm}$

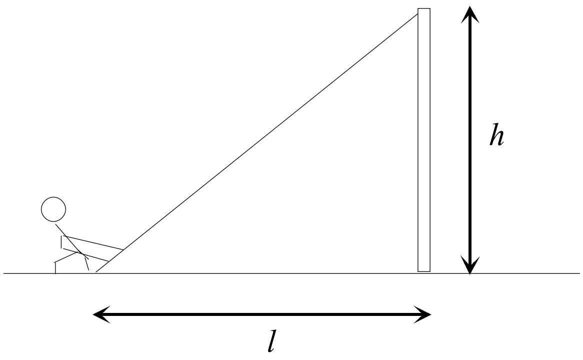
3.6.2 Spreg sila, intenziteta F=100N, prikazan je na slici. Ako prečnik cilindra, na koji deluje ovaj spreg sila, iznosi D =0,25 m, izračunati intenzitet momenta M sprega ovih sila.



Slika 3.6. 3

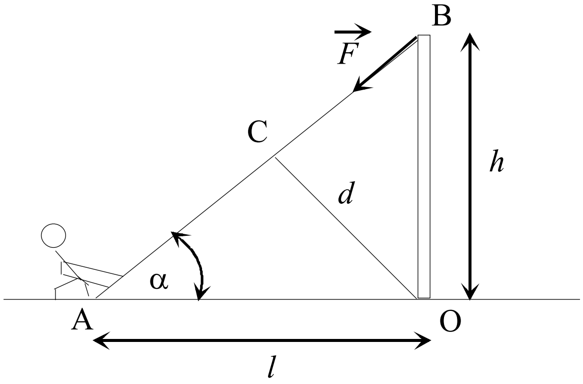
.6.2.R $M = DF = 25\text{Nm}$

3.6.3 Drveni stub, visine h=8 m, obara se na način prikazan na slici. Ako se na vrh stuba deluje silom intenziteta F=600 N, kolikim se momentom deluje na stub?



Slika 3.6. 4

3.6.3.R Ako na vrh stuba deluje sila intenziteta F = 600 N, onda je krak te sile u odnosu na podnožje stuba O $l = h\cos\alpha$ a njen moment je $M = lF\cos\alpha$



Slika 3.6. 5

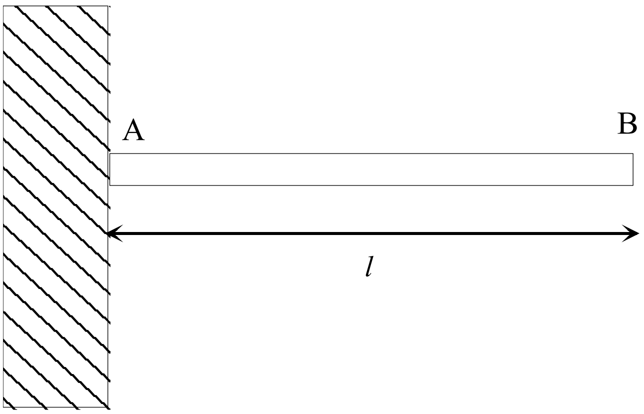
Iz pravouglog trougla AOB čija je hipotenuza $AB = \sqrt{h^2 + l^2}$, dobija se da je

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{h^2 + l^2}}$$

pa je

$$M = \frac{Fl^2}{\sqrt{h^2 + l^2}} = 4{,}7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Nm}$$

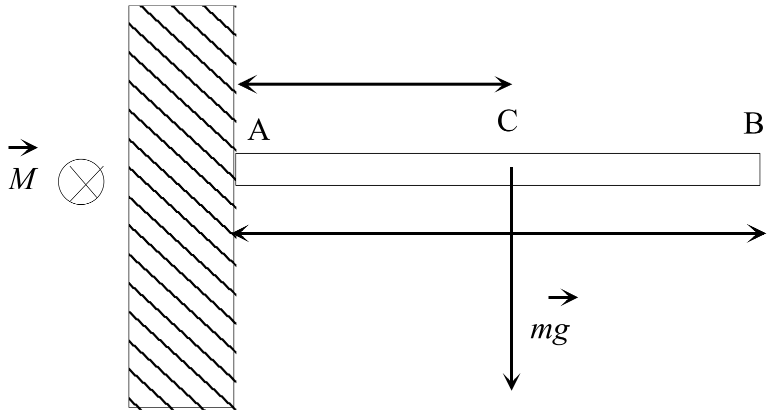
3.6.4 Homogena greda AB, dužine l=2 m i mase m=30 kg, ukleštena je jednim krajem u vertikalni zid. Kolikim sopstvenim momentom ova greda opterećuje zid u mestu ukleštenja A? Nacrtati vektor ovog momenta.



Slika 3.6. 6

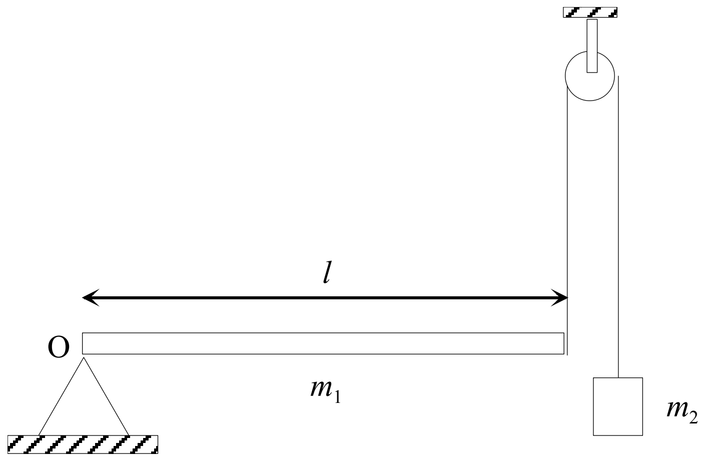
3.6.4.R Pošto se težište grede nalazi na polovini njene dužine, intenzitet momenta sile teže kojim ona opterećuje zid biće:

$$M = \frac{l}{2}mg = 294\text{Nm}$$



Slika 3.6. 7

3.6.5 Koliki je rezultujući moment sila koje deluju na gredu, prikazanu na slici, u odnosu na oslonac O? Greda je homogena, dužine l=2 m i mase m_1=12kg, dok masa tega, koji visi o užetu, iznosi m_2=20 kg.



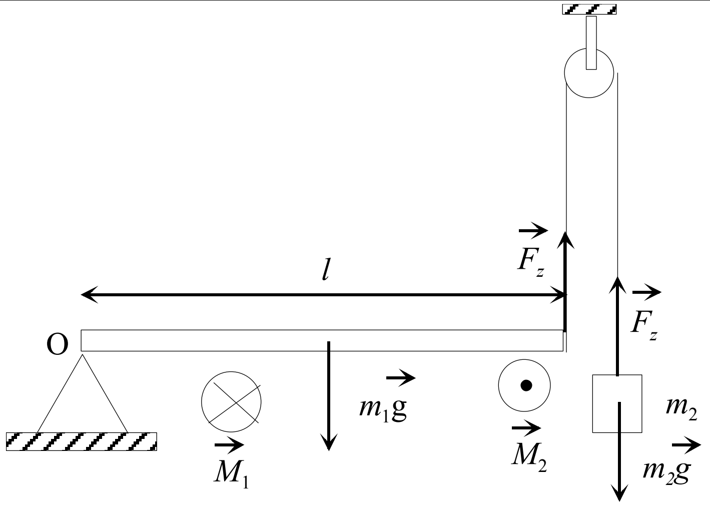
Slika 3.6. 8

3.6.5.R Na gredu deluje moment sile teže $m_1\vec{g}$, čiji je intenzitet

$$M_1 = \frac{l}{2}m_1 g$$

i moment sile zatezanja užeta $\vec{F}_Z$, čiji je intenzitet

$$M_2 = lm_2 g$$



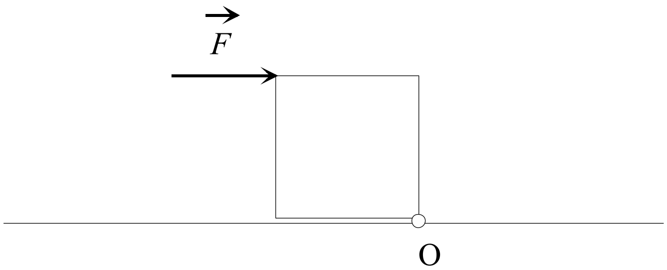
Slika 3.6. 9

Pošto su momenti $\vec{M}_1$ i $\vec{M}_2$ istih pravaca a suprotnih smerova, to je intenzitet rezultujućeg momenta

$$M = M_2 - M_1 = gl\left(m_2 - \frac{m_1}{2}\right) = 274{,}7\text{mN}$$

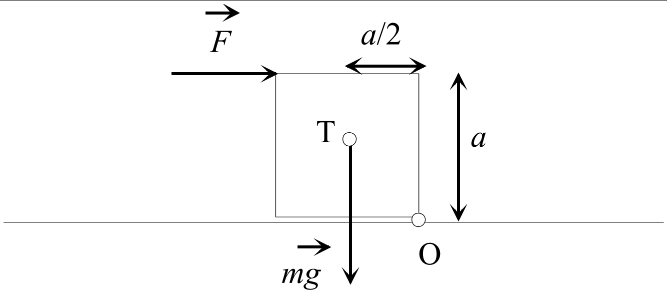
Smer momenta M je isti kao i momenta M_2.

3.6.6 Kolikom najmanjom horizontalnom silom je potrebno delovati na kocku, mase m=100kg, da bi se ona prevrnula? Da li se dejstvom neke druge, manje sile, ova kocka može prevrnuti?



Slika 3.6. 10

2.6.6.R Da bi se kocka prevrnula oko ose O, potrebno je da intenzitet momenta sile F u odnosu na osu O bude veći ili, u krajnjem slučaju, jednak intenzitetu momenta sile teže $\vec{P} = m\vec{g}$ u odnosu na istu osu. Dakle, potrebno je da se ostvari uslov $M_F \geq M_Q$, tj. $aF \geq \frac{a}{2}mg$



Slika 3.6. 11

Minimalna vrednost intenziteta sile F odgovara znaku jednakosti u prethodnom izrazu, iz koga se nalazi da je

$$F_{min} = \frac{mg}{2} = 490{,}5\text{N}$$

Lako se može zaključiti da je na kocku u daljim fazama obrtanja potrebno delovati sve manjom i manjom silom, a u krajnjem slučaju, kada se težište kocke T nađe iznad ose obrtanja, ta sila je jednaka nuli. Kocka će dalje sama da se obrće pod dejstvom momenta $\vec{M}_Q$

3.6.7 Na telo mase m=5kg deluju dve sile istog intenziteta $F_1=F_2$=10N. Sile imaju iste napadne tačke.

a. Odrediti intenzitet rezultante i ubrzanje tela ako sile imaju iste pravce a suprotne smerove.

b. Naći intenzitet rezultante i ubrzanje tela ako sile imaju iste pravce i smerove.

3.6.7.R

a. $R = F_1 - F_2 = 0 \qquad a = 0$

b. $R = F_1 + F_2 = 20\text{N} \quad a = \dfrac{R}{m} = 4\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$

3.6.8 Na telo mase m=10kg deluju dve sile sa istom napadnom tačkom pod uglom od 90°. Rezultanta tih sila ima intenzitet R=15N. Ako intenzitet jedne od tih sila F_1=9N, naći intenzitet druge sile F_2 i ubrzanje tela. Kako bi trebalo da deluje sila F_3 da bi telo bilo u ravnoteži i koliki bi morao biti intenzitet te sile u ovom slučaju?

3.6.8.R

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2$$

$$F_2 = \sqrt{R^2 - F_1^2} = 12\text{N}$$

$$a = \frac{R}{m} = 1{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Da bi telo mirovalo potrebno je da je $F_3 = R$, da deluje u istom pravcu a suprotnom smeru od rezultujuće sile R.

3.6.9 Dve paralelne sile F_1=100N i F_2=200N deluju na telo u tačkama A i B koje su na rastojanju 2m.

a. Kolika je rezultanta tih sila?

b. Naći položaj napadne tačke rezultante.

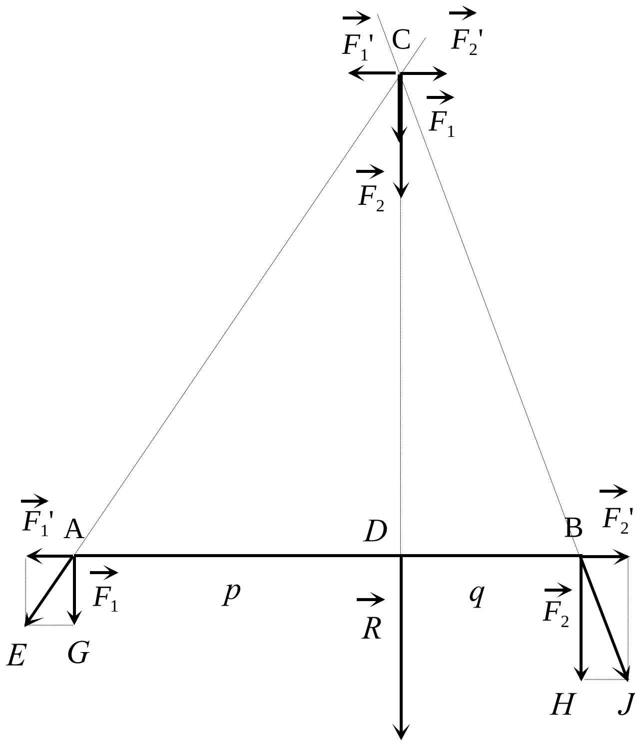
3.6.9.R

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$R = F_1 + F_2 = 300\text{N}$$

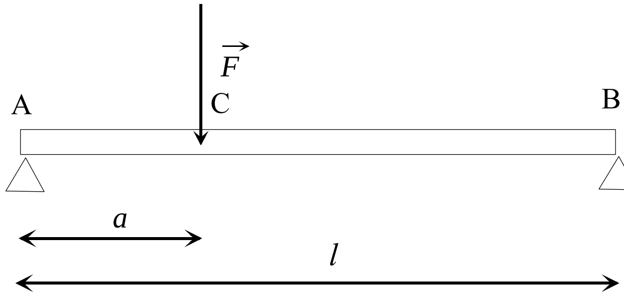
$$q = \overline{AB}\frac{F_1}{R} = 0{,}67\text{m}$$

$$p = \overline{AB}\frac{F_2}{R} = 1{,}33\text{m}$$



Slika 3.6. 12

3.6.10 Greda, dužine l, čija se masa može zanemariti, leži na dva oslonca A i B, kao na slici. U tački C, na rastojanju *a* od oslonca A, na gredu deluje sila *F*. Naći sile reakcija na gredu.



Slika 3.6. 13

3.6.10.R

Uslovi mirovanja grede:

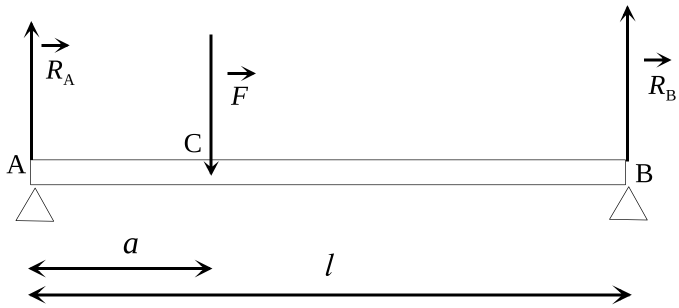
$$R_A + R_B - F = 0 \qquad (3.6.\ 1\ )$$

i

$$Fa - R_B l = 0 \qquad (3.6.\ 2\ )$$

odnosno:

$$R_B = F\frac{a}{l} \qquad (3.6.\ 3\ )$$



Slika 3.6. 14

Uvrštavanjem R_{B} iz (3.6.3) u (3.6.1) dobijamo:

$$R_A + F\frac{a}{l} - F = 0 \qquad (3.6.\ 4\ )$$

odnosno:

$$R_A = F\left(1 - \frac{a}{l}\right) \qquad (3.6.\ 5\ )$$

Slično dobijamo:

$$R_A = F\frac{l-a}{l} \qquad (3.6.\ 6\ )$$

3.7 Moment inercije

3.7.1 Na krajevima lakog štapa (masa štapa je zanemarljiva) dužine 40cm učvršćene su dve kuglice masa 10g i 20g. Koliki je moment inercije tog sistema u odnosu na osu koja prolazi kroz sredinu štapa i normalna je na njega?

3.7.1.R

$$I = m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2 = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\,\text{kgm}^2$$

3.7.2 Na krajevima štapa mase 10g i dužine 40cm učvršćene su dve kuglice masa 10g i 20g. Koliki je moment inercije tog sistema u odnosu na osu koja prolazi kroz sredinu štapa i normalna je na njega?

3.7.2.R

$$I = \frac{1}{12}ml^2 + m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2 = 1{,}33 \cdot 10^{-3}\,\text{kgm}^2$$

3.7.3 Na krajevima štapa mase 20g i dužine 1m učvršćene su dve kuglice masa po 40g. Koliki je moment inercije ovog sistema u odnosu na osu koja prolazi kroz sredinu štapa i normalna je na njega?

3.7.3.R

$$I = \frac{1}{12}ml^2 + 2m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 = 21{,}7 \cdot 10^{-3}\,\text{kgm}^2$$

3.7.4 Naći moment inercije tankog prstena mase 100g i poluprečnika 10cm u odnosu na osu koja prolazi kroz centar prstena i normalna je na ravan prstena.

3.7.4.R

$$I = mR^2 = 0{,}001\,\text{kgm}^2$$

3.7.5 Koliki je moment inercije, u odnosu na težišnu osu, homogene pune lopte čiji je poluprečnik R=0,3m? Lopta je načinjena od metala gustine ρ=8300kg/m^3.

3.7.5.R Moment inercije lopte u odnosu na osu koja prolazi kroz njen centar mase je

$$I = \frac{2}{5}mR^2 = \frac{2}{5}\rho VR^2 = \frac{8}{15}\rho R^5\pi = 34\,\text{kgm}^2$$

3.7.6 Smatrajući da je Zemlja homogena puna lopta, srednje gustine ρ=5 500kg/m^3, i da je ubrzanje Zemljine teže na njenoj površini g=9,81 m/s^2, izračunati moment inercije Zemlje. Gravitaciona konstanta iznosi γ=6,67·10^{-11} Nm^2/kg^2.

3.7.6.R Imajući u vidu da se može uzeti da je intenzitet sile teže mg jednak intenzitetu gravitacione sile kojom Zemlja deluje na telo $\gamma\dfrac{mM}{R^2}$ (ako se zanemare efekti rotacije Zemlje), tj. da je $mg=\gamma\dfrac{mM}{R^2}$, gde je R - poluprečnik Zemlje, M - njena masa, nalazi se da je ona

$$M=\frac{gR^2}{\gamma}, \tag{3.7. 1 }$$

pa je moment inercije Zemlje kao lopte:

$$I=\frac{2}{5}MR^2=\frac{2}{5}\frac{gR^4}{\gamma} \tag{3.7. 2 }$$

Poluprečnik Zemlje dobijamo iz relacije (3.7.1):

$$R^2=\frac{M\gamma}{g} \tag{3.7. 3 }$$

odnosno:

$$R^2=\frac{\rho\frac{4}{3}R^3\pi\gamma}{g} \tag{3.7. 4 }$$

ili

$$R=\frac{3g}{4\rho\pi\gamma} \tag{3.7. 5 }$$

Uvrštavanjem dobijenog izraza za poluprečnik u relaciju (3.7.2) dobijamo:

$$I=9{,}7\cdot10^{37}\,\mathrm{kgm}^2 \tag{3.7. 6 }$$

3.7.7 Valjak, dužine l=25 cm i poluprečnika r=10 cm, načinjen je od gvožđa čija je gustina ρ=7 600 kg/m^3. Koliki je njegov moment inercije za težišnu osu koja se poklapa sa osom valjka?

3.7.7.R Moment inercije valjka za ovu osu iznosi:

$$I=\frac{1}{2}mR^2$$

Masu valjka možemo izraziti na sledeći način:

$$m=\rho V=\rho Sl=\rho R^2\pi l$$

pa je

$$I = \frac{1}{2}\rho R^2 \pi l R^2 = \frac{1}{2}\rho R^4 \pi l = 0{,}3\text{kgm}^2$$

3.8 Moment impulsa

3.8.1 Kuglica mase 10g rotira po krugu poluprečnika 10cm stalnim intenzitetom brzine 2m/s. Koliki je moment impulsa kuglice?

3.8.1.R Iz definicije momenta impulsa:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

odnosno u skalarnom obliku:

$$L = rp\, sin\, 90^0$$

dobijamo:

$$L = rp = rmv = 2 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

3.8.2 Valjak mase 1 kg i poluprečnika 10 cm rotira oko svoje ose ugaonom brzinom 3 rad/s. Koliki je moment impulsa valjka?

3.8.2.R

Iz definicije momenta impulsa:

$$L = I\omega = \frac{1}{2} m r^2 \omega$$

dobijamo:

$$L = 15 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

3.8.3 Naći moment inercije i moment impulsa Zemlje pri sopstvenoj rotaciji(oko svoje ose). Zemlju smatrati homogenom loptom poluprečnika 6370km i mase $5{,}96 \cdot 10^{24}$kg.

3.8.3.R Moment inercije lopte iznosi:

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

odnosno, dobijamo:

$$I = 9{,}7 \cdot 10^{37}\,\text{kgm}^2$$

Moment impulsa iznosi:

$$L = I\omega = I\frac{2\pi}{T};\; L = 3 \cdot 10^{33}\,\text{kg}\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

3.8.4 Zamajac momenta inercije 70kgm^2 treba zarotirati iz mirovanja do ugaone brzine 30rad/s za vreme od 10s. Koliki moment sile je potreban za to?

3.8.4.R

Po definiciji dobijamo:

$$M = I\alpha = I\frac{\omega_2 - \omega_1}{t} = I\frac{\omega}{t} = 210\text{Nm}$$

3.8.5 Zamajac momenta inercije 50kgm^2 rotira ugaonom brzinom od 30 rad/s. Kolikim momentom sile treba delovati na njega da bi se zaustavio posle 50 obrtaja?

3.8.5.R

Po definiciji za moment sile dobijamo, imajući u vidu da je reč o jednoliko ubrzanom rotacionom kretanju:

$$M = I\alpha = I\frac{\omega_0^2}{2\theta} = 71{,}6\text{Nm}$$

Imali smo u vidu takođe $1\text{obr} = 2\pi\text{rad}$.

3.8.6 Na obod diska mase 50kg i poluprečnika 0,5m počne da deluje tangencijalna sila 100N. Posle koliko vremena od početka kretanja će disk imati frekvenciju od 100s^{-1}?

3.8.6.R

Iz osnovne relacije dinamike rotacije $M = I\alpha$ imamo

$$Fr = \frac{1}{2}mr^2\frac{\omega}{t}$$

odnosno

$$F = \frac{1}{2}mr\frac{2\pi\nu}{t}$$

odakle dobijamo:

$$t = \frac{mr\pi\nu}{F} = 78{,}5\text{s}$$

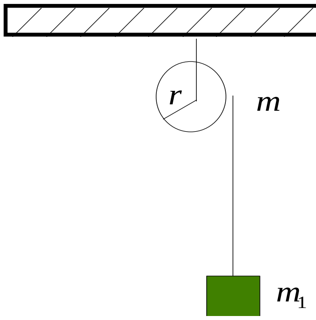
3.8.7 Zamajac momenta inercije 245kgm^2 rotira učestanošću 20s^{-1}. Nakon 1min od prestanka delovanja momenta sile koji je dovodio do rotacije, zamajac se zaustavi. Naći moment sile trenja i broj obrtaja zamajca do zaustavljanja.

3.8.7.R

$$M = I\frac{2\pi\nu_0}{t} = 513\text{Nm};\ \theta = \frac{\omega_0^2}{2\alpha} = \frac{(2\pi\nu)^2}{2\frac{2\pi\nu}{t}} = \pi\nu t = 3768\text{rad};\ N = \frac{\theta}{2\pi} = 600$$

3.9 Osnovna relacija dinamike rotacije

3.9.1 Na vratilo mase 20 kg i poluprečnika 20cm namotana je laka neistegljiva nit na kojoj visi teg mase 1 kg. Tag se pusti da pada. Naći linearno ubrzanje tega, ugaono ubrzanje rotacije valjka i silu zatezanja niti. Nit ne proklizava preko vratila. Moment inercije vratila je $I = \frac{1}{2}mr^2$



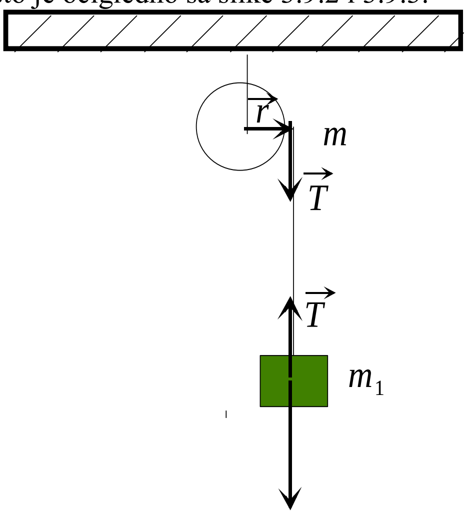
Slika 3.9. 1

3.9.1.R

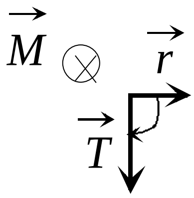
Iz osnovne relacije dinamike rotacije $I\alpha = M$ imamo:

$$\frac{1}{2}mr^2\alpha = Tr \tag{3.9. 1 }$$

što je očigledno sa slike 3.9.2 i 3.9.3.



Slika 3.9. 2



Slika 3.9. 3

Dalje imamo:

$$\frac{1}{2}mr\alpha = T \tag{3.9. 2 }$$

U tački dodira niti o kotur važi:

$$a_\tau = a \tag{3.9. 3 }$$

tako da relaciju (3.9.3) možemo napisati u obliku:

$$\frac{1}{2} m r \frac{a}{r} = T \tag{3.9. 4 }$$

odnosno

$$\frac{1}{2} m a = T \tag{3.9. 5 }$$

Na osnovu osnovne relacije dinamike translacije za teg možemo pisati:

$$m_1 \vec{a} = m_1 \vec{g} + \vec{T} \tag{3.9. 6 }$$

ili u skalarnom obliku:

$$m_1 a = m_1 g - T \tag{3.9. 7 }$$

Uvrštavanjem sile zatezanja iz (3.9.6) u prethodnu relaciju dobijamo:

$$m_1 a = m_1 g - \frac{1}{2} m a . \tag{3.9. 8 }$$

Konačno za ubrzanje tela dobijamo:

$$a = \frac{m_1 g}{m_1 + \frac{1}{2} m} = 1{,}67 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{3.9. 9 }$$

Ugaono ubrzanje iznosi:

$$\alpha = \frac{a}{r} = 11{,}1 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2} \tag{3.9. 10 }$$

3.9.2 Preko kotura poluprečnika 14,5 cm, mase m=80g prebačena je tanka nit za čije slobodne krajeve su pričvrćeni tegovi masa m_1=200g i m_2=100g. Koliko će biti linearno ubrzanje tegova, ugaono ubrzanje kotura i kolike su sile zatezanja?

3.9.2.R Pošto je konac neistegljiv važi:

$$a = a' \tag{3.9. 11 }$$

Takođe u ovom slučaju važi:

$$F_1 = F_1' \tag{3.9. 12 }$$

i

$$F_2 = F_2' \tag{3.9. 13 }$$

Iz jednačine dinamike translacije za tegove važi:

$$m_1 \vec{a} = \vec{Q}_1 + \vec{F}_1 \tag{3.9. 14 }$$

odnosno u skalarnom obliku:

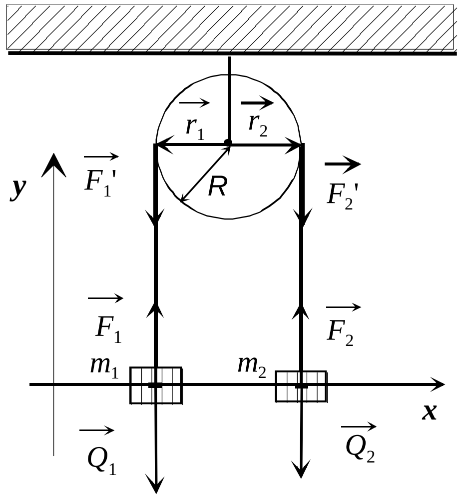
$$m_1 a = Q_1 - F_1 \tag{3.9. 15 }$$

ili

$$m_1 a = m_1 g - F_1 \tag{3.9. 16 }$$

odnosno

$$F_1 = m_1 g - m_1 a \tag{3.9. 17 }$$



Slika 3.9.4

Za drugi teg važi:

$$m_2 \vec{a} = \vec{Q}_2 + \vec{F}_2 \tag{3.9. 18 }$$

odnosno u skalarnom obliku:

$$m_2 a = F_2 - Q_2 \tag{3.9. 19 }$$

ili

$$m_2 a = F_2 - m_2 g \tag{3.9. 20 }$$

odnosno

$$F_2 = m_2 a + m_2 g \tag{3.9. 21 }$$

Oduzmimo jednačine (3.9.17) i (3.9.21) dobijamo:

$$F_1 - F_2 = (m_1 - m_2)g - (m_2 + m_1)a \tag{3.9. 22 }$$

Iz osnovne jednačine dinamike rotacije $I\alpha = M$ sledi:

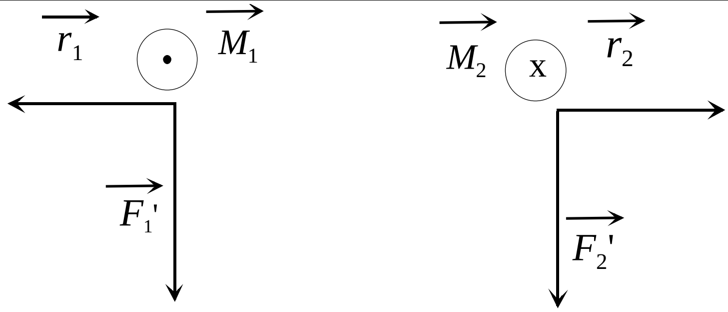
$$\frac{1}{2} m r^2 \frac{a}{r} = (F_1 - F_2) r \tag{3.9. 23 }$$

odnosno

$$m a = 2(F_1 - F_2) \tag{3.9. 24 }$$

ili

$$F_1 - F_2 = \frac{m a}{2} \tag{3.9. 25 }$$



Slika 3.9. 4

Uvrštavanjem (3.9.25) u (3.9.22) dobijamo:

$$\frac{ma}{2} = (m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a \tag{3.9. 26}$$

odnosno:

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{m}{2}\right)a = (m_1 - m_2)g \tag{3.9. 27}$$

ili

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} g = 2{,}9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \tag{3.9. 28}$$

Ovo ubrzanje je tangencijalno ubrzanje za kotur pa dalje imamo:

$$\alpha = \frac{a}{r} = \frac{m_1 - m_2}{r \cdot (m_1 + m_2 + \frac{m}{2})} g = 0{,}002 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \tag{3.9. 29}$$

Za sile zatezanja dobijamo:

$$F_1 = m_1 g - m_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} g = \frac{2m_2 + \frac{m}{2}}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} m_1 g = 1412\text{N} \tag{3.9. 30}$$

i

$$F_2 = m_2 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} g + m_2 g = \frac{2m_1 + \frac{m}{2}}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} m_2 g = 1294\text{N} \tag{3.9. 31}$$

3.10 Mehanička energija

3.10.1 Telo mase 3kg kreće se sa ubrzanjem 2m/s^2 bez početne brzine. Kolika je njegova kinetička energija posle 2s?

3.10.1.R

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \tag{3.10. 1 }$$

$$v = at \tag{3.10. 2 }$$

$$E_k = \frac{mat^2}{2} = 24\text{J} \tag{3.10. 3 }$$

3.10.2 Koliki je impuls tela mase 1kg ako je njegova kinetička energija 8J?

3.10.2.R

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \tag{3.10. 4 }$$

$$E_k = \frac{p^2}{2m} \tag{3.10. 5 }$$

$$p = \sqrt{2mE_k} = 4\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{3.10. 6 }$$

3.10.3 Koliki rad je potrebno izvršiti da bi se opruga, konstante elastičnosti k=500N/m, koja je rastegnuta za 4cm, dopunski rastegla za Δx=10cm?

3.10.3.R

$$A + \Delta A = \frac{1}{2}k(x + \Delta x)^2 \tag{3.10. 7 }$$

$$\Delta A = kx\Delta x + \frac{1}{2}k\Delta x^2 = 12{,}5\text{J}\,. \tag{3.10. 8 }$$

3.10.4 Telo mase 1kg bačeno je vertikalno naviše brzinom 15m/s. Kolika je kinetička energija tela posle 1s?

3.10.4.R

$$E_k = \frac{mv^2}{2}\,. \tag{3.10. 9 }$$

$$v = v_0 - gt\,. \tag{3.10. 10}$$

$$E_k = \frac{m(v_0 - gt)^2}{2} = 12{,}5\,\mathrm{J}\,. \tag{3.10. 11}$$

3.10.5 Teniska lopta koja se kreće brzinom v_1=15 m/s, vrati se udarom reketa u suprotnom smeru brzinom v_2=20 m/s. Odrediti promenu količine kretanja teniske lopte, ako je promena njene kinetičke energije 8,75 J.

3.10.5.R

$$\Delta p = p_2 - p_1 = -mv_2 - mv_1 = -m(v_2 + v_1)\,. \tag{3.10. 12}$$

$$\Delta E_k = \frac{m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right). \tag{3.10. 13}$$

$$\Delta E_k = \frac{m}{2}(v_2 - v_1)(v_2 + v_1)\,. \tag{3.10. 14}$$

iz ove jednačine možemo dobiti

$$m(v_2 + v_1) = \frac{2\Delta E_k}{v_2 - v_1}\,. \tag{3.10. 15}$$

Upoređujući jednačine (3.10.12) i (3.10.15) dobijamo

$$\Delta p = -\frac{2\Delta E_k}{v_2 - v_1} = -3{,}5\,\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}}\,. \tag{3.10. 16}$$

Znak “-“ je zbog toga što uzimamo da je impuls pri udaru pozitivnog, a pri odbijanju negativnog znaka.

3.11 Rad i snaga

3.11.1 Pod dejstvom sile 10 N telo se kreće ubrzanjem 1 m/s^2. Koliki rad izvrši ta sila za 2s ako ona deluje u pravcu puta i trenje je zanemarljivo?

3.11.1.R

$$A = F \cdot s = F \cdot \frac{1}{2}at^2 = 20\mathrm{J}$$

3.11.2 Koliki rad izvrši sila Zemljine teže pri slobodnom padu tela mase 10kg ako padanje traje 10 s?

3.11.2.R

$$A = mgh = mg\frac{gt^2}{2} = 50\text{kJ}$$

3.11.3 Na telo mase 5kg deluje vertikalna sila usled čega se ono kreće ravnomerno naviše. Koliki rad izvrši ta sila ako se telo podigne na visinu od 7m?

2.11.3.R

Pošto je kretanje ravnomerno imamo:

$$A = mgh = 350\text{J}$$

3.11.4 Koliki rad izvrši dizalica za 5s pri ravnomernom podizanju tereta mase 2t brzinom $30\frac{\text{m}}{\text{min}}$?

3.11.4.R

$$A = mgh = mg\frac{v^2}{2g} = \frac{mv^2}{2} = 50\text{kJ}$$

3.11.5 Pod dejstvom vertikalne sile telo mase 100kg se popne na visinu 4m za 2s bez početne brzine. Koliki rad izvrši ta sila?

3.11.5.R

Iz

$$ma = F - mg \tag{3.11. 1 }$$

dobijamo

$$F = m(a + g) \tag{3.11. 2 }$$

Dalje sledi:

$$F = m\left(\frac{2h}{t^2} + g\right) \tag{3.11. 3 }$$

Na osnovu definicije rada imamo:

$$A = Fh = m\left(\frac{2h}{t^2} + g\right)h = 4{,}8\text{kJ} \tag{3.11. 4 }$$

3.11.6 Pri kretanju tela mase 10 g po horizontalnoj podlozi, rad sile trenja je -50J. Koliki put je prešlo telo ako je koeficijgnt trenja 0,5?

3.11.6.R

$$|A| = kmgs$$

$$s = \frac{|A|}{kmg} = 1\text{km}$$

3.11.7 Telo mase 2kg kreće se pod dejstvom horizontalne sile 5N po horizontalnoj podlozi. Koliki rad izvrši ta sila za 2s ako je koeficijent trenja 0,1, a početna brzina tela jednaka je nuli?

3.11.7.R

$$ma = F - kmg \tag{3.11. 5}$$

$$a = \frac{F - kmg}{m} \tag{3.11. 6}$$

$$F = m(a + kg) \tag{3.11. 7}$$

$$s = \frac{at^2}{2} = \frac{\left(\frac{F - kmg}{m}\right)t^2}{2} \tag{3.11. 8}$$

$$A = Fs = F\frac{\left(\frac{F - kmg}{m}\right)t^2}{2} = 15\text{J} \tag{3.11. 9}$$

3.11.8 Telo mase 1 kg kreće se pod dejstvom horizontalne sile F ubrzanjem 2 m/s^2 po horizontalnoj podlozi. Koeficijent trenja je 0,1. Naći rad sile F i rad sile trenja za 10s ako je početna brzina jednaka nuli.

3.11.8.R

$$A = Fs \tag{3.11. 10}$$

$$ma = F - kmg \tag{3.11. 11}$$

$$F = m(a + kg) \tag{3.11. 12}$$

$$A = Fs = m(a + kg)\frac{at^2}{2} = 300\text{J} \tag{3.11. 13}$$

$$A_{tr} = -kmg\frac{at^2}{2} = -100\text{J} \tag{3.11. 14}$$

3.11.9 Automobil mase 1t, polazi iz mirovanja i krećući se ravnomerno ubrzano prelazi 20 m za 2s. Kolika je srednja snaga motora tog automobila?

3.11.9.R

Prema definiciji snage imamo:

$$P=\frac{A}{t}=\frac{\Delta E_k}{t}=\frac{mv^2}{2t} \qquad (3.11.\ 15\ )$$

Takođe možemo pisati:

$$\bar{v}\,t=\frac{v\,t}{2} \qquad (3.11.\ 16\ )$$

Na osnovu definicije srednje brzine dalje pišemo:

$$\frac{s}{t}t=\frac{v\,t}{2} \qquad (3.11.\ 17\ )$$

odnosno

$$\frac{s}{t}=\frac{v}{2} \qquad (3.11.\ 18\ )$$

ili:

$$\frac{2s}{t}=v \qquad (3.11.\ 19\ )$$

Za srednju snagu konačno dobijamo:

$$P=\frac{m\left(\frac{2s}{t}\right)^2}{2t}=\frac{2ms^2}{t^3}=100\mathrm{kW} \qquad (3.11.\ 20\ )$$

3.11.10 Naći srednju i maksimalnu snagu motora aviona mase 170t ako se on odvaja od zemlje brzinom 360 km/h. Dužina uzletne piste je 3km, a koeficijent trenja 0,05. Smatrati da je ubrzanje konstantno.

3.11.10.R Ubrzanje aviona je $a=\frac{v^2}{2s}$, pa je vučna sila $F=m\left(\frac{v^2}{2s}+\mu g\right)$. Sledi:

$P_{max}=Fv=37\mathrm{MW}$, $P=18{,}5\mathrm{MW}$.

3.12 *Energija, rad i snaga pri rotaciji tela*

3.12.1 Da bi se svrdlo obrtalo, na njega treba delovati momeiitom sprega intenziteta M=50mN. Koliki se rad uloži za N=5 obrtaja svrdla?

3.12.1.R Rad pri rotacionom kretanju tela oko stalne ose, pod dejstvom stalnog momenta M jednak je proizvodu intenziteta tog momenta i ugla rotacije θ tela pod dejstvom ovog momenta, tj.

$$A=M\theta \qquad (3.12.\ 1\ )$$

a pošto je $\theta=2\pi N$ onda je

$$A=M2\pi N=1{,}57\mathrm{kJ} \qquad (3.12.\ 2\ )$$

3.12.2 Na rotor električnog motora deluje moment sprega magnetnih sila intenziteta M=40mN, usled čega on rotira stalnom ugaonom brzinom ω= 6000ob/min.

a) Kolika se električna energija troši na jedan obrtaj rotora ako je stepen korisnog dejstva motora η= 0,95?
b) Kolika je korisna snaga motora?
c) Kolika je uložena snaga motora, tj. snaga kojom on opterećuje električnu mrežu?
d) Ako je moment inercije rotora I=12kgm^2, kolika je kinetička energija rotora?

3.12.2.R a) Pošto je stepen korisnog dejstva motora jednak odnosu dobijene mehaničke energije E_{meh} i utrošene električne energije E_e, tj.

$$\eta = \frac{E_{meh}}{E_e} \tag{3.12. 3 }$$

onda je

$$E_e = \frac{E_{meh}}{\eta} = \frac{M\theta}{\eta} = 264{,}6\text{J} \tag{3.12. 4 }$$

b) Korisna snaga motora je

$$P_k = M\omega = 25{,}1\text{kW} \tag{3.12. 5 }$$

c) Uložena snaga je

$$P_u = \frac{P_k}{\eta} = 26{,}4\text{kW} \tag{3.12. 6 }$$

d) Pošto je ugaona brzina $\omega = 628\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, kinetička energija rotora je

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2} = 2{,}37\text{MJ} \tag{3.12. 7 }$$

3.12.3 Električni motor ima snagu P=25 kW i stepen korisnog dejstva η=0,98. Ugaona brzina rotacije rotora motora iznosi ω=3 000 ob/min. Koliki je intenzitet momenta sprega ovog motora?

3.12.3.R Pošto je $P_k = \eta P$ i $P_k = M\omega$, gde je $\omega = 314\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, onda je

$$M = \frac{\eta P}{\omega} = 78\text{Nm}$$

3.12.4 Motorni uređaj za sečenje drva ima rotacionu testeru poluprečnika r=30 cm. Testeru pokreće električni motor čija je ugaona brzina ω=100π rad/s. Potreban intenzitet sile za kidanje drveta zupcima testere je F=15N. Koliku najmanju korisnu snagu treba da ima pokretački motor ove testere?

3.12.4.R Za sečenje drveta potrebno je da pokretački motor testere ostvari moment čiji je intenzitet

$$M = rF$$

a pošto se pri tome motor obrće ugaonom brzinom ω=100rad/s, onda je potrebna korisna snaga motora

$$P = M\omega = 1{,}4\text{kW}$$

3.12.5 Snaga motora putničkog automobila iznosi P=25 kW prilikom kretanja brzinom v=72 km/h. Poluprečnik točkova je r=0,35 m. Koliki je intenzitet momenta sprega koji razvija motor na svakom pokretačkom točku?

3.12.5.R Ako je intenzitet momenta sprega na pokretačkom točku M, kada se ovaj obrće ugaonom brzinom $\omega = \frac{v}{r}$, razvijena snaga je

$$P_1 = M\omega = M\frac{v}{r}$$

a pošto automobil ima dva pokretačka točka, onda je potrebna snaga motora

$$P = 2P_1 = 2M\frac{v}{r}$$

odakle je

$$M = \frac{rP}{2v} = 220\text{Nm}$$

jer je v=72km/h=20m/s.

3.12.6 Zrno mase m=10 g, leteći brzinom v=800 m/s, rotira oko uzdužne ose, praveći n=3000 obrta u sekundi. Smatrajući zrno za cilindar poluprečnika R=8 mm, odrediti ukupnu energiju zrna.

3.12.7.R

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + mr^2\pi^2n^2 = 3256{,}79\text{J}$$

3.12.7 Točak rotira stalnom ugaonom brzinom od 4 obrta u sekundi i raspolaže kinetičkom energijom od 3,14 J. Za koje vreme će moment sile od 25 Nm povećati ugaonu brzinu točka za dva puta?

3.12.9.R

Kinetička energija točka iznosi:

$$E_k = \frac{I\omega_1^2}{2}$$

odakle dobijamo za moment inercije:

$$I = \frac{2E_k}{\omega_1^2}$$

Prema osnovnoj relaciji dinamike rotacije:

$$M = I\alpha$$

imamo:

$$M = I\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

odnosno:

$$M = I\frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t}$$

Odatle dobijamo za vreme:

$$\Delta t = I\frac{\omega_2 - \omega_1}{M}$$

odnosno

$$\Delta t = \frac{2E_k}{\omega_1^2}\frac{\omega_2 - \omega_1}{M}$$

ili

$$\Delta t = \frac{2E_k}{\omega_1^2}\frac{2\omega_1 - \omega_1}{M}$$

i konačno dobijamo:

$$\Delta t = \frac{2E_k}{\omega_1 M}$$

$$\Delta t = 0{,}01\,\mathrm{s}$$

4. Zakoni održanja

4.1 Zakon održanja impulsa

4.1.1 Kolica mase 40kg na kojima stoji čovek mase 70kg miruju na podlozi. Čovek krene po kolicima brzinom 1 m/s (u odnosu na podlogu). Kolikom brzinom će poći kolica?

4.1.1.R Iz $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ sledi $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$, tj. impulsi čoveka i kolica imaju isti pravac i intenzitet, a suprotan smer. Intenzitet brzine kolica dobija se iz $m_1 v_1 = m_1 v_2$. Sledi

$$v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2} = 1{,}75 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.1.2 Čovek mase 100kg stoji na splavu mase 5000 kg koji leži na mirnoj površini jezera. Kolikom brzinom će se kretati splav ako čovek počne da se kreće po njemu brzinom 5 m/s (u odnosu na splav)?

4.1.2.R Ako je *u* brzina splava, a v' brzina čoveka u odnosu na splav, onda je brzina čoveka u odnosu na vodu $v' = v' - u$. Sledi $m(v' - u) = Mu$, pa je

$$u = \frac{m v'}{M + m} = 0{,}1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

4.1.3 Čovek mase 70kg stoji na jednom kraju čamca dužine 3m i mase 140kg koji miruje na jezeru. Za koliko će se pomeriti čamac ako čovek pređe na njegov drugi kraj?

4.1.3.R Ako je v brzina čoveka u odnosu na čamac, a u brzina čamca u odnosu na vodu, onda je $m(v - u) = Mu$, tj. $u = \dfrac{m v}{M + m}$. Vreme za koje čovek pređe sa jednog kraja čamca na drugi je $t = \dfrac{l}{v}$, pa je put koji za isto vreme pređe čamac

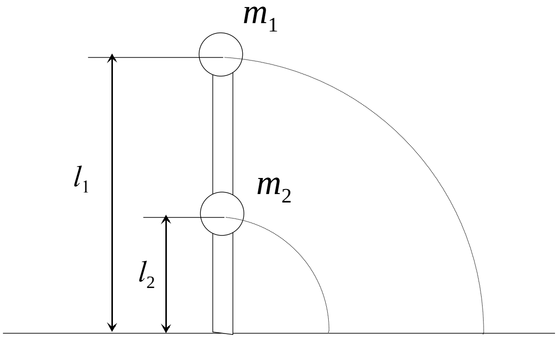
$$s = ut = \frac{m l}{M + m} = 1\text{m}.$$

4.1.4 Vagon mase 25t kreće se brzinom 2m/s i spaja se sa platformom mase 15t koja miruje na podlozi. Kolikom brzinom će se kretati vagon i platforma posle spajanja? Trenje je zanemarljivo.

4.1.4.R Iz $m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2$ sledi $v_2 = \dfrac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 1{,}25 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

4.2 Zakon održanja energije

4.2.1 Na zemlji je pomoću šarki učvršćen lagani štap dužina l_1 u vertikalnom položaju. Na njemu su učvršćene dve kugle masa m_1 i m_2. Kugla mase m_1 nalazi se ne gornjem kraju štapa, a kugla mase m_2 na udaljenosti l_2 od donjeg kraja štapa. Težinu štapa zanemariti u odnosu na mase kugli. Kolika je brzina kugle mase m_1 pri padu na zemlju, ako je štap počeo da pada bez početne brzine?



Slika 4.2. 1

4.2.1.R

Prilikom padanja štapa ugaona brzina ostaje ista:

$$\omega_1 = \omega_2 \tag{4.2. 1}$$

odnosno:

$$\frac{v_1}{l_1} = \frac{v_2}{l_2} \tag{4.2. 2}$$

ili:

$$v_2 = \frac{l_2}{l_1} v_1 \tag{4.2. 3}$$

Zakon održanja energije ima oblik:

$$m_1 g l_1 + m_2 g l_2 = \frac{m v_1^2}{2} + \frac{m v_2^2}{2} \tag{4.2. 4}$$

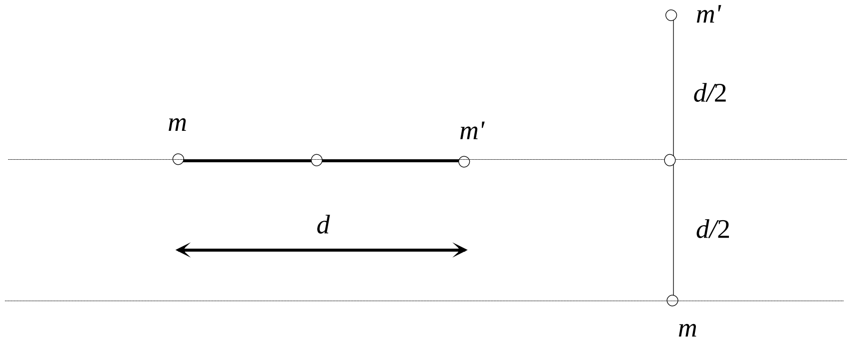
Zamenom brzine iz (4.2.1.3) u (4.2.1.4) dobijamo:

$$m_1 g l_1 + m_2 g l_2 = \frac{m v_1^2}{2} + \frac{m\left(\frac{l_2}{l_1} v_1\right)^2}{2} \tag{4.2. 5}$$

Sređivanjem ovog izraza konačno dobijamo:

$$v_1 = l_1 \sqrt{\frac{2g(m_1 l_1 + m_2 l_2)}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}} \tag{4.2. 6}$$

4.2.2 Štap zanemarljive mase dužina 1m može se vrteti oko horizontalne ose, koja se nalazi na sredini štapa. Štap je u horizontalnom položaju i na jednom kraju nalazi se telo mase m_1=6kg, na drugom kraju telo mase m_2=3kg. Ako se štapu dopusti kretanje oko ose obrtanja, odredi koju će brzinu imati veće telo kada se nalazi u najnižem položaju.



Slika 4.2. 2

Zakon održanja energije ima oblik:

$$m_1 g\frac{d}{2}+m_2 g\frac{d}{2}=\frac{m_1 v_1^2}{2}+\frac{m_2 v_2^2}{2}+m_2 gd \tag{4.2. 7}$$

Pošto su ugaone brzine tela jednake, a rastojanje od centra rotacije takođe jednako sledi i da će brzine tela biti jednake:

$$\frac{v^2}{2}(m_1+m_2)=m_1 g\frac{d}{2}+m_2 g\frac{d}{2}-m_2 gd \tag{4.2. 8}$$

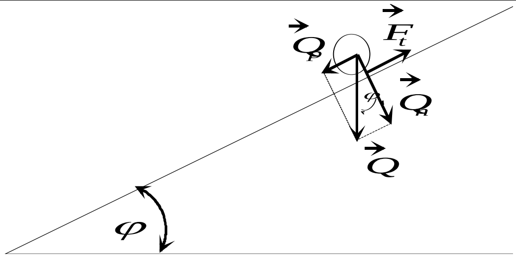
Konačno dobijamo:

$$v=\sqrt{\frac{(m_1-m_2)gd}{m_1+m_2}} \tag{4.2. 9}$$

Konkretno

$$v=1{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

4.2.3 Sa vrha strme ravni, visine h=1m i nagiba 30°, skotrlja se pun homogen valjak bez klizanja i bez početne brzine. Odredi brzinu centra kuglice na dnu strme ravni i ubrzanje centra mase pri kotrljanju ($g\approx 10\text{m/s}^2$). Zadatak uraditi dinamičkim i energijskim metodom.



Slika 4.2. 3

Dinamičkom analizom dobijamo, iz osnovne relacije dinamike translacije:

$$ma = mg\sin\varphi - F_t \quad (4.2.\ 10)$$

Iz osnovne relacije dinamike rotacije:

$$I\alpha = F_t r \quad (4.2.\ 11)$$

Dalje, imajući u vidu relaciju za moment inercije, i vezu između tangencijalnog ubrzanja i ugaonog ubrzanja imamo:

$$\frac{mr^2}{2}\frac{a}{r} = F_t r \quad (4.2.\ 12)$$

odnosno:

$$\frac{ma}{2} = F_t \quad (4.2.\ 13)$$

Uvrštavanjem ovog izraza za silu trenja u izraz (4.2.10) dobijamo:

$$ma = mg\sin\varphi - \frac{ma}{2} \quad (4.2.\ 14)$$

Sređivanjem ovog izraza za ubrzanje dobijamo:

$$a = \frac{2}{3}g\sin\varphi \quad (4.2.\ 15)$$

Sa slike 4.2.3.1 je očigledno:

$$\sin\varphi = \frac{h}{s} \quad (4.2.\ 16)$$

pa za ubrzanje dalje dobijamo:

$$a = \frac{2}{3}g\frac{h}{s} \quad (4.2.\ 17)$$

Iz relacije (4.2.3.7) sledi

$$s = \frac{h}{\sin\varphi} = 2h \quad (4.2.\ 18)$$

Za ubrzanje konačno dobijamo:

$$a = \frac{2}{3}g\frac{h}{2h} = \frac{1}{3}g = 3{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \quad (4.2.\ 19)$$

Brzina iznosi:

$$v=\sqrt{2as}=\sqrt{\frac{4}{3}gh}=3{,}65\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{4.2. 20}$$

Energijskim metodom ćemo dobiti sledeće. Zakon održanja energije daje:

$$mgh=\frac{mv^2}{2}+\frac{I\omega^2}{2} \tag{4.2. 21}$$

odnosno

$$mgh=\frac{mv^2}{2}+\frac{\frac{1}{2}mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2}{2} \tag{4.2. 22}$$

ili

$$gh=\frac{v^2}{2}+\frac{v^2}{4} \tag{4.2. 23}$$

Za brzine dobijamo:

$$v=\sqrt{\frac{4}{3}gh} \tag{4.2. 24}$$

Iz poznate relacije za jednoliko ubrzano kretanje

$$v^2=v_0^2+2as \tag{4.2. 25}$$

uz uslov

$$v_0=0 \tag{4.2. 26}$$

dobijamo:

$$v^2=2as \tag{4.2. 27}$$

odnosno

$$a=\frac{v_0^2}{2s} \tag{4.2. 28}$$

Imajući u vidu

$$s=2h \tag{4.2. 29}$$

dobijamo za ubrzanje:

$$a=\frac{\frac{4}{3}gh}{2\cdot 2h}=\frac{1}{3}g=3{,}33\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \tag{4.2. 30}$$

odnosno za brzinu

$$v=\sqrt{2as}=\sqrt{\frac{4}{3}gh}=3{,}65\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{4.2. 31}$$

4.3 Elastični i neelastični sudari

4.3.1 Kugla mase m=0,05 kg naleće brzinom v_0=10 m/s na nepokretnu kuglu mase M=0,11kg. Sudar je centralan i elastičan. Kolike su brzine kugli posle sudara?

4.3.1.R

$v_1 = \dfrac{(m-M)v_0 + 2M\cdot 0}{m+M} = -3{,}75\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ (znak minus nam kaže da će se prva kugla nakon sudara kretati u suprotnom smeru brzinom $3{,}75\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$)

$$V_1 = \frac{(M-m)\cdot 0 + 2Mv_0}{m+M} = 6{,}25\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

4.3.2 Vagon mase 20 tona, kreće se po horizontalnoj pruzi brzinom 1,5 m/s i nailazi na nepokretni vagon mase 10 tona. Kolike su brzine vagona posle sudara ako je on:

a) elastičan,
b) apsolutno neelastičan (vagoni se u sudaru spoje)?

4.3.2.R

a) oba vagona kreću se u smeru nailaska prvog vagona; prvi ima brzinu

$$v_1' = \frac{(m_1-m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1+m_2} = 0{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

a drugi

$$v_2' = \frac{(m_2-m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1+m_2} = 2\frac{\text{m}}{\text{s}};$$

b) oba vagona kreću se zajedno brzinom

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2} = 1\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

4.3.3 Kugla mase m=0,1 kg kreće se brzinom v=12 m/s i naleće na nepokretnu kuglu mase M=0,05 kg. Kolike su brzine kugli posle centralnog sudara ako je on

a) apsolutno elastičan,
b) apsolutno neelastičan?

4.3.3.R

a) v_1=4m/s, V_1=16m/s
b) 8m/s

4.3.4 Granata mase 40 kg, koja leti paralelno sa šinama brzinom 500 m/s, ulazi u vagon s peskom u kome ostaje. Masa vagona s peskom je 12 tona. Kolikom brzinom će se kretati vagon nakon prodora granate ako se

a) kretao u susret granati brzinom 2,5 m/s,
b) kretao u smeru kretanja granate brzinom 2,5 m/s,
c) nije kretao pre sudara?

4.3.4.R

a) 0,83 m/s;

b) 4,2 m/s;

c) 1,66 m/s

4.3.5 Dva tela čije su mase 20 kg i 16 kg, kreću se u susret jedno drugom brzinama istog intenziteta 9 m/s. Kolikom brzinom i u kom smeru će se kretati ova tela posle apsolutno neelastičnog centralnog sudara?

4.3.5.R 1 m/s, u smeru prvobitnog kretanja tela veće mase

4.3.6 Dve kugle, čije su mase 8 kg i 2 kg, kreću se duž iste prave linije brzinom 8 m/s i 3m/s. Kolikom brzinom će se one kretati posle apsolutno neelastičnog centralnog sudara ako:

a) prva kugla sustiže drugu,
b) kugle se kreću u susret jedna drugoj ?
4.3.6.R 7 m/s; 5,8 m/s

4.3.7 Pri apsolutao neelastičnom sudaru jedno telo miruje. Pod kojim uslovom će gubitak kinetičke energije iznositi 50%, a pod kojim će biti 100%?

4.3.7.R Ako su mase tela jednake; ako je masa projektila zanemarljivo mala prema masi mete.

4.3.8 Vagon mase 20 tona sustiže brzinom 0,3 m/s vagon mase 30 tona, čija je brzina 0,2m/s. Kolikom brzinom se kreću ovi vagoni nakon spajanja?

4.3.8.R 0,24 m/s

4.3.9 Ledolomac, čija je masa 6000 tona, kreće se sa isključenim motorima brzinom 12 m/s i naleće na nepokretnu ledenu santu koju zatim gura ispred sebe. Pri tome se brzina ledolomca smanjila na 8 m/s. Kolika je masa ledene sante ?

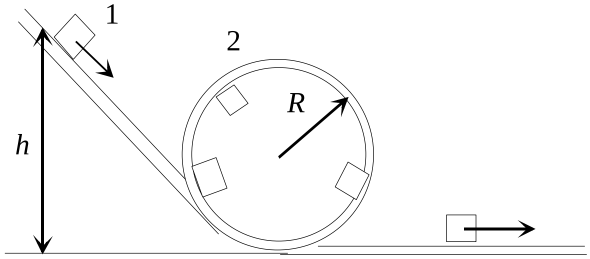
4.3.9.R 3 000 tona

4.4 Mrtva petlja

4.4.1 Telo mase *m*=200g počinje da klizi po strmoj ravni, koja prelazi u "mrtvu petlju" sa visine *h*. Kolika je minimalna visina h_{min} pri kojoj telo može po žlebu opisati ceo krug, ne odvajajući se od žleba? Radijus kruga je *R*=1m. Trenje zanemariti. Šta će se desiti ako telo klizi sa visine a. $h_1 = 2\text{m}$, b. $h_2 = 4\text{m}$?

4.4.1.R Pretpostavimo da je visina sa koje telo počinje kretanje toliko velika da ono može obići najvišu tačku na žlebu (kružnice). Na telo deluju dve sile: sila teže i sila reakcije podloge. Ove sile u najvišoj tački su usmerene vertikalno naniže. Stoga se može napisati da je

$$\frac{mv^2}{R} = mg + F_R \tag{4.4. 1 }$$



Slika 4.4. 1

Odavde je intenzitet sile reakcije

$$F_R = \frac{mv^2}{R} - mg \tag{4.4. 2 }$$

Ako je visina tela toliko velika da telo može da obiđe tačku na žlebu, koja ima najveću visinu, onda intenzitet sile reakcije mora biti $F_R \geq 0$. Tražena minimalna visina nalazi se iz uslova $F_R = 0$. Pri manjim vrednostima *h* telo neće dostići tačku na hlebu koja ima najveću visinu. Na taj način, pri $h = h_{min}$, imamo:

$$\frac{mv^2}{R} = mg \tag{4.4. 3 }$$

Sada treba uspostaviti vezu između visine *h* sa brzinom tela u najvišoj tački. U tom cilju koristićemo zakon održanja energije. Iz tog zakona sdedi daje kinetička energija u tački 2 jednaka razlici potencijalnih energija u tačkama 1 i 2, to jest:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh - mg2R \tag{4.4. 4 }$$

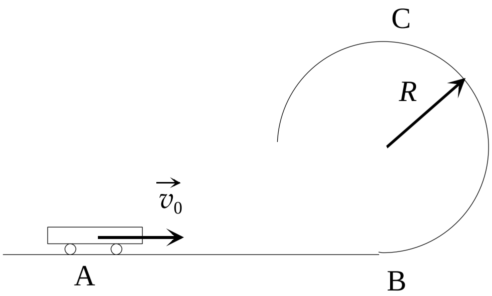
Kombinacijom poslednjih dveju relacija nalazi se:

$$h_{min} = \frac{5}{2}R$$

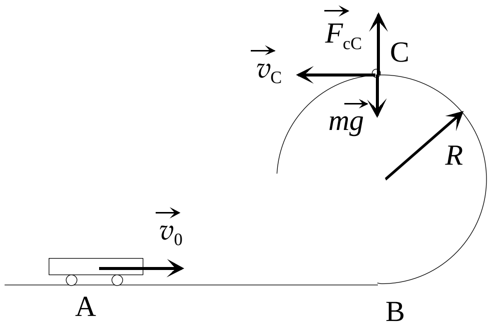
a.

Telo neće opisati čitavu petlju, tj. ono će pasti.
b. Telo će opisati čitavu petlju

4.4.2 Iz tačke A gurne se vagonet, mase *m*, početnom brzinom v_0 po šinama položenim po putanji ABC, koja u tački B prelazi u polukrug poluprečmka *R*. Koliku najmanju kinetičku energiju je potrebno predati vagonetu u tački A da bi prešao put *ABC* ne odvajajući se od podloge? Gubitak energije na savlađivanje sile trenja je 2%. Kolika je brzina vagoneta u tački C?



Slika 4.4. 2



Slika 4.4. 3

4.4.3.R Da bi vagonet prešao celu putanju ABC po šinama, treba da je $\vec{F}_c(C) \geq m\vec{g}$, odnosno $\vec{F}_c(C) = m\vec{g}$, gde je $F_c(C) = \dfrac{mv_C^2}{R}$ intenzitet centrifugalne sile koja deluje na vagonet kada se on nalazi u položaju C. Iz ovog uslova je

$$v_{C\,min} = \sqrt{Rg}$$

Prema zakonu održanja energije je

$$E_{kAmin} = (1+0{,}02)\left(\frac{mv_C^2}{R} + 2mgR\right)$$

odnosno

$$E_{kAmin} = \frac{5{,}1}{2} mgR$$

4.5 Zakon održanja momenta impulsa

4.5.1 Kuglica, vezana koncem, kruži u horizontalnoj ravni po kružnici, poluprečnika r=1m. Masa kuglice je 1kg, a njena linearna brzina v_1=2 m/s. Kolika će da bude brzina kuglice ako se u toku kretanja dužina konca skrati na polovinu.

4.5.1.R

Zakon održanja momenta impulsa $L_1 = L_2$ u ovom slučaju daje:

$$mv_1 r = mv_2 \frac{r}{2}$$

odnosno

$$v_1 = v_2 \frac{1}{2}$$

v_2=4m/s

4.5.2 Na ivici platforme koja rotira oko vertikalne ose, ugaonom brzinom $\omega_1 = 1\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, nalazi se čovek na rastojanju $r = 1\text{m}$ od ose platforme. Moment inercije platforme je $I_p = 120\text{kgm}^2$, a masa čoveka je M=70kg. Kolika će da bude ugaona brzina platforme kada čovek pređe u njen centar? Moment inercije čoveka izračunati po formuli za moment inercije materijalne tačke.

Rešenje: Čovek s platformom čini izolovan mehanički sistem, moment impulsa sistema ostaje stalan. Moment impulsa $I_1\omega_1$ (čovek na ivici platforme)jednak je momentu impulsa $I_2\omega_2$ (čovek u centru platforme):

4.5.2.R

Iz zakona održanja momenta impulsa imamo:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

odnosno

$$I_1 = I_p + I_c = I_p + Mr^2$$

i

$$I_2 = I_p$$

Tada imamo

$$\left(I_p + Mr^2\right)I_1\omega_1 = I_p\omega_2$$

odnosno

$$\omega_2 = \frac{\left(I_p + Mr^2\right)I_1}{I_p}\omega_1 = 1{,}6\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

5. Gravitacija

5.1 Gravitaciona sila

5.1.1 Koliki je intenzitet gravitacione sile kojom se privlače dve homogene kugle, svaka mase 1 kg, koje su na međusobnom rastojanju 1 m? ($\gamma = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\dfrac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$)

5.1.1.R

$$F = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{N}$$

5.1.2 Odrediti intenzitet gravitacione sile kojom uzajamno deluju dve identične kugle koje se dodiruju, poluprečnika od 1m. Gustina olova je $\rho = 11{,}3\,\dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$, gravitaciona konstanta ima vrednost $\gamma = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\dfrac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$.

5.1.2.R

$$F = \gamma\frac{m_1 m_2}{(2r)^2} = \gamma\frac{m^2}{(2r)^2} = \gamma\frac{(\rho V)^2}{(2r)^2} = \gamma\frac{\left(\rho\frac{4}{3}r^3\pi\right)^2}{(2r)^2} = \frac{4}{9}\gamma\rho^2 r^4\pi^2 = 2{,}34\cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}$$

5.1.3 Centri dveju metalnih kugli, jednakih masa, nalaze se na međusobnom rastojanju r=10m. Kugle se privlače silom $F = 9{,}81\cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}$. Kolika je masa svake od njih? ($\gamma = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\dfrac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$)

5.1.3.R

$$F = \gamma\frac{m_1 m_2}{(2r)^2} = \gamma\frac{m^2}{4r^2}$$

$$4r^2 F = \gamma m^2$$

$$\frac{4r^2 F}{\gamma} = m^2$$

$$m = 2r\sqrt{\frac{F}{\gamma}} = 1212\,\mathrm{kg}$$

5.2 Gravitaciono polje

5.2.1 Na telo mase 2kg deluje gravitaciona sila od $3\cdot10^{-4}\,\mathrm{N}$. Kolika je jačina gravitacionog polja u tački u kojoj se nalazi telo?

5.2.2.R Koristeći formulu za izračunavanje intenziteta jačine gravitacionog polja: $G=\dfrac{F}{m}$ nalazimo da je $G=1{,}5\cdot10^{-4}\,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$

5.2.2 Kolika je gravitaciona sila koja deluje na telo mase 10kg ako je jačina gravitacionog polja na mestu gde se ono nalazi $3\cdot10^{-5}\,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$?

5.2.2.R

$F=mG=3\cdot10^{-4}\,\mathrm{N}$

5.2.3 Kolika je jačina gravitacionog polja Zemlje na njenoj površini? Srednja gustina Zemlje je $\rho=5500\,\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, a poluprečnik $R=6370\mathrm{km}$. Gravitaciona konstanta je $\gamma=6{,}67\cdot10^{-11}\,\dfrac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$.

5.2.3.R Intenzitet jačine gravitacionog polja je

$$G=\frac{F}{m}=\frac{\gamma\dfrac{mM}{R^2}}{m}=\gamma\frac{M}{R^2}=\gamma\frac{\rho V}{R^2}=\gamma\frac{\rho\dfrac{4}{3}R^3\pi}{R^2}=\frac{4}{3}\gamma\rho R\pi=9{,}81\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$$

5.2.4 Jačina gravitacionog polja Meseca na njegovoj površini iznosi $G_M=1{,}62\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$. Izračunati masu Meseca ako se zna da je njegov poluprečnik $R_M=1740\mathrm{km}$. Gravitaciona konstanta iznosi $\gamma=6{,}67\cdot10^{-11}\,\dfrac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$.

5.2.4.R

$$G_M=\gamma\frac{M_M}{R_M^2}$$

$$M_M=\frac{R_M^2G_M}{\gamma}=7{,}4\cdot10^{22}\mathrm{kg}$$

5.3 Gravitaciono ubrzanje

5.3.1 Na kom rastojanju od površine Zemlje ubrzanje Zemljine teže iznosi 1m/s^2. Ubrzanje Zemljine teže na površini Zemlje iznosi $g_0 = 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, poluprečnik Zemlje je R=6370km.

5.3.1.R

$$g = \gamma\frac{m}{r^2} = \gamma\frac{m}{(R+h)^2} = \gamma\frac{m}{R^2}\frac{R^2}{(R+h)^2} = g_0\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

$$\frac{g}{g_0} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2;\ \sqrt{\frac{g}{g_0}} = \frac{R}{R+h}$$

$$R+h = \frac{R}{\sqrt{\frac{g}{g_0}}}$$

$$h = \frac{R}{\sqrt{\frac{g}{g_0}}} - R = R\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{g}{g_0}}} - 1\right)$$

$$h = \frac{R}{\sqrt{\frac{g}{g_0}}} - R = R\left(\sqrt{\frac{g_0}{g}} - 1\right) = 13{,}6\cdot 10^6\,\mathrm{km}$$

5.3.2 Odrediti ubrzanje Zemljine teže na visini h=20km iznad Zemlje, uzimajući da je ubrzanje Zemljine teže na površini Zemlje $g_0 = 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, a radijus Zemlje R=6370km.

5.3.2.R

$$g = g_0\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 \approx g_0\frac{R^2}{(R+h)^2} \approx g_0\frac{R^2}{R^2+2Rh+h^2} \approx g_0\frac{1}{1+\frac{2h}{R}+\left(\frac{h}{R}\right)^2} \approx g_0\frac{1}{1+\frac{2h}{R}}$$

$$g \approx 9{,}75\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

5.3.3 Koliko je ubrzanje Mesečeve teže na površini meseca ako se uzme da masa Meseca iznosi 1/81 deo mase Zemlje i da je poluprečnik Meseca 5/19 poluprečnika Zemlje? Ubrzanje na površini Zemlje g_Z= 9,81 m/s^2.

5.3.3.R Na osnovu Njutnovog zakona gravitacije, ubrzanje Zemljine teže na površini Zemlje je $g_Z = \gamma \frac{M_Z}{R_Z^2}$. Analogno se dobija ubrzanje Mesečeve teže $g_M = \gamma \frac{M_M}{R_M^2}$. Iz prethodne dve relacije nalazi se $g_M = g_Z \frac{m}{M}\left(\frac{R_Z}{R_M}\right)^2 \approx 1{,}70 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

5.3.4 Koliko je ubrzanje sile teže na površini Sunca ako je njegov radijus 108 puta veći od radijusa Zemlje, a gustina Sunca odnosi se prema gustini Zemlje kao 1:4?

5.3.4.R Ubrzanje sile teže na površini Sunca je

$$g_S = \gamma \frac{M_S}{R_S^2} = \frac{\gamma}{R_S^2} \rho_S V_S = \frac{\gamma}{R_S^2} \rho_S \frac{4}{3} R_S^3 \pi = \frac{4}{3} \gamma \rho_S R_S \pi$$

gde je R_S - radijus Sunca, R_S - gustina Sunca. Na Zemlji na sličan način imamo

$$g_Z = \frac{4}{3} \gamma \rho_Z R_Z \pi$$

gde je R_Z - radijus Zemlje, R_Z - gustina Zemlje. Pošto je $\frac{R_S}{R_Z} = 108$ i $\frac{\rho_S}{\rho_Z} = 0{,}25$, dobija se

$$g_S \approx 270 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

5.3.5 Izračunati ubrzanje tela koje slobodno pada na površinu Sunca ako su poznati: radijus Sunca R_S=7·10^5 km, radijus Zemljine orbite i vreme obrtanja Zemlje oko Sunca T=1godina.

5.3.5.R

$$g_S = \frac{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_{ZS}^3}{R_S^2} \approx 265 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

5.3.6 Smatrajući da su orbite Zemlje i Meseca približno krugovi, izračunati odnos masa Zemlje i Sunca. Poznato je da Mesec izvrši 13 obrtaja u toku godine i da je rastojanje od Sunca do Zemlje 390 puta veće od rastojanja od Zemlje do Meseca.

5.3.6.R Kako za Zemlju tako i za Mesec centripetalno ubrzanje se određuje silama gravitacije. Dakle:

$$M_Z \omega_Z^2 R_Z = \gamma \frac{M_Z M_S}{R_Z^2} \quad (5.3.\ 1\ )$$

odnosno

$$M_M \omega_M^2 R_M = \gamma \frac{M_Z M_M}{R_M^2} \quad (5.3.\ 2\ )$$

Ako podelimo prethodne jednačine dobijamo

$$\frac{M_Z \omega_Z^2 R_Z}{M_M \omega_M^2 R_M} = \frac{\gamma \dfrac{M_Z M_S}{R_Z^2}}{\gamma \dfrac{M_Z M_M}{R_M^2}} \quad (5.3.\ 3\ )$$

odnosno:

$$\frac{M_Z \omega_Z^2 R_Z}{M_M \omega_M^2 R_M} = \frac{\dfrac{M_S}{R_Z^2}}{\dfrac{M_M}{R_M^2}} \quad (5.3.\ 4\ )$$

ili

$$\frac{M_S}{M_Z} = \frac{\omega_Z^2 R_Z^3}{\omega_M^2 R_M^3} \quad (5.3.\ 5\ )$$

Imajući u vidu da je:

$$\frac{\omega_Z}{\omega_M} = \frac{1}{13} \quad (5.3.\ 6\ )$$

i

$$\frac{R_Z}{R_M} = 390 \quad (5.3.\ 7\ )$$

dobijamo

$$\frac{M_S}{M_Z} = \frac{\omega_Z^2 R_Z^2}{\omega_M^2 R_M^3} = 351 \cdot 10^3 \quad (5.3.\ 8\ )$$

5.3.7 Radijus Meseca približno je oko 3,7 puta manji nego radijus Zemlje, a njegova masa oko 81 puta manja od mase Zemlje. Koliko iznosi gravitaciono ubrzanje na površini Meseca?

5.3.7.R $g_M = 1{,}65 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

5.4 Rad u gravitacionom polju. Potencijal i napon gravitacionog polja

5.4.1 Koliki je gravitacioni potencijal tačkastog tela, mase m=10kg, na rastojanju r=5 m od tela?

5.4.1.R

$$\varphi = -\gamma \frac{m}{r} = -13{,}3 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$$

5.4.2 Koliku gravitacionu potencijalnu energiju poseduje lelo, mase m=5 kg, kada. se nalazi na onom mestu u gravitacionom polju gde njegov potencijal iznosi φ=-2J/kg?

5.4.2.R

$$E_p = m\varphi = -60\mathrm{J}$$

5.4.3 Telo, mase m=0,l kg, premesti se iz tačke A u tačku B graviiacionog polja. Gravitacioni potencijali ovih tačaka su φ_A=-2J/kg i φ_B=-0,2 J/kg.

a) Kolika je promena gravitacione potencijalne energije tela?

b) Koliko iznosi rad spoljašnjih sila utrošen za ovo pomeranje?

5.4.3.R

a) Promena gravitacione potencijalne energije pri premeštanju tela je:

$$\Delta E_p = m(\varphi_B - \varphi_B) = 0{,}18\mathrm{J}$$

b) Rad spoljašnjih sila jednak je promeni gravitacione potencijalne energije, dakle:

$$A = \Delta E_p = 0{,}18\mathrm{J}$$

5.4.4 Imajući u vidu veličine gravitacionih potencijala Zemlje na njenoj površini i u njenom središtu, izračunati rad koji bi trebalo izvršiti za pomeranje tela, mase m= 1kg, iz središta Zemlje na njenu površinu.

5.4.4.R

$$A = mG_0R \approx mgR = 62{,}8\mathrm{MJ}$$

5.4.5 Telo, mase m=100kg, načinjeno od supstancije gustine ρ=2 500 kg/m^3, podeli se na dva jednaka tela, koja se mogu smatrati sferama. Koliki rad treba uložiti na savladivanje gravitacionih sila, kojima se privlače ova dva tela, da bi se ona međusobno udaljila na rastojanje d=5 m?

5.4.5.R $A = \frac{\gamma m^2}{4}\left(\sqrt{\frac{\pi\rho}{6m}} - \frac{1}{d}\right)$

5.5 Slobodno padanje

5.5.1 Malo telo se pusti da slobodno pada kroz bezvazdušni prostor. U tački A svoje putanje ima brzinu v_A= 2m/s, a u tački B brzinu v_B=14m/s. Izračunati rastojanje između tačaka A i B, i vreme za koje će telo preći to rastojanje.

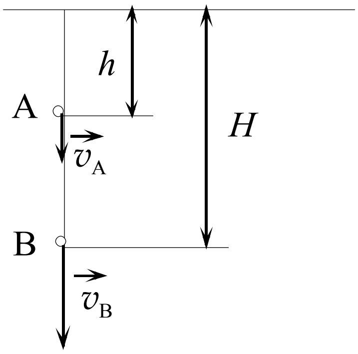
5.5.1.R

$$v_A = \sqrt{2gh} \tag{5.5. 1 }$$

$$v_B = \sqrt{2gH} \tag{5.5. 2 }$$

$$h = \frac{v_A^2}{2g} \tag{5.5. 3 }$$

$$H = \frac{v_B^2}{2g} \tag{5.5. 4 }$$



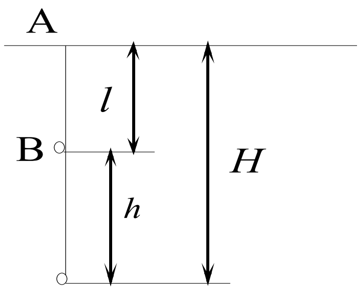
Slika 5.5. 1

$$AB = H - h = \frac{1}{2g}\left(v_B^2 - v_A^2\right) = 9{,}8\text{m} \tag{5.5. 5 }$$

$$t = \frac{v_B - v_A}{g} = 1{,}22\text{s} \tag{5.5. 6 }$$

5.5.2 U vertikalnom oknu nalazi se mesto A, za l=20m više od mesta B. Iz oba mesta puste se da slobodno padaju kugle i to iz mesta B za 0,8s kasnije nego iz mesta A. Kugle istovremeno padaju na dno okna. Izračunati puteve koje su kugle prešle i vreme padanja kugle iz mesta B.

5.5.2.R



Slika 5.5. 2

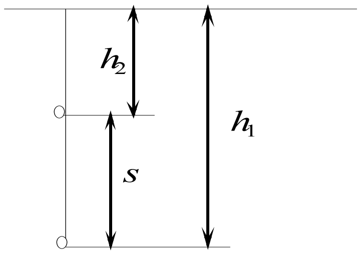
$$t = \frac{l + \frac{g\Delta t^2}{2}}{g\Delta t} = 2{,}85\text{s} \tag{5.5. 7}$$

$$h = \frac{g(t - \Delta t)^2}{2} = 20{,}6\text{m} \tag{5.5. 8}$$

$$H = l + h = 39{,}84\text{m} \tag{5.5. 9}$$

5.5.3 Sa krova kuće padaju jedna za drugom dve kapi. Posle 2s od početka padanja druge kapi, rastojanje među kapima je s=25m. Za koliko je ranije počela prva kap da pada sa krova kuće?

5.5.3.R



Slika 5.5. 3

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s}{g} + t_2^2} = 3{,}016\text{s} \tag{5.5. 10}$$

$$\Delta t = t_1 - t_2 = 1{,}016\text{s} \tag{5.5. 11}$$

5.5.4 Kamen koji slobodno pada bez početne brzine pređe drugu polovinu puta za 2s. Sa koje visine pada kamen?(g=10m/s^2)

5.5.4.R

$$H = \frac{g\Delta t^2}{\left(\sqrt{2} - 1\right)^2} = 237{,}95\text{m}$$

5.6 Vertikalni hitac

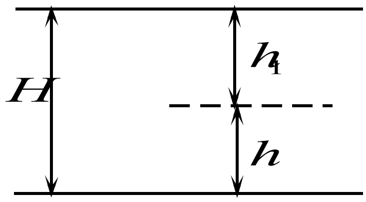
5.6.1 Telo je bačeno sa visine h=50 m brzinom $v_0 = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}$ vertikalno nadole. Kolika je brzina tela u trenutku pada? Posle koliko vremena će telo pasti na Zemlju?

5.6.1.R

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \approx 31{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = v_0 + gt \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{g} \approx 3\text{s}$$

5.6.2 Neko telo pušteno je da slobodno pada sa visine H=100m. U istom trenutku izbačeno je telo vertikalno uvis. a. Kojom početnom brzinom treba izbaciti drugo telo, da bi se tela mimoišla na visini h=28m? b. Do koje maksimalne visine se može popeti drugo telo, sa datom početnom brzinom? c. Kolika je početna brzina drugog tela i njegova maksimalna visina ako se tela mimoilaze na visini h=H/2?



Slika 5.6. 1

5.6.2.R

Ukupnu visinu možemo napisati na sledeći način:

$$H = h_1 + h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} + \frac{gt^2}{2} = v_0 t \tag{5.6. 1}$$

odakle dobijamo:

$$v_0 = \frac{H}{t} \tag{5.6. 2}$$

Put koji je prešlo prvo telo iznosi:

$$h_1 = \frac{gt^2}{2} = H - h = 72\text{m} \tag{5.6. 3}$$

odakle dobijamo odgovarajuće vreme:

$$t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{\frac{2(H - h)}{g}} = 3{,}83\text{s} \tag{5.6. 4}$$

a za početnu brzinu drugog tela, na osnovu (5.6.2), dobijamo:

$$v_0 = \frac{H}{t} = 26{,}11\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{5.6. 5}$$

b.
Maksimalna visina koju će postići drugo telo iznosi:

$$H_{max} = \frac{v_0^2}{2g} \approx 34{,}75\text{m} \qquad (5.6.\ 6\ )$$

c.
Ako se tela mimoilaze na visini $h=H/2$ dobijamo, na osnovu (5.6.4), vreme:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2\frac{H}{2}}{g}} = \sqrt{\frac{H}{g}} = 3{,}19\text{s} \qquad (5.6.\ 7\ )$$

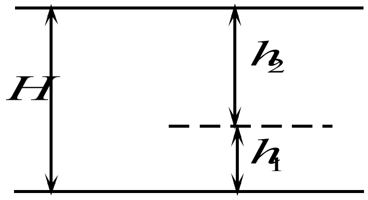
Odgovrajuća početna brzina iznosi:

$$v_0 = \frac{H}{t_1} = 31{,}35\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad (5.6.\ 8\ )$$

a maksimalna visina:

$$H_{max} = \frac{v_0^2}{2g} \approx 50{,}09\text{m} \qquad (5.6.\ 9\ )$$

5.6.3 Sa vrha tornja visine H=120m pušteno je telo da slobodno pada. U istom momentu sa zemlje ispod tornja bačeno je vertikalno uvis drugo telo početnom brzinom v_0=60m/s. Na kojoj visini će se tela mimoići? Kolika je relativna brzina u momentu mimoilaženja?



Slika 5.6. 2

5.6.3.R

Telo koje slobodno pada ponaša se po zakonima slobodnog padanja:

$$h_2 = \frac{gt^2}{2} \qquad (5.6.\ 10\ )$$

Telo koje je bačeno nagore početnom brzinom zadovoljava relaciju:

$$h_1 = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \qquad (5.6.\ 11\ )$$

Zbir ovih visina iznosi:

$$H = h_1 + h_2 = v_0 t - \frac{gt^2}{2} + \frac{gt^2}{2} = v_0 t \qquad (5.6.\ 12\ )$$

odakle dobijamo vreme potrebno da se tela mimoiđu:

$$t = \frac{H}{v_0} = 2\text{s} \qquad (5.6.\ 13)$$

Odgovarajuće visine (pređeni putevi) iznose:

$$h_1 = v_0 t - \frac{gt^2}{2} = 100{,}32\text{m} \qquad (5.6.\ 14)$$

odnosno:

$$h_2 = \frac{gt^2}{2} = 19{,}62\text{m} \qquad (5.6.\ 15)$$

Brzina prvog tela u trenutku mimoilaženja iznosi:

$$v_1 = gt = 19{,}62\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad (5.6.\ 16)$$

a drugog:

$$v_2 = v_0 - gt = 40{,}38\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad (5.6.\ 17)$$

Relativna brzina je:

$$v_r = v_1 + v_2 = 60\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad (5.6.\ 18)$$

5.6.4 Kolikom početnom brzinom v_0 treba baciti telo vertikalno naniže da bi sa visine 20m stiglo na površinu Zemlje za jednu sekundu? Koliku brzinu telo ima pri udaru o zemlju?

5.6.4.R

$$v_0 = \frac{2h - gt^2}{2t} = 15{,}09\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad (5.6.\ 19)$$

$$v = v_0 + gt = 24{,}9\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad (5.6.\ 20)$$

5.6.5 Telo se baci vertikalno naviše početnom brzinom v_0. Posle pređenih 200m brzina tela je v=200m/s. a. Kolika je početna brzina tela? b. Do koje visine će dospeti telo?

5.6.5.R

a.

$$v_0 = \sqrt{v^2 + 2gh} = 163\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b.

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} + h = 1348\text{m}$$

5.7 Kosi hitac

5.7.1 Telo se izbaci početnom brzinom v=100m/s pod uglom 30° prema horizontu.

a. U kom položaju će se telo nalaziti posle vremena t=5s?
b. Kolika je brzina tela u tom trenutku?

5.7.1.R

a.

$$x = v_{0x}t = v_0\cos\alpha t = 433\text{m} \tag{5.7. 1 }$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{5.7. 2 }$$

b.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{5.7. 3 }$$

$$v_x = v_0\cos\alpha = 86{,}6\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{5.7. 4 }$$

$$v_y = v_0\sin\alpha - gt = 0{,}95\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{5.7. 5 }$$

$v \approx 86{,}6\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

5.7.2 Nacrtati dijagrame komponenata brzine v_x(t) i v_x(t) tela iz prethodnog zadatka.

5.7.2.R

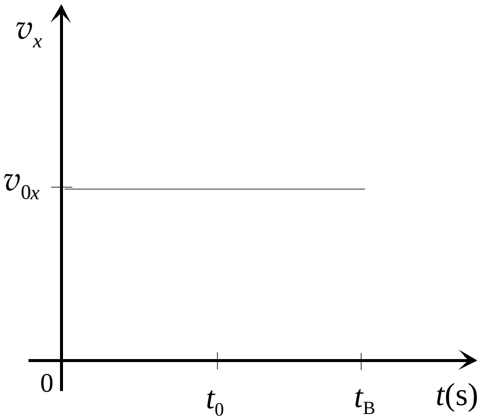
Horizontalna komponenta brzine $v_x = v_{0x} = v_0\cos\alpha = 100\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ stalna je u toku kretanja tela, pa je njen dijagram kao na slici 5.7.1. Vertikalna komponenta brzine linearno opada sa vremenom do trenutka

$$t = \frac{v_0\sin\alpha}{\text{g}} = 17{,}7\text{s} \tag{5.7. 6 }$$

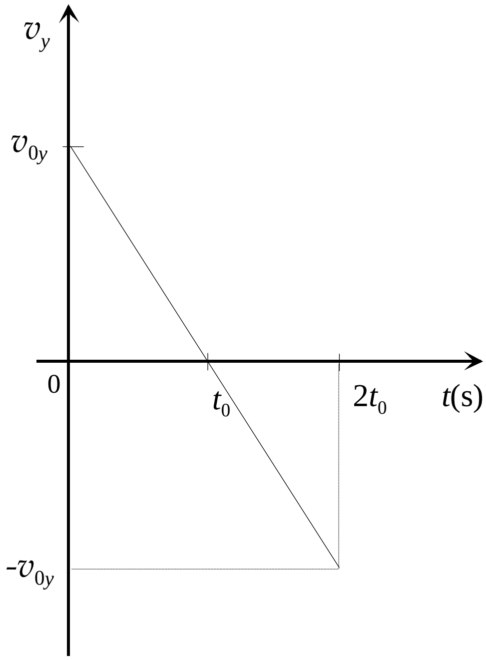
kada postaje jednaka nuli (u najvišoj tački putanje). Od tog trenutka pa do trenutka t_B=2t_0, kada telo padne na horizontalnu ravan sa koje je izbačeno, brzina (po apsoloutnoj vrednosti linearno raste sa vremenom i u trenutku t_B iznosi:

$$v_{yB} = v_0\sin\alpha - gt_B = -173{,}2\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{5.7. 7 }$$

što znači da je jednaka vertikalnoj komponenti početne brzine, samo ima suprotan smer (vidi sliku 5.7.2).



Slika 5.7. 1



Slika 5.7. 2

5.7.3 Brzina topovske granate prilikom ispaljivanja iznosi v_0=550m/s. Ona treba da pogodi cilj koji se nalazi na udaljenosti x=3200m. Pod kojim elevacionim uglom je potrebno ispaliti granatu?

5.7.3.R Iz relacije za domet

$$x_m = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \tag{5.7. 8}$$

nalazi se da je

$$\sin 2\alpha = \frac{g x_m}{v_0^2} = 0{,}126 \tag{5.7. 9}$$

$\alpha = 3°36'$

5.7.4 Topovska granata tokom svog kretanja treba da ima brzinu koja nije manja od $0{,}8v_0$, gde je v_0 - početna brzina granate. Koji opseg elevacionog ugla α odgovara ovom uslovu?

Brzina granate iznosi

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{5.7. 10}$$

gde je

$$v_x = v_0 \cos\alpha \tag{5.7. 11}$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt \tag{5.7. 12}$$

Pošto se komponenta brzine v_x ne menja tokom kretanja granate, to znači da će brzina v biti najmanja u trenutku t_0 , tj. kada je v_y=0, tj. kada je:

$$v_0 \sin\alpha - gt_0 = 0, \tag{5.7. 13}$$

odakle je vreme kretanja granate

$$t_0 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}. \tag{5.7. 14}$$

Tada je brzina granate:

$$v = \sqrt{v_x^2 + 0} = v_0 \cos\alpha \tag{5.7. 15}$$

Prema uslovu zadatka

$$v \geq 0{,}8 v_0 \tag{5.7. 16}$$

odnosno

$$v_0 \cos\alpha \geq 0{,}8 v_0 \tag{5.7. 17}$$

ili

$$\cos\alpha \geq 0{,}8 \tag{5.7. 18}$$

$\alpha \leq 36°52'$

5.7.5 Pod kojim uglom je potrebno izbaciti telo da bi njegov domet bio jednak najvećoj visini koju ono dostigne?

5.7.5.R Iz uslova zadatka

$$x_d = y_m \tag{5.7. 19}$$

imamo

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \tag{5.7. 20}$$

ili

$$tg\alpha = 4 \tag{5.7. 21}$$

$\alpha \approx 76°$

5.7.6 Raketni projektil treba da dostigne domet x_d= 50km. Koliku najmanju početnu brzinu on treba da ima?

5.7.6.R

$$x_d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \tag{5.7. 22}$$

odakle imamo

$$v_0 = \sqrt{\frac{g x_d}{\sin 2\alpha}} \tag{5.7. 23}$$

najmanja vrednost brzine za $\sin 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$

Tada brzina ima intenzitet $v_0 = \sqrt{g x_d} =\approx 700\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

5.7.7 Kada telo ima optimalni domet a kada optimalnu maksimalnu visinu? Koliki je odnos odgovarajućih vremena kretanja tela po putanji?

5.7.7.R

$$x_d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \tag{5.7. 24}$$

$\sin 2\alpha' = 1 \Rightarrow \alpha\text{"}=45°$

$x_{opt} = \dfrac{v_0^2}{g}$

$$y_m = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} \tag{5.7. 25}$$

$\sin\alpha'' = 1 \Rightarrow \alpha'' = 90°$

$$t' = \frac{v_0 \sin\alpha'}{g} = \frac{v_0\sqrt{2}}{2g} \tag{5.7. 26}$$

$$t'' = \frac{2v_0 \sin\alpha'}{g} = \frac{2v_0}{g} \tag{5.7. 27}$$

$\dfrac{t'}{t''} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} = 0{,}35$

5.7.8 Pod uglom α=30° prema horizontu izbaci se telo početnom brzinom v_0=100m/s.

a. Izračunati domet tela i najveću visinu koju telo dostigne tokom kretanja.
b. Koliko traje kretanje tela po uzlaznom delu putanje. a koliko po silaznom delu?

5.7.8.R

a.

$x_d = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 882{,}7\text{m}$

$y_m = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} = 254{,}8\text{m}$

b.

$t_{0M} = t_{MB} = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g} = 5{,}1\text{s}$

5.8 Horizontalni hitac

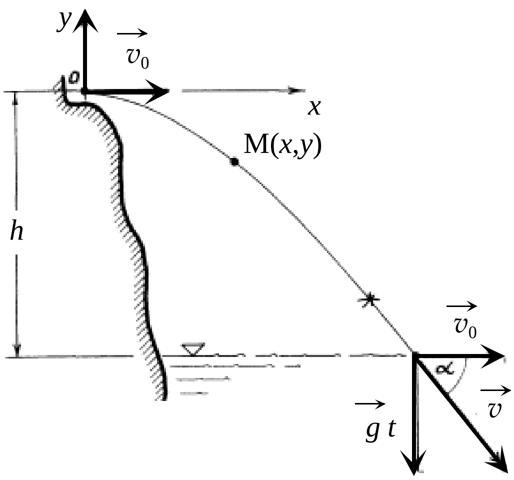
5.8.1 Sa morske obale, visine h_0=50 m, iz topa se ispali granata u horizontalnom pravcu. Brzina granate po ispaljenju je v_0=700 m/s.

a) U kom položaju se nalazi granata posle vremena t=l s od trenutka ispaljenja?
b) Kolika je brzina granate u tom trenutku?
c) Kolika je brzina granate pri padu na vodu?
d) Pod kojim uglom granata padne na vodu?
e) Koliko treba da bude vreme tempiranja granate da bi eksplodirela na visini h_1=10m iznad površine vode?

5.8.1.R a) Koordinate granate posle vremena t (njen položaj M) jesu:

$$x = v_0 t = 700\text{m}$$

$$y = h - \frac{gt^2}{2} = 45{,}1\text{m}$$



Slika 5.8. 1

b) Brzina granate u položaju M je:

$$v = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2} = 700{,}1\text{m}$$

c) Granata će pasti u vodu posle vremena $t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$, pa će njena brzina u tom trenutku da bude

$$v = \sqrt{v_0^2 + (gt_0)^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0} = 700{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

d) Pošto je

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{gt_0}{v_0} = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0} = 0{,}0447$$

nalazi se da je α = 2° 34'.

e) Vreme tempiranja granate, da bi eksplodirala na visini h_1, treba da bude jednako vremenu t_1 za koje se telo nađe u položaju pri kome je $y = h_0 - h_1$, pa je

$$y = h_0 - \frac{gt_1^2}{2}$$

odnosno

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(h_0 - h_1)}{g}} = 2{,}86\mathrm{s}$$

5.8.2 Avion leti po pravoj i horizontalnoj putanji, na visini h=5500 m, brzinom v_0=900km/h. Iz aviona se ispusti bomba, pri čemu joj se ne saopšti početna brzina u odnosu na avion.

a) Posle koliko vremena će bomba pasti na zemlju?

b) Koliko treba da bude vreme tempiranja bombe da bi eksplodirala na visini h_1=100m iznad zemlje?

c) Kolikom brzinom će bomba pasti na zemlju?

5.8.2.R Dok se nalazi u avionu bomba se u odnosu na Zemlju kreće brzinom koja je jednaka brzini aviona v_0. Kada se bomba ispusti iz aviona, njena brzina u horizontalnom pravcu neće se promeniti, tj. bomba će se kretati u ovom pravcu ravnomerno brzinom v_x= v_0. Njeno kretanje u vertikalnom pravcu biće slobodni pad, pa je

$$v_y = gt\,,\ \ y = \frac{gt^2}{2}$$

Prema tome, kretanje bombe spuštene iz aviona je horizontalni hitac.

a) Bomba će pasti na Zemlju posle vremena

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 33{,}5\mathrm{s}\,.$$

b) Vreme tempiranja bombe treba da bude

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(h_0 - h_1)}{g}} = 33{,}3\mathrm{s}$$

c) Brzina bombe u trenutku pada biće

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 412{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

jer je v = 900 km/h = 250 m/s.

5.9 Kosmičke brzine

5.9.1 Znajući da je prečnik Meseca d=3478 km, a ubrzanje slobodnog padanja na njegovoj površini g=l,62m/s^2, izračunati prvu kosmičku brzinu za Mesec.

5.9.1.R Brzina koju treba da ima veštački satelit nekog nebeskog tela da bi se kretao oko njega po kružnoj putanji dobija se iz uslova dinamičke ravnoteže gravitacione sile $\vec{F}_g$ i centrifugalne (inercijalne sile) $\vec{F}_c$ koje deluju na satelit. Kako je

$$F_g = \gamma \frac{mM}{(R+h)^2}, \text{ a } F_c = \frac{mv^2}{R+h}$$

to je

$$\gamma \frac{mM}{(R+h)^2} = \frac{mv^2}{R+h}$$

gde je m — masa satelita, M - masa nebeskog tela, R — njegov poluprečnik, h — visina satelita, γ - gravitaciona konstanta, v — brzina satelita. Iz prethodne jednačine dobija se da je

$$v = \sqrt{\gamma \frac{M}{R+h}} = R\sqrt{\gamma \frac{M}{R^2}(R+h)} = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}$$

Brzina definisana prethodnim obrascem predstavlja prvu kosmičku brzinu. Ako je h=0 (za Zemlju to znači granicu atmosfere), pa je

$$v_1 = \sqrt{Rg_0}$$

Prema tome, prva kosmička brzina za Mesec je $v_1 = 1{,}7\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$.

5.9.2 Imajući u vidu prethodni zadatak, izračunati drugu kosmičku brzinu za Mesec.

5.9.2.R Druga kosmička brzina je ona brzina koju treba saopštiti telu na nekoj planeti (ili nekom drugom nebeskom telu) da bi ono moglo da napusti zonu dejstva njenog gravitacionog polja. Potrebna kinetička energija tela jednaka je radu koji je potrebno uložiti na savladivanje gravitacionih sila pri pomeranju tela sa površine planete do beskonačnosti. Dakle,

$$\frac{mv_2^2}{2} = \gamma m M\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\infty}\right)$$

odakle je

$$v_2 = \sqrt{2\gamma \frac{M}{R}} = \sqrt{2\gamma \frac{M}{R^2}R} = \sqrt{2}\sqrt{g_0 R} = \sqrt{2}v_1 = 2{,}4\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$$

5.10 Trenje

5.10.1 Na horizontalnoj podlozi se nalazi telo mase 500 kg. Kolikom silom treba delovati na telo u horizontalnom pravcu da bi se ono pokrenulo. Koeficijent trenja između tela i podloge je μ=0.2.

5.10.1.R

$F = F_{tr} = \mu mg = 981\mathrm{N}$

5.10.2 Na horizontalnoj podlozi se nalazi telo mase m = 100 kg. Najmanja sila koja može da pokrene telo iznosi F = 196.2 N. Odrediti koeficijent trenja klizanja između tela i podloge.

5.10.2.R

$$\mu = \frac{F}{mg} = 0{,}2$$

5.10.3 Telo mase m = 400 kg leži na horizontalnoj podlozi. Na telo deluje u horizontalnom pravcu sila intenziteta F = 294 N. Koliko je ubrzanje tela? Koeficijent trenja između tela i podloge iznosi μ = 0.1.

5.10.3.R

Iz osnovne relacije dinamike translacije:

$$ma = F - \mu mg \tag{5.10. 1 }$$

sledi

$$a = \frac{F - \mu mg}{m} = 0{,}64\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{5.10. 2 }$$

5.10.4 Telo mase m nalazi se na horizontalnoj podlozi. Koeficijent trenja između tela i podloge je k. Kolikom silom treba delovati na telo u horizontalnom pravcu da bi ono imalo ubrzanje jednako ubrzanju Zemljine teže?

5.10.4.R

Osnovna relacija dinamike translacije u ovom slučaju ima oblik:

$$ma = F - \mu mg \tag{5.10. 3 }$$

Ako stavimo uslov zadatka $a = g$:

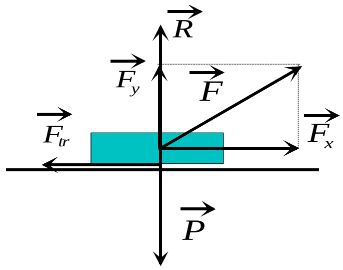
$$mg = F - \mu mg \tag{5.10. 4 }$$

odakle dobijamo:

$$F = mg(\mu + 1) \tag{5.10. 5 }$$

5.10.5 Telo mase 3kg leži na horizontalnoj podlozi. Na njega počne da deluje sila intenziteta 20N pod uglom 30° prema horizontali naviše. Kolikim ubrzanjem će se kretati telo ako je koeficijent trenja 0,4?

5.10.5.R



Slika 5.10. 1

Osnovna relacija dinamike translacije po horizontali ima oblik:

$$m\vec{a}_p = \vec{F}_p + \vec{F}_{tr} \qquad (5.10.\ 6\ )$$

odnosno u skalarnom obliku:

$$ma = F_p - F_{tr} \qquad (5.10.\ 7\ )$$

Sa slike 5.10.1 je očigledno:

$$F_p = F\frac{\sqrt{3}}{2}, F_n = \frac{F}{2} \qquad (5.10.\ 8\ )$$

Sila trenja je po definiciji:

$$F_{tr} = \mu R \qquad (5.10.\ 9\ )$$

Osnovna relacija dinamike translacije po vertikali ima oblik:

$$m\vec{a}_n = \vec{P} + \vec{F}_n + \vec{R} \qquad (5.10.\ 10\ )$$

odnosno u skalarnom obliku:

$$0 = P - F_n - R \qquad (5.10.\ 11\ )$$

ili

$$R = P - F_n \qquad (5.10.\ 12\ )$$

Tada će sila trenja biti:

$$F_{tr} = \mu(P - F_n) = \mu\left(mg - \frac{F}{2}\right) \qquad (5.10.\ 13\ )$$

Uvrštavajući (5.10.13) i (5.10.8) u (5.10.7)

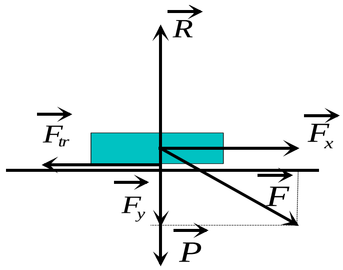
$$ma = F\frac{\sqrt{3}}{2} - \mu\left(mg - \frac{F}{2}\right) \qquad (5.10.\ 14\ )$$

odakle dobijamo:

$$a = \frac{F\sqrt{3}}{2m} - \mu\left(g - \frac{F}{2m}\right) \qquad (5.10.\ 15\ )$$

5.10.6 Telo mase 3kg leži na horizontalnoj podlozi. Na njega počne da deluje sila intenziteta 20N pod uglom 30° prema horizontali naniže. Kolikim ubrzanjem će se kretati telo ako je koeficijent trenja 0,4?

5.10.6.R



Slika 5.10.6.1

Osnovna relacija dinamike translacije po horizontali ima oblik:

$$m\vec{a}_p = \vec{F}_p + \vec{F}_{tr} \tag{5.10. 16 }$$

odnosno

$$ma = F_p - F_{tr} \tag{5.10. 17 }$$

Sa slike je očigledno

$$F_p = F\frac{\sqrt{3}}{2}, F_n = \frac{F}{2} \tag{5.10. 18 }$$

Sila trenja je po definiciji

$$F_{tr} = \mu R \tag{5.10. 19 }$$

Osnovna relacija dinamike translacije po vertikali ima oblik:

$$m\vec{a}_n = \vec{P} + \vec{F}_n + \vec{R} \tag{5.10. 20 }$$

odnosno

$$0 = P + F_n - R \tag{5.10. 21 }$$

ili

$$R = P + F_n \tag{5.10. 22 }$$

Sila trenja u tom slučaju ima oblik

$$F_{tr} = \mu(P + F_n) = \mu\left(mg + \frac{F}{2}\right) \tag{5.10. 23 }$$

Uvrštavajući (5.10.23) i (5.10.18) u (5.10.17) dobijamo

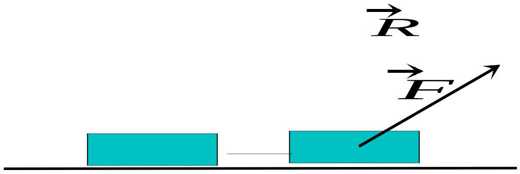
$$ma = F\frac{\sqrt{3}}{2} - \mu\left(mg + \frac{F}{2}\right) \tag{5.10. 24 }$$

odnosno

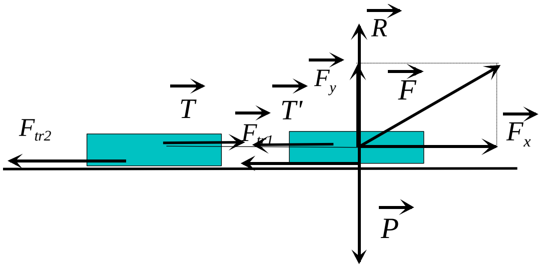
$$a = \frac{F\sqrt{3}}{2m} - \mu\left(g + \frac{F}{2m}\right) = 0{,}45\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{5.10. 25 }$$

5.10.7 Kolikim ubrzanjem se kreću tela mase m pod dejstvom sile F po podlozi u sistemu prikazanom na slici 5.10.3 ako je koeficijent trenja μ?

5.10.7.R



Slika 5.10.2



Slika 5.10.3

Osnovna relacija dinamike translacije po horizontali za prvo telo ima oblik:

$$m\vec{a}_p = \vec{F}_p + \vec{F}_{tr1} + \vec{T}' \quad (5.10.1)$$

ili u skalarnom obliku:

$$ma = F_p - F_{tr1} - T \quad (5.10.2)$$

Sa slike 5.10.3 je očigledno:

$$F_p = F\frac{\sqrt{3}}{2} \quad F_n = \frac{F}{2} \quad (5.10.3)$$

Sila trenja ima oblik

$$F_{tr1} = \mu R_1 \quad (5.10.4)$$

Osnovna relacija dinamike translacije po vertikali za prvo telo ima oblik:

$$m\vec{a}_n = \vec{P} + \vec{F}_n + \vec{R}_1 \quad (5.10.5)$$

ili

$$0 = P - F_n - R_1 \quad (5.10.6)$$

odnosno

$$R_1 = P - F_n \quad (5.10.7)$$

Čitaocu se prepušta da dovrši preostli deo posla. Ubrzanje sistem iznosi:

$$a = \frac{F}{4m}\left(\sqrt{3} + 1\right) \quad (5.10.8)$$

6. Struktura čvrstih tela i deformacija

6.1 Toplotno širenje čvrstih tela

6.1.1 Dužina šine na temperaturi 23°C iznosi 116m. Kolika joj je dužina na 0°C? Termički koeficijent linearnog širenja iznosi $1{,}2\cdot10^{-5}$ °C^{-1}.

6.1.1.R Iz zakona linearnog širenja čiji je oblik:

$$l = l_0(1+\alpha t)$$

sledi da je:

$$l_0 = \frac{l}{1+\alpha t} = 115{,}965\,\mathrm{m}$$

6.1.2 Dužina aluminijumske žice između dva dalekovodna stuba zimi, na -10°C, iznosi 200m. Kolika će biti dužina iste žice leti na 30 °C? Termički koeficijent linearnog širenja za aluminijum iznosi $2{,}3\cdot10^{-5}$ C^{-1}.

6.1.2.R Prema zakonu termičkog širenja leti je:

$$l_2 = l_0(1+\alpha t_2)$$

Dužinu l_0 možemo izračunati iz poznate dužine na -10°C:

$$l_1 = l_0(1+\alpha t_1)$$

odnosno:

$$l_0 = \frac{l_1}{1+\alpha t_1}$$

Tada je:

$$l_2 = l_1\frac{1+\alpha t_2}{1+\alpha t_1} = 200{,}184\,\mathrm{m}$$

6.1.3 Dužina železničke šine na 5 °C iznosi 80m, a rastojanje između dve susedne šine 18mm. Da li će se šine deformisati leti usled termičkog širenja ako se njihova temperatura povisi na 50 °C? Termički koeficijent linearnog širenja gvožđa iznosi $1{,}2\cdot10^{-5}$ °C^{-1} .

6.1.3.R Šina će se deformisati ako je izduženje veće od rastojanja između šina:

$$\Delta l > d$$

Za zadate uslove izduženje iznosi:

$$\Delta l = l_2 - l_1 = l_0(1+\alpha t_2) - l_1$$

Dužinu na 0°C izračunavamo iz uslova da na 5°C njena dužina iznosi

$$l_1 = l_0(1+\alpha t_1)$$

$$l_0 = \frac{l_1}{1+\alpha t_1}$$

Konačno je:

$$\Delta l = l_1 \frac{1+\alpha t_2}{1+\alpha t_1} - l_1 = l_1 \frac{\alpha(t_2 - t_1)}{1+\alpha t_1} = 43{,}2\text{mm}$$

Dakle, šina će se deformisati.

6.1.4 Termički koeficijent linearnog širenja ebonita iznosi $1{,}2\cdot10^{-5}$ °C^{-1}. Koliki je njegov termički koeficijent zapreminskog širenja?

6.1.4.R Da bismo našli vezu između termičkh koeficijenata linearnog i zapreminskog širenja ma kog materijala, posmatrajmo kocku ivice *l*, načinjenu od tog materijala. Sa promenom temperature njene linearne dimenzije (dužina, širina i visina) menjaju se po zakonu:

$$l = l_0(1+\alpha t)$$

a zapremina:

$$V = V_0(1+\beta t)$$

Kad se prva jednakost kubira, dobija se:

$$l^3 = l_0^3(1+\alpha t)^3$$

odnosno

$$l^3 = l_0^3\left(1+3\alpha t+3\alpha^2 t^2+\alpha^3 t^3\right)$$

Kako je za datu kocku:

$$V = l^3$$

ili

$$V_0 = l_0^3$$

a članovi $3\alpha^2 t^2$ i $\alpha^3 t^3$ su zanemarljivi (jer je brojna vrednost koeficijenta α reda veličine 10^{-5}), sledi da je:

$$V = V_0(1+3\alpha t)$$

Upoređivanjem koeficijenata uočavamo da je:

$$\beta = 3\alpha$$

Za ebonit je:

$$\beta = 2{,}1\cdot10^{-4}\,°C^{-1}$$

6.1.5 Gustina gvožđa na 20 °C iznosi 7800kg/m^3. Kolika mu je gustina na 100°C? Koeficijent zapreminskog širenja gvožđa iznosi $3{,}6\cdot10^{-5}$ °C^{-1} .

6.1.5.R Gustine na temperaturama t_1 i t_2 su:

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{1+\beta t_1}$$

i

$$\rho_2 = \frac{\rho_0}{1+\beta t_2}$$

gde je ρ_0 gustina na 0°C. Odavde je:

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{1+\beta t_1}{1+\beta t_2} = 7777{,}6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

6.2 Hukov zakon

6.2.1 Koliki najmanji poluprečnik žice treba uzeti da pri opterećenju od 3039,52N ne nastane plastična deformacija? Granica elastičnosti materijala od kojeg je žica napravljena iznosi $2 \cdot 10^8 \dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

6.2.1.R
Iz:

$$\sigma_g = \frac{F}{S} = \frac{F}{r^2\pi}$$

sledi:

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi\sigma_g}} 2{,}2 \cdot 10^{-3}\,\text{m}$$

6.2.2 Kolikog poprečnog preseka treba da bude čelična šipka da bi pri opterećenju od 30 kN napon u njoj iznosio $60 \dfrac{\text{N}}{\text{mm}^2}$. Naći apsolutno istezanje iste šipke ako je njena dužina 20 m, a modul elastičnosti $2 \cdot 10^{11}\,\text{N/m}^2$.

6.2.2.R Prema definiciji je:

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

Odatle sledi:

$$S = \frac{F}{\sigma} = 5 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2$$

Iz Hukovog zakona dobijamo:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\frac{F}{S};\ \Delta l = \frac{1}{E}\frac{F}{S} l = 6\text{mm}$$

7. Oscilacije

7.1 Harmonijske oscilacije

7.1.1 Kružna frekvencija oscilacija je 4π rad/s. Koliki su period i linearna frekevencija?

7.1.1.R

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}5\text{s}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = 2\text{Hz}$$

7.1.2 Telo za 26s izvrši 13 oscilacija. Koliki su period, linearna i kružna frekvencija ovih oscilacija.

7.1.2.R

$$T = \frac{t}{n} = 2\text{s}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = 0{,}5\text{Hz}$$

$$\omega = 2\pi\nu = 3{,}14\frac{1}{\text{s}}$$

7.1.3 Ako se period uveća za 0,4s, frekvencija se smanji 3 puta. Koliki je period oscilovanja u oba slučaja?

7.1.3.R

$$T_0 = \frac{1}{\nu_0}\ ;\ T = T_0 + \Delta T = \frac{1}{\nu}\ ;\ \nu = \frac{\nu_0}{3}$$

$T_0 = 0{,}2\text{s}$; $T = 0{,}6\text{s}$

7.1.4 Koeficijent elastičnosti opruge je k=20N/m a masa tela koje osciluje na toj opruzi je 0,2kg. Koliki su:

a. period oscilovanja?
b. linearna frekvencija oscilovanja?
c. kružna frekvencija oscilovanja?

7.1.4.R

a. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 0{,}628\text{s}$

b. $\nu = 1{,}6\text{Hz}$
c. $\omega = 10$ rad/s

7.1.5 Da bi se period oscilovanja materijalne tačke mase $m = 0{,}2$kg udvostručio, za koliko je potrebno uvećati masu tela koje osciluje?

7.1.5.R

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}};2\cdot T = 2\pi\sqrt{\frac{m+\Delta m}{k}};$$

$$2 = \sqrt{\frac{m+\Delta m}{m}};\ 4 = \frac{m+\Delta m}{m}$$

$\Delta m = 3m = 0{,}6$ kg

7.1.6 Amplituda sinusoidalnog oscilovanja je 5cm a početna faza $3\pi/2$. Napiši jednačinu oscilatornog kretanja, ako je period oscilovanja π s.

7.1.6.R

$$x = 5\sin(2t + \frac{3\pi}{2})[\text{cm}]$$

7.1.7 Koliki je period oscilovanja boce mase 0,3kg i površine poprečnog preseka 50cm^2, ako pliva u vodi u vertikalnom položaju?

7.1.7.R

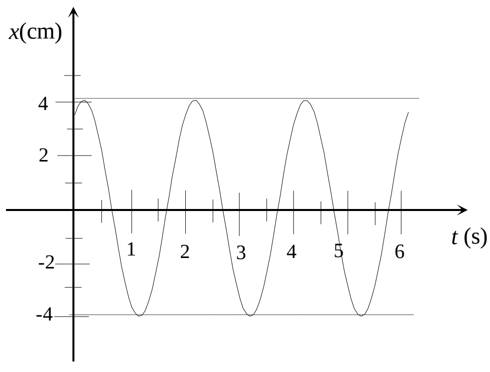
$$m\cdot a = -\rho\cdot V\cdot g = -\rho\cdot S\cdot g\cdot x$$

$T = 0{,}5$s

7.1.8 Nacrtaj grafike sledećih oscilatornih procesa u osnovnom periodu:

$x=4\cos(3t+\pi/3)$ (cm)

7.1.8.R



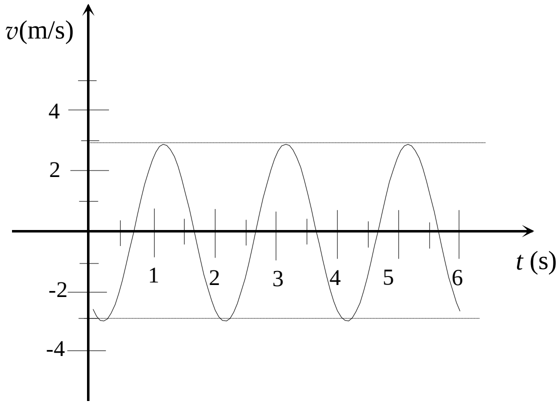
Slika 7.1. 1

7.2 Brzina i ubrzanje harmonijskog oscilatora

7.2.1 Nacrtati grafike brzina pri harmonijskom oscilovanju u osnovnom periodu:

a. v=-3 sin (3t+ π/3) (m/s)

7.2.1.R

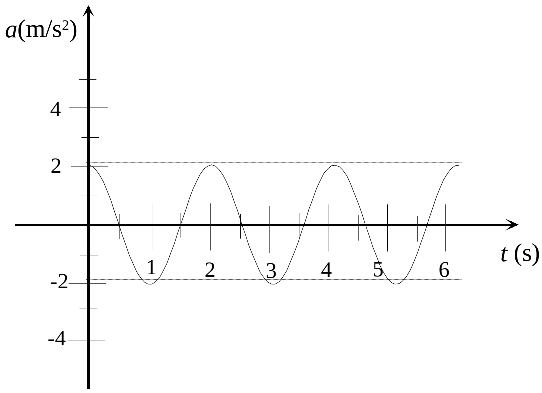


Slika 7.2. 1

7.2.2 Predstavi grafički ubrzanje HO u osnovnom intervalu

a = 2 sin (3t + π/2) (m/s^2)

7.2.2.R



Slika 7.2. 2

7.3 Energija harmonijskog oscilatora

7.3.1 Materijalna tačka mase 0,1kg osciluje po zakonu:

$x = 5 \sin \pi/4\ t$ (cm)

Odrediti kinetičku energiju, potencijalnu energiju, ukupnu energiju, brzinu i ubrzanje za t=2s.

7.3.1.R

$E_p = 0{,}77\ 10^{-4}$ J

$E_k = 0$ J

$E = 0{,}77\ 10^{-4}$ J

$v = 0$ m/s

$a = 3{,}9\ 10^{-2}$ m/s^2

7.3.2 Materijalna tačka mase 2g vrši harmonijsko oscilovanje po kosinusnom zakonu. Period oscilovanja je 0,4s a početna faza je jednaka nuli. Ukupna energija oscilovanja je 9,86mJ. Napisati jednačinu oscilovanja ove materijalne tačke. Kolika je maksimalna elastična sila koja deluje na tu materijalnu tačku?

7.3.2.R

$x = 0{,}2 \cos 5t\,[\mathrm{m}]$

F_{max} = -10mN

7.4 Matematičko klatno

7.4.1 Period oscilovanja matematičkog klatna ćemo odrediti tako što ćemo meriti vreme t za koje se izvrši n oscilacija. Ako je vreme za koje se izvrše 20 oscilacija 12s, koliki je period takvog oscilovanja?

7.4.1.R

T = 0,6s

7.4.2 Naći odnos dužina dva matematička klatna ako je odnos njihovih perioda 2.

7.4.2.R

$$\frac{l_1}{l_2} = 4$$

7.4.3 Naći odnos perioda dva matematička klatna ako je odnos njihovih dužina 4.

7.4.3.R

$$\frac{T_1}{T_2} = 2$$

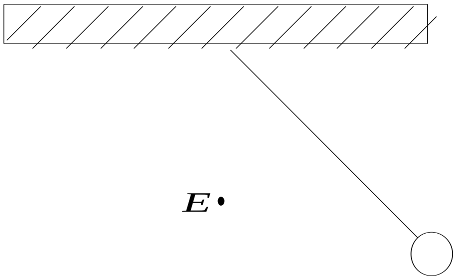
7.4.4 Matematičko klatno dužine 2m je izvedeno iz ravnotežnog položaja i pušteno da slobodno osciluje. Na svom putu nailazi na ekser E, udaljen 1m po vertikali od tačke vešanja (vidi sliku 2.15). Odrediti period oscilovanja klatna ako je amplituda oscilovanja mala i trenje zanemarljivo($g=10\mathrm{m/s^2}$).

7.4.4.R

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \;;\; T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{l}{2}}{g}}$$

$$T = 2{,}4\mathrm{s}$$



Slika 7.4. 1

7.5 Slaganje oscilacija istih frekevencija

7.5.1 Naći složeno oscilovanje analitički i grafički, ako je ono sastavljeno od dva harmonijska oscilovanja data jednačinama:

$$x_1 = 2{,}5\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)(\mathrm{cm})$$

i

$$x_2 = 5\cos\left(\pi t + \frac{5\pi}{4}\right)(\mathrm{cm})$$

7.5.1.R

Rezultujuća amplituda iznosi:

$$x_0^2 = x_{01}^2 + x_{01}^2 + 2x_{01}x_{02}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{25}{4}$$

odnosno

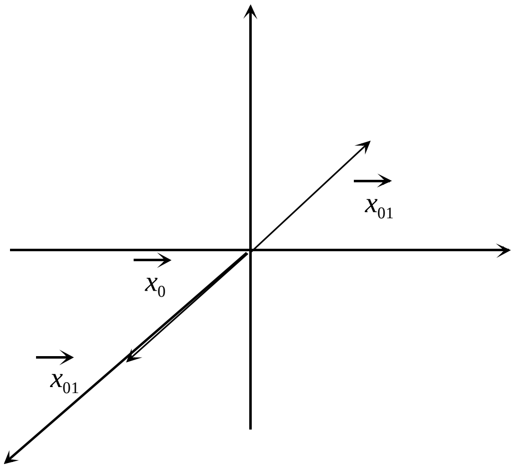
$$x_0 = 2{,}5 \text{ cm}$$

Fazu rezultujućeg oscilovanja nalazimo iz relacije:

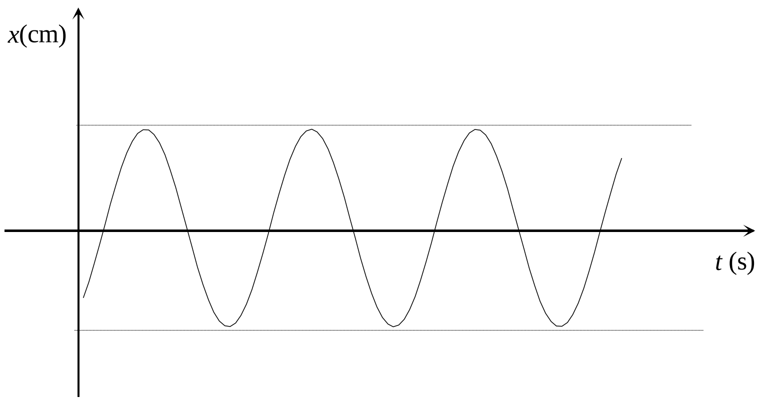
$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{x_{01}\sin\varphi_1 + x_{02}\sin\varphi_2}{x_{01}\cos\varphi_1 + x_{02}\cos\varphi_2}$$

odakle dobijamo:
$\varphi_0 = 45°$ i $\varphi_0 = 225°$
Na taj način dobijamo konačnu relaciju za oscilovanje složenog sistema:

$$x = 2{,}5\cos\left(\pi t + \frac{5\pi}{4}\right)(\mathrm{cm})$$



Slika 7.5. 1



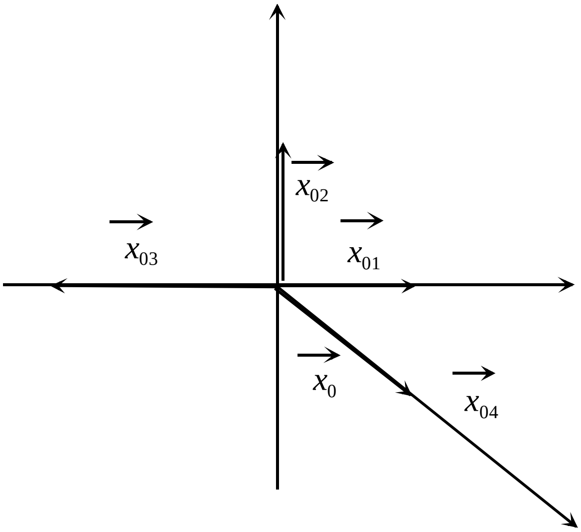
Slika 7.5. 2

7.5.2 Naći amplitudu i početnu fazu analitički i grafički ako je rezultujuće oscilovanje dato jednačinom:

$x = \cos 2\pi t + \cos(2\pi t+\pi/2) + 2\cos(2\pi t+\pi) + 2\sqrt{2}\cdot\cos(2\pi t+7\pi/4)$(cm)

7.5.2.R

$x_0 = \sqrt{2}\,\text{cm}\,;\ \varphi_0 = \frac{7\pi}{4}\,\text{rad}$



Slika 7.5. 3

7.6 Prigušene oscilacije

7.6.1 Koeficijent prigušenja oscilacija klatna iznosi $\beta = 0{,}04\text{s}^{-1}$. Koliki je odnos dveju uzastopnih amplituda takvog oscilovanja ako je period $T = 2{,}5$s?

7.6.1.R Jednačina prigušenih oscilacijaje $x = x_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi_0)$, gde je β koeficijent prigušenja, a ω kružna frekvencija prigušenih oscilacija Izraz $x_0 e^{-\beta t}$ pokazuje kako se menja amplituda zbog prigušenja. Ako je u nekom trenutku t amplituda $x_{01} = x_0 e^{-\beta t}$, prva sledeća amplituda je $x_{02} = x_0 e^{-\beta(t+T)}$. Odnos ove dve amplitude je

$$\frac{x_{01}}{x_{02}} = \frac{x_0 e^{-\beta t}}{x_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T} = e^{0,1} = 1{,}1$$

8. Talasi

8.1 Talasna dužina. Brzina talasa

8.1.1 Period oscilovanja čestica sredine pri talasnom kretanju iznosi 0,2s, a talasna dužina talasa iznosi 70cm. Odredi brzinu talasa kroz datu sredinu.

8.1.1.R

$$u = \frac{\lambda}{T} = 3.5 \text{ m/s}$$

8.1.2 Brzina talasa kroz datu sredinu iznosi 500m/s, a talasna dužina iznosi 0,5m. Odrediti frekvenciju i period talasa.

8.1.2.R

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = 1\text{kHz} \qquad T = \frac{1}{\nu} = 1\text{ms} .$$

8.1.3 Dva talasa frekvencija 500 Hz i 1800 Hz prostiru se kroz istu sredinu. Kako se odnose njihove talasne dužine?

8.1.3.R

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\dfrac{u}{\nu_1}}{\dfrac{u}{\nu_2}} = \frac{\nu_2}{\nu_1} = 3{,}6$$

8.1.4 Kolika je brzina prostiranja talasa kroz vodu zapreminskog modula elastičnosti $2 \cdot 10^9$ N/m^2? Gustina vode je 1g/cm^3.

8.1.4.R

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 1410 \text{ m/s}$$

8.1.5 Naći brzinu transferzalnog talasa kroz žicu zategnutu silom od 36 N. Linearna gustina žice je $4 \cdot 10^{-3}$kg/m.

8.1.5.R

$$u = \sqrt{\frac{F_z}{\mu}}$$

$$u = 94{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

8.1.6 Odrediti brzinu prostiranja zvuka kroz vazduh pri normalnim uslovima. (ρ = 1,29kg/m^3 ; p = 101kPa ; γ = 1,4)

8.1.6.R

$$u = \sqrt{\gamma\frac{p}{\rho}} = 331\text{ m/s}$$

8.1.7 Nađi brzinu prostiranja talasa kroz vazduh temperature 300 K. Molarna masa vazduha je 29·10^{-3} kg/mol, Poasonov koeficijent 1,4, a univerzalna gasna konstanta 8,3J/Kmol.

8.1.7.R

$$u = \sqrt{\gamma\frac{RT}{M}}$$

$$u = 3{,}47\cdot 10^2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

8.1.8 Kolika je temperatura vodonika ako se kroz njega prostire talas brzinom 400 m/s? Molarna masa za H_2 je 2 g/mol, γ = 1,4, a R = 8,3 J/K mol.

8.1.8.R

$$u = \sqrt{\gamma\frac{RT}{M}}$$

$$u^2 = \gamma\frac{RT}{M}$$

$$T = \frac{Mu^2}{\gamma R}$$

$$T = 27{,}5\text{K}$$

8.1.9 Dve tačke talasa su udaljene 0,5m. Ako je brzina talasa 80m/s a frekevencija oscilovanja čestica 40Hz, kolika je fazna razlika za posmatrane dve tačke?

8.1.9.R

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{u}\cdot\nu = \frac{\pi}{2}$$

8.1.10 Ako se čelični štap dužine l=1,5m i poprečnog preseka površine S=1,83cm^2 optereti tegom težine Q=4905N, istegne se za Δl=0,2mm. Odredi brzinu prostiranja longitudinalne deformacije kroz čelik. Zapreminska masa (gustina) čelika je ρ = 7850 kg/m³ .(Težina samog štapa se zanemaruje).

8.1.10.R

$$\frac{\Delta l}{l_0}=\frac{1}{E}\frac{Q}{S}\Rightarrow E=\frac{Ql_0}{\Delta\ell S}=2{,}01\cdot 10^{11}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

$$u=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

u = 5060 m/s

8.2 Energija i intenzitet talasa

8.2.1 Naći zapreminsku gustinu energije talasa frekvencije 400Hz i amplitude 5cm koji se prostiru kroz materijalnu sredinu gustine 1,2g/cm³.

8.2.1.R

$$w=\frac{1}{2}\rho\cdot\omega^2\cdot x_0^2=9{,}46\cdot 10^6\,\mathrm{J}$$

8.2.2 Zapreminska gustina energije talasa amplitude 2 cm koji se prostire kroz sredinu gustine 1,5 kg/m³ iznosi 0,5 kJ/m³. Odrediti frekvenciju oscilovanja.

8.2.2.R

$$w=\frac{1}{2}\rho\omega^2x_0^2=\frac{1}{2}\rho(2\pi\nu)^2x_0^2$$

$$\nu^2=\frac{w}{2\rho\pi^2x_0^2}$$

$$\nu=\sqrt{\frac{w}{2\rho\pi^2x_0^2}}=\frac{1}{\pi x_0}\sqrt{\frac{w}{2\rho}}$$

$$\nu=205{,}6\,\mathrm{Hz}$$

8.2.3 Nađi intenzitet talasa talasne dužine 0,3 m, frekvencije oscilovanja 500 Hz i amplitude 2 cm. Talas se prostire kroz sredinu gustine 1,5 kg/m³.

8.2.3.R

$$I=\frac{1}{2}\rho u\omega^2x_0^2=\frac{1}{2}\rho\lambda\nu(2\pi\nu)^2x_0^2=2\pi^2\rho\lambda\nu^3x_0^2$$

$$I=4{,}4\cdot 10^5\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

8.2.4 Koliki je intenzitet talasa ako on prenese energiju od 600J kroz površinu od 2m^2 normalnu na pravac prostiranja talasa u svakoj sekundi.

8.2.4.R

$$I = \frac{E}{S \cdot t} = 300\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

8.3 Jednačina talasa

8.3.1 Data je jednačina progresivnog talasa:

$$y = 3 \cdot \cos 2\pi(50t - \frac{x}{30})(\text{cm})$$

Odrediti:
a. amplitudu oscilovanja tačaka talasa.
b. frekvenciju i period oscilovanja tačaka talasa.
c. kružnu frekvenciju oscilovanja tačaka tačasa.
d. talasnu dužinu.
e. brzinu talasa.
f. talasni broj.

$$y = y_0 \cdot \cos 2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda})(\text{cm})$$

8.3.1.R
a. y_0 = 3cm ;
b. ν = 50Hz ; $T = \frac{1}{\nu}$ = 0,02s;
c. $\omega = 2\pi\nu = 100\pi$ rad/s;
d. λ = 30m ;
e. $u = \frac{\lambda}{T}$ = 1500 m/s ;
f. $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ = 0,2 1/m

8.3.2 Duž dugačke zategnute elastične žice prostire se transverzalni talas čija je brzina 15m/s, a period oscilovanja tačaka na žici je 1,2s. Amplituda oscilovanja je 2cm. Izračunati:

a. Kolika je faza, talasna dužina, elongacija, brzina i ubrzanje tačke koja se nalazi na rastojanju 45m od talasnog izvora u trenutku t=4s od pošetka kretanja talasa iz izvora.

b. Kolka je fazna razlika za dve tačke na žici koje se nalaze na rastojanju 30m i 20m od izvora talasa?

8.3.2.R

a. $\varphi = 300° = 5\pi/3$; $\lambda = 18$m ; $x = -1{,}74$cm

$u = 0{,}05$ m/s ; $a = 0{,}48$ m/s^2

b. $\Delta\varphi = 200°$

8.3.3 Harmonijski talas se prostire brzinom 60m/s. Dve tačke sredine u smeru širenja talasa su udaljene 2,5cm osciluju s faznom razlikom 30°.

a. Kolika je frekvencija i talasna dužina?

b. Napisati jednačinu talasa ako je za t=0 i y=0 elongacija 0, a amplituda x=5cm.

8.3.3.R

a.

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x \; ; \; \nu = \frac{u}{\lambda}$$

$\lambda = 0{,}3$ m ; $\nu = 200$Hz

b.

$$y(x,t) = y_0 \sin\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

$$y(x,t) = 5 \cdot \sin(400\pi t - \frac{2\pi x}{0{,}3})[\mathrm{cm}]$$

8.3.4 Harmonijsko oscilovanje tačke u izvoru talasa je opisano jednačinom:

$$y = 0{,}2\sin\pi t(\mathrm{m})$$

a. Napisati jednačinu talasa koji se širi brzinom 200m/s.

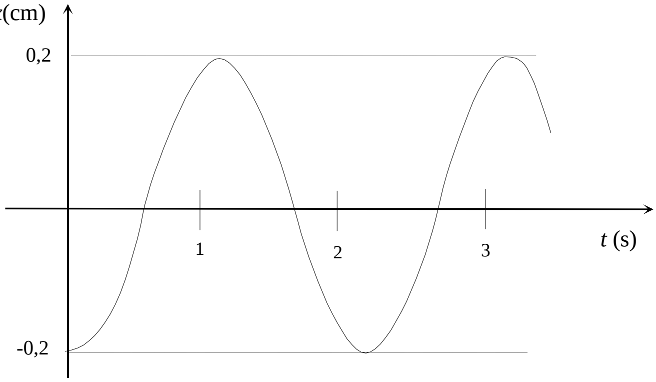
b. Napisati jednačinu oscilovanja tačke udaljene 100m i nacrtati grafik $x=f(t)$

c. Napisati jednačinu talasa za t=2s i nacrtati grafik $x=f(y)$.

8.3.4.R

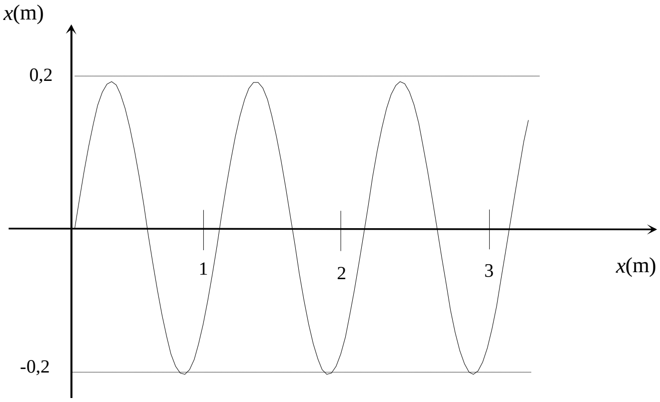
a. $y(x,t) = 0{,}2\sin(\pi t - \frac{\pi x}{200})[\mathrm{m}]$

b. $y(100\mathrm{m},t) = 0{,}2\sin(\pi t - \frac{\pi}{2})[\mathrm{m}]$



Slika 8.3.4.1

c. $y(x{,}2\mathrm{s}) = 0{,}2\sin(2\pi - \frac{\pi x}{200})[\mathrm{m}]$



Slika 8.3.4.2

8.3.5 Data je jednačina progresivnog talasa:

$$y = 5 \cdot \cos(4\pi t - 5\pi y)[\mathrm{cm}]$$

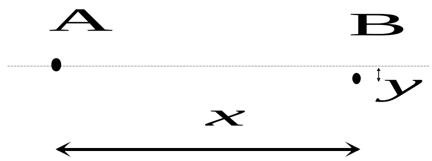
Odrediti na kom najmanjem rastojanju od izvora ravnog talasa će elongacija iznositi polovinu amplitude 3 sekunde nakon početka oscilovanja izvora talasa.

8.3.5.R

y = 11,6m

8.3.6 Jedna čestica (B) elastične sredine udaljena je od izvora (A) talasnog kretanja za x=1m (slika 8.3.6.1). Talasni front stiže do čestice B posle t=10^{-3} s od momenta njegovog polaska iz izvora i pri tome se udalji od ravnotežnog položaja za

y= - 4mm. Odredi amplitudu tog talasa ako je poznata njegova talasna dužina λ=0,3m i frekvencija $\nu = 10^4$ Hz.



Slika 8.3.6.1

8.3.6.R
$y_0 = 4{,}6\cdot 10^{-3}$ m

8.4 Odbijanje i prelamanje talasa

8.4.1 Pri kretanju kroz vazduh talas naiđe pod uglom od 10° na ravnu površinu vode. Koliki je prelomni ugao ako je brzina talasa u vazduhu 340 m/s, a u vodi 1400m/s?

8.4.1.R

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{u_1}{u_2}$$

$$\sin\beta == \frac{u_2}{u_1}\sin\alpha$$

$\beta = 45^0 39'$

8.4.2 Upadni ugao zraka talasa je 30°. Ako je brzina prostiranja talasa u prvoj sredini dva puta veća nego u drugoj, koliki je prelomni ugao?

8.4.2.R
β = 14,47°

8.4.3 Upadni ugao zraka talasa je 30°, a prelomni ugao 60°. Ako je brzina prostiranja talasa u prvoj sredini 1500m/s, kolika je brzina talasa u drugoj sredini?

8.4.3.R
u_2 = 2595 m/s

8.4.4 Odnos brzina kretanja talasa u prvoj i drugoj sredini je $\sqrt{3}$. Da bi upadni ugao bio dva puta veći od prelomnog, pod kojim uglom treba da padne zrak talasa u odnosu na normalu?

8.4.4.R
$\alpha = \pi/3$

8.4.5 Na graničnoj površini dve sredine talas se delom odbija pod uglom 60°, a delom prelama pod uglom 30°. Naći brzinu prelomljenog talasa ako je brzina upadnog 500 m/s.

8.4.5.R

$$u_2 = 288{,}68\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

8.5 Interferencija talasa

8.5.1 Dva izvora na međusobnom rastojanju od 0,2 m emituju talase talasne dužine 0,03m. Na rastojanju *L* mnogo većem od međusobnog rastojanja izvora dobija se interferenciona slika. Odredi ugao α pod kojim se u odnosu na centralni maksimum dobija maksimum četvrtog reda.

8.5.1.R

$$d\sin\alpha = n\lambda$$

$$\alpha = 36^0 52'$$

8.5.2 Ravan talas talasne dužine 10 cm nailazi normalno na nepropustljivu prepreku širine 5 cm. Na kolikom normalnom rastojanju od maksimuma nultog reda će se nalaziti naksimum prvog reda. Maksimum nultog reda je na rastojanju 2 m od prepreke.

8.5.2.R Maksimum prvog reda

$$\Delta s = \lambda$$

$$d\sin\alpha = d\,\frac{x}{L} \qquad x = \frac{\lambda L}{d}$$

$$x = 4\text{m}$$

8.6 Stojeći talasi

8.6.1 Progresivni talas se širi sleva nadesno i nakon odbijanja od prepreke formira stojeći talas.

a. Napisati jednačinu stojećeg talasa ako je jednačina progresivnog:

$$y(x,t) = 3\cdot\sin(2\pi x + 4\pi t)[\text{m}]$$

b. Ako je rastojanje između kojih se formira sojeći talas

$$y = 2\cdot y_0 \sin kx \cos\omega t$$

l (na krajevima su čvorovi stojećeg talasa), i ako se talas prostire brzinom v, odrediti frekvencije i talasne dužine osnovnog i prva tri viša harmonika.

c. Za osnovni harmonik (n=1) na mestu udaljenom od početne tačke oscilovanja $l/2$ odredi elongacije stojećeg talasa za trenutke vremena: $t_1=0$, $t_2=T/6$, $t_3=T/3$, $t_4=T/2$, $t_5=2T/3$, $t_6=5T/6$ i $t_6=T$.
d. U trenutku $t=T/6$ odrediti elongacije za položaje za osnovni harmonik(n=1): $x_1=0$, $x_2=l/4$, $x_3=l/2$, $x_4=3l/4$, $x_5=l$.
a.
$y(x,t)=3\cdot\sin(2\pi x-4\pi t)[\mathrm{m}]$
8.6.1.R
Na osnovu principa superpozicije dobijamo:
$y(x,t)=6\sin 2\pi x\cos 4\pi t[\mathrm{m}]$
b.

$\nu_1=\dfrac{\nu}{2\cdot l}$ $\nu_2=2\dfrac{\nu}{2\cdot l}=2\nu_0$ $\nu_3=3\dfrac{\nu}{2\cdot l}=3\nu_0$ $\nu_4=4\dfrac{\nu}{2\cdot l}=4\nu_0$

$\lambda_1=\dfrac{2l}{1}$ $\lambda_2=\dfrac{2l}{2}$ $\lambda_3=\dfrac{2l}{3}$ $\lambda_4=\dfrac{2l}{4}$

c.
$y_1=2y_0$ $y_2=y_0$ $y_3=-y_0$ $y_4=-2y0$ $y_5=-y_0$ $y_6=y_0$ $y_7=2y_0$

d. $y_1=0$ $y_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}y_0$ $y_3=y_0$ $y_4=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y_0$ $y_5=0$

8.6.2 Iznad cilindričnog suda dužine l=1,5m prineta je zvučna viljuška koja osciluje sopstvenom frekvencijom 320Hz. Ako se ovaj sud puni vodom, na kojim visinama vode će zvuk biti maksimalno pojačan? Brzina zvuka u vazduhu je 340m/s.

8.6.2.R

$$\lambda=\frac{4\cdot l}{2\cdot n+1}\qquad h=l-l'$$
$$l=\frac{2\cdot n+1}{4}\frac{u}{\nu}$$

n=0 h=123,4 cm
n=1 h=70,3 cm
n=2 h=17,2 cm

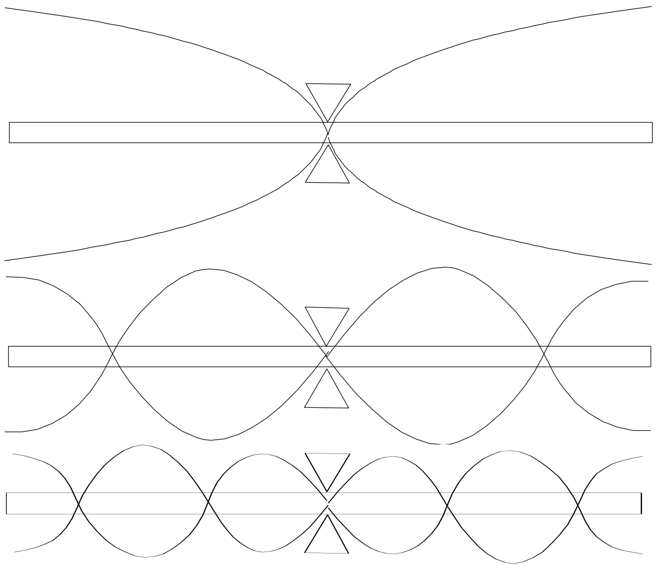
8.6.3 Štap je učvrćen na sredini i nakon što je izveden iz ravnotežnog položaja proizvodi stojeće talase. Ako je dužina štapa l i brzina prostiranja talasa u napisati osnovnu frekvenciju i frekvencije za prva dva viša harmonika i odgovarajuće talasne dužine. Nacrtaj odgovarajuće stojeće talase.

8.6.3.R

$$\nu_0 = \frac{\nu}{2l}\,;\lambda_0 = 2l$$

$$\nu_1 = 3\nu_0\,;\lambda_1 = \frac{2l}{3}$$

$$\nu_2 = 5\nu_0\,;\lambda_1 = \frac{2l}{5}$$



Slika 8.6.3.1

8.6.4 U žici dužine 1 m zategnutoj silom 2 kN formira se stojeći talas najmanje frekvencije. Kako i koliko puta treba promeniti silu zatezanja, da bi se u žici formirao talas čija frekvencija odgovara drugom harmoniku?

8.6.4.R

$$\nu_1 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F_{z1}}{\mu}}$$

$$\nu_2 = 2\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F_{z2}}{\mu}}$$

$$\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F_{z1}}{\mu}} = 2\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F_{z2}}{\mu}}$$

$F_{z2} = 4F_{z1}$

$F_{z2} = 8\text{kN}$

8.7 Subjektivna i objektivna jačina zvuka

8.7.1 Leptir maše krilima 12 do 15 puta u sekundi. Zašto mi ne čujemo taj zvuk? Zašto čujemo komarca?

8.7.1.R Sve zavisi od frekvencije talasa. Mahanje krilima leptira pada u oblast infrazvuka i mi to ne registrujemo. Zujanje komarca pada u oblast čujnosti jer on brže maše krilima.

8.7.2 Intenzitet zvuka na rastojanju 10 m od izvora zvuka iznosi $10^{-6}\ \dfrac{\text{W}}{\text{m}^2}$. Koliki je intenzitet na rastojanju 100 m od izvora?

8.7.1.R

$$I = \frac{E}{St}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\dfrac{E}{S_1 t}}{\dfrac{E}{S_2 t}} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{r_2^2 \pi}{r_1^2 \pi} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

$$I_2 = I_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = 10^{-8}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

8.7.3 Kod prozora neke zgrade nivo buke uličnog saobraćaja je 70dB. Površina otvora prozora u sobi je 1,5m^2. Kolika zvučna energija ulazi u sobu za jedan sat? Prag čujnosti je I_0=10^{-12}W/m^2.

8.7.4.R

E = 0,54J

8.7.4 Subjektivna jačina zvuka u nekoj tkačnici je 90dB. Kolika je objektivna jačina te buke? ($I_0 = 10^{-12}\ \dfrac{\text{W}}{\text{m}^2}$)

8.7.5.R

$$\frac{I}{I_0} = 10^{\frac{L}{10}} = 10^9$$

I = 10^{-3} W/m^2

8.7.5 Ako se subjektivna jačina zvuka smanji za 40 dB, koliko puta se smanji objektivna jačina?

8.7.7.R

$$L_1 - L_2 = 10\log\frac{I_1}{I_0} - 10\log\frac{I_2}{I_0} = 10\log\frac{I_1}{I_2}$$

$$\log\frac{I_1}{I_2} = \frac{L_1 - L_2}{10}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^{\frac{L_1 - L_2}{10}} = 10^4$$

$$I_2 = \frac{I_1}{10^4}$$

8.8 Doplerov efekt

8.8.1 Izvor zvuka frekvencije 1kHz se približava prijemniku stalnom brzinom 36km/h. Koliku frekvenciju registruje prijemnik? Brzina zvuka u vazduhu je 340m/s.

8.8.1.R

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v}{u}} = 1{,}03\ \text{kHz}$$

8.8.2 Izvor zvuka frekvencije 1kHz se udaljava od prijemnika stalnom brzinom 10m/s. Koliku frekvenciju registruje prijemnik? Brzina zvuka u vazduhu je 340m/s.

8.8.2.R

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + \frac{v}{u}} = 0{,}97\ \text{kHz}$$

8.8.3 Prijemnik se kreće stalnom brzinom od 72km/h prema izvoru zvuka frekvencije 1kHz. Koliku frekvenciju registruje prijemnik? Brzina zvuka u vazduhu je 340 m/s.

8.8.3.R

$$\nu = \nu_0\left(1 + \frac{v}{u}\right) = 1{,}06\ \text{kHz}$$

9. Mehanika fluida

9.1 Pritisak. Sila pritiska. Hidrostatički i atmosferski pritisak

9.1.1 Tečnost deluje silom intenziteta F=40 N na površinu S=20cm^2. Koliki je pritisak tečnosti?

9.1.1.R Pritisak je brojno jednak odnosu intenziteta sile i površine na koju ta sila normalno deluje. Naime,

$$p = \frac{F}{S}$$

pa se zamenom dobija da je

$$p = 20\text{kPa}$$

9.1.2 Koliki je pritisak na dnu reke čija je dubina h=10m?

$$p = \rho g h = 98{,}1\text{kPa}$$

9.1.3 Kolika sila deluje na vrata podmornice, površine S=0,5 m^2, ako se ona nalazi na dubini h=100m? Uzeti da je gustina morske vode ρ=l 020 kg/m^3.

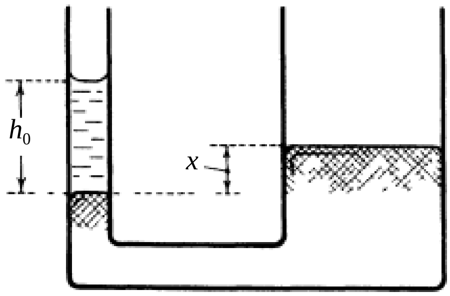
9.1.3.R Intenzitet sile koja deluje na vrata podmornice jednak je proizvodu pritiska vodenog stuba iznad vrata i površine vrata, tj.

$$F = pS = \rho g h S = 0{,}5\text{MN}$$

9.1.4 U spojenim sudovima nalazi se živa. Prečnik jednog suda je četiri puta veći od prečnika drugog suda. U uži sud se nalije toliko vode da se iznad žive obrazuje vodeni stub visine h_0=70 cm. Za koliko će se podići nivo žive u:

a) širem sudu, a za koliko će opasti u užem,

b) u užem sudu ako se u širi sud nalije toliko vode da se i u njemu obrazuje vodeni stub iste visine h_0?



Slika 9.1. 1

9.1.4.R a) Ako se dolivanjem vode nivo žive u užem sudu spusti za h_1, a u širem podigne za h_2 uslov ravnoteže pritisaka može da se izrazi relacijom

$$\rho g x = \rho g h_1 + \rho g h_2 = \rho g h_0 \tag{9.1. 1 }$$

gde je ρ_0=1000kg/m^3 - gustina vode, ρ=13600kg/m^3 - gustina žive. Pošto su obe tečnosti nestišljive, onda je

$$S_1 h_1 = S_2 h_2 \tag{9.1. 2 }$$

gde su S_1 i S_2 - površine poprečnih preseka sudova. Prema uslovu zadatka, njihov međusobni odnos je $S_2 = 16 S_1$ pa je na osnovu relacija (9.1.4.1) i (9.1.4.2)

$$h_1 = \frac{16\rho_0}{17\rho} h_0 = 4{,}8\text{cm} \tag{9.1. 3 }$$

i

$$h_2 = \frac{\rho_0}{17\rho} h_0 = 0{,}03\text{cm} \tag{9.1. 4 }$$

b) U ovom slučaju nivo žive se u užem sudu podigne za h_1=4,8cm, a u širem sudu spusti za h_2= 0,03 cm.

9.2 Paskalov zakon

9.2.1 Odnos poluprečnika klipova u hidrauličnoj presi je 1/10. Koliki je odnos intenziteta sile kojom se na presu deluje i intenzitet sile kojom ona deluje?

9.2.1.R Kod hidraulične prese odnos površina klipova jednak je odnosu sila koje deluju na klipove

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2}$$

gde je $S_1 = \pi r_1^2$ i $S_2 = \pi r_2^2$, pa je traženi odnos intenziteta sila

$$\frac{F_1}{F_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{1}{100}$$

pošto je $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{10}$. Prema tome, mašina će delovati 100 puta jačom silom nego što je jačina sile kojom se na nju deluje.

9.2.2 Pomoću hidraulične prese treba da se podiže teret koji je 64 puta veći od intenziteta sile kojom se na presu deluje. Koliki treba da bude odnos poluprečnika klipova u presi?

9.2.2.R Pošto odnos sila treba da bude $\frac{F_1}{F_2}=\frac{1}{64}$, onda je potrebno da odnos poluprečnika bude

$$\frac{r_1}{r_2}=\sqrt{\frac{F_1}{F_2}}=\frac{1}{8}$$

9.2.3 Površine klipova hidraulične prese iznose S_1=2cm^2 i S_2=400 cm^2. Kolikom silom može da deluje ova presa ako se pri spuštanju manjeg klipa za h=20cm izvrši rad A=100J?

9.2.3.R

$$F_2=\frac{A}{h}\frac{S_2}{S_1}=100\text{kN}$$

9.3 Potisak i plivanje

9.3.1 Telo, zapremine V=100cm^3, načinjeno je od čvrste supstancije čija je gustina ρ=3000kg/m^3. Telo se potopi u sud sa vodom.

a) Kolikom silom ovo telo deluje na dno suda?

b) Koliko je bilo ubrzanje tela prilikom padanja kroz vodu? Trenje zanemariti.

9.3.1.R

a) Na vodu, a time i na dno, telo će delovati silom koja je, prema III Njutnovom zakonu, jednaka po intenzitetu sili kojom voda deluje na telo. Dakle,

$$F=F_A=\rho gV=2{,}94\text{N}$$

b) Ako je trenje zanemarljivo, telo ce da se kreće pod dejstvom rezultante sile teže ($P=mg=\rho gV$) i njoj suprotne Arhimedove sile ($F_A=\rho_0 gV$ pa je na osnovu II Njutnovog zakona

$$a=\frac{F-F_A}{m}=\frac{(\rho-\rho_0)gV}{\rho V}=g\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)=6{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

9.3.2 U sudu se nalaze voda i živa - jedna iznad druge. Koliki deo zapremine čelične kuglice će biti u vodi? Gustina vode je 1 000 kg/m^3, žive 13 600 kg/m^3, a čelika 7 700 kg/m^3.

9.3.2.R Neka je V ukupna zapremina kuglice, a V_1 njen deo koji se nalazi u vodi. U stanju ravnoteže je sila Zemljine teže koja deluje na kuglicu jednaka zbiru sila potiska kojima voda i živa deluju na nju:

$$mg = F_{p1} + F_{p2}$$

$$\rho V g = \rho_1 V_1 g + \rho_2 (V - V_1) g$$

$$(\rho_2 - \rho_1) V_1 = (\rho_2 - \rho) V$$

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1} = 0{,}47$$

9.4 Površinski napon

9.4.1 Kolika je masa kapljice etra koji ističe iz pipete unutrašnjeg poluprečnika 0,4mm? Koeficijent površinskog napona etra iznosi 0,017N/m.

9.4.1.R Kada kapljica ističe važi:

$$mg = \gamma l$$

odnosno

$$mg = \gamma 2 r \pi$$

Odatle dobijamo:

$$m = \frac{\gamma 2 r \pi}{g}$$

$$m = 4{,}3g$$

9.4.2 Kapljica vode sfernog oblika poluprečnika 2 mm razbije se na 64 međusobno jednake sferne kapljice. Koliki se rad pri tome izvrši ako je koeficijent površinskog napona vode 0,07 N/m?

9.4.2.R Po definiciji imamo:

$$A = \gamma \Delta S = \gamma (n S_1 - S)$$

Površina kompletne kapljice (lopte) je

$$S = 4 r^2 \pi$$

a površina male kapljice iznosi:

$$S_1 = 4 r_1^2 \pi$$

Za zapremine važi:

$$V = n V_1$$

odnosno

$$\frac{4}{3} r^3 \pi = n \frac{4}{3} r_1^3 \pi$$

ili

$$r = \sqrt[3]{n}$$

9.4.3 S jedne strane palidrvceta dužine 5cm je voda, a s druge rstvor deterdženta. Kolika sila deluje na palidrvce, a koliko bi mu, u odsustvu sila otpora, bilo ubrzanje ako mu je masa 0,5 g. Koeficijent površinskog napona vode je 0,07 N/m, a deterdženta 0,04 N/m.

9.4.3.R

Na palidrvce deluje rezultujuća sila koja iznosi:

$$F = F_1 - F_2 = \gamma_1 l - \gamma_2 l = l(\gamma_1 - \gamma_2)$$

$F = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}$

Ubrzanje koje mu se saopštava iznosi:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{l(\gamma_1 - \gamma_2)}{m}$$

$a = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

9.4.4 Donja pokretna strana vertikalnog žičanog rama je uravnotežena silom površinskog napona sapunice čiji je koeficijent površinskog napona 0,04 N/m. Koliki je poluprečnik žice pokretnog dela rama ako je njen poprečni presek kružnog oblika i isti po celoj njenoj dužini, a gustina legure od koje je napravljena iznosi 3000 kg/m^3?

9.4.6.R U stanju ravnoteže važi

$$F = Q$$

Sila površinskog napona iznosi:

$$F = 2\gamma l\,, \qquad (9.4.1)$$

dok sila zemljine teže iznosi:

$$Q = mg = \rho V g = \rho S\, l g = \rho r^2 \pi\, l g \qquad (9.4.2)$$

Izjednačavajući (9.4.1) i (9.4.2) dobijamo:

$$\rho r^2 \pi\, l g = 2\gamma l$$

odakle dobijamo:

$$r = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho \pi g}}$$

odnosno

$$r = 9{,}3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} = 0{,}93 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = 0{,}93\,\mathrm{mm}$$

9.5 Kapilarne pojave

9.5.1 Na koji nivo će se izdignuti etar u kapilari ako nivo izdizanja vode u istoj kapilari iznosi 24 mm? Obe tečnosti potpuno kvase zidove kapilare. Gustina vode i etra su 1000 kg/m^3 i 740 kg/m^3 respektivno, a koeficijenti površinskog napona 0,07N/m i 0,017 N/m respektivno.

9.5.1.R Izdizanje nivoa vode je

$h_2 = h_1 \dfrac{\gamma_2 \rho_1}{\gamma_1 \rho_2} = 7{,}9\text{mm}$

9.6 Kretanje fluida. Jednačina kontinuiteta

9.6.1 Kroz poprečni presek vodovodne cevi prečnika 0,8m protiče voda brzinom 5m/s. Kolika je zapremina vode protekle za 5min?

9.6.1.R

$$Q = Sv$$

$$Q = \frac{V}{t}$$

$$V = Qt = Svt$$

$$V = \frac{\pi d^2}{4} vt$$

$V = 753{,}6\text{m}^3$

9.6.2 Za vreme od 10s kroz slavinu vodovoda unutrašnjeg prečnika 1,8cm protekne 0,5*l* vode. Odrediti brzinu proticanja vode.

9.6.2.R

$$V = \frac{\pi d^2}{4} vt$$

$$v = \frac{4V}{\pi d^2 t} = 0{,}2\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

9.6.3 Kojom brzinom protiče voda kroz slavinu unutrašnjeg prečnika 1,6cm ako za 8s iz slavine istekne 2*l* vode?

9.6.3.R

$$V = \frac{\pi d^2}{4} vt$$

$$v = \frac{4V}{\pi d^2 t} = 1{,}24\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

9.6.4 Kroz slavinu unutrašnje površine poprečnog preseka 1,84cm protiče voda brzinom 0,4m/s. Kolika treba da bude unutrašnja površina poprečnog preseka nastavka cevi koja treba da se montira na kraj slavine, da brzina ispuštanja vode bude 1m/s?

9.6.4.R

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

$$S_2 = \frac{S_1 v_1}{v_2} = 7{,}36 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^2$$

9.6.5 Cev prečnika 150 mm prenosi m = 1000 t nafte, čija je specifična težina $\sigma = 9 \cdot 10^3 \mathrm{N/m}^3$ za jedan dan. Naći zapreminski protok i u sekundi i srednju vrednost brzine v proticanja nafte u cevi.

9.6.5.R

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$V = \frac{mg}{\rho g} = 960\mathrm{m}^3$$

$$i = \frac{V}{t} = 11{,}11 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$$

$$i = Sv$$

$$v = \frac{i}{S} = 1{,}01\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

9.7 Bernulijeva jednačina

9.7.1 Prečnik šireg dela cilindričnog šprica za injekcije je 2 cm, a užeg 1 mm. Naći brzinu kojom ističe voda iz horizontalno postavljenog šprica ako se na njegov klip deluje konstantnom silom od 10 N.

9.7.1.R Neka je S_1 površina klipa, S_2 površina otvora kroz koji ističe voda, a p_0 spoljašnji pritisak vazduha. Tada je:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$p_0 + \frac{F}{S_1} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Kako je $S_1 >> S_2$, to je $v_1^2 << v_2^2$, pa se prethodna jednačina svodi na:

$$\frac{F}{S_1} = \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Sledi:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2F}{\rho S_1}} = \sqrt{\frac{8F}{\rho \pi d_1^2}} = 8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

9.8 Viskoznost. Stoksov zakon

9.8.1 Debljina sloja vode koja se nalazi između dve ravne paralelne ploče je d=0,4m. Prva ploča se kreće konstantnom brzinom, druga je nepokretna. Kolika je ta brzina ako na prvu ploču deluje stalna spoljašnja sila od 0,4N, a njena površina je 2m^2? Koeficijent viskoznosti vode je 0,016kg/ms.

9.8.1.R

$$F = \eta S \frac{v}{d}$$

$$v = \frac{Fd}{\eta S} = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

9.8.2 Kuglica čiji je prečnik 4mm kreće se kroz tečnost konstantnom brzinom 0,1m/s. Kolika je sila unutrašnjeg trenja ako je koeficijent viskoznosti tečnosti 0,84kg/ms?

9.8.2.R

$$F = \eta S \frac{v}{d} = \eta 4R^2\pi \frac{v}{d} = 3{,}2\mathrm{mN}$$

9.8.3 Staklena kuglica prečnika 2mm pada kroz tečnost konstantnom brzinom v=0,2m/s. Koliki je koeficijent viskoznosti te tečnosti? Gustina stakla je 2400kg/m^3, a gustina tečnosti 1000kg/m^3. Uzeti da je ubrzanje Zemljine teže g=10m/s^2 .

9.8.3.R Na kuglicu koja pada kroz tečnost sem viskozne sile $F_v = 6\pi\eta r v$ deluju i spoljašnje sile: sila teže $F_g = \rho V g$ sila potiska tečnosti $F_p = \rho_t V g$. Ovde su ρ - gustina tela, ρ_t - gustina tečnosti, $V = \frac{4}{3} r^3 \pi$ zapremina kuglice. Zbir ovih triju sila jednak je nuli, pošto se kuglica kreće konstantnom brzinom. Sila potiska i viskozna sila deluju nasuprot sili teže, pa je stoga $F_g = F_v + F_p$, odnosno $\rho V g = \rho_t V g + 6\pi\eta r v$. Iz ove jednačine sledi

$$\eta = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho - \rho_t)g}{v} = 0{,}016\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{ms}}$$

10. Osnove molekulsko kinetičke teorije i termodinamike

10.1 Molekulsko kinetička teorija. Brzina molekula

10.1.1 Izračunati srednju kvadratnu brzinu molekula kiseonika i atoma helijuma pri normalnim uslovima.

10.1.1.R

$$\bar{v}_{\mathrm{O}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 461{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\bar{v}_{\mathrm{He}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 1304{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

10.1.2 Pri povećanju temperature nekog gasa poznate molarne mase M za ΔT, njegova srednja kvadratna brzina poveća se za Δv. Kolika mu je temperatura?

10.1.2.R Na temperaturi T imamo:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}\,, \qquad (10.1.2.1)$$

a ako temperaturu uvećamo za ΔT dobijamo:

$$\bar{v} + \Delta\bar{v} = \sqrt{\frac{3R(T+\Delta T)}{M}} \qquad (10.1.2.2)$$

odnosno kombinujući relacije (10.1.1) i (10.1.2) dobijamo:

$$\Delta\bar{v} = \sqrt{\frac{3R(T+\Delta T)}{M}} - \sqrt{\frac{3RT}{M}} \qquad (10.1.2.3)$$

odnosno

$$T = \frac{\left(3R\Delta T - M\Delta\bar{v}^{2}\right)^{2}}{12RM\Delta\bar{v}^{2}} \qquad (10.1.2.4)$$

10.2 Model idealnog gasa i osnovna jednačina MKT. Jednačina gasnog stanja

10.2.1 Koliki je pritisak azota u zatvorenom sudu ako je srednja kvadratna brzina molekula azota 500m/s? Gustina azota je 1,35kg/m^3 .

10.2.1.R

$$n_0 = \frac{N}{V}$$

$$n_0 m_0 = \frac{N}{V} m_0 = \frac{m}{V} = \rho$$

$$p = \frac{1}{3} m_0 n_0 \overline{v}^2 = \frac{1}{3} \rho \overline{v}^2$$

$$p = 0{,}11 \cdot 10^6 \,\text{Pa}$$

10.2.2 Odrediti srednju kvadratnu brzinu molekula onog gasa čija je gustina $8{,}2 \cdot 10^{-2}$ kg/m^3 , a pritisak $p \approx 10^5$ Pa.

10.2.2.R

$$p = \frac{1}{3} \rho \overline{v}^2$$

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = 1{,}9 \cdot 10^3 \,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

10.2.3 Gas se nalazi pod pritiskom $5 \cdot 10^2$ Pa i zauzima zapreminu V=4l. odrediti ukupnu kinetičku energiju translatornog kretanja svih molekula gasa.

10.2.3.R

$$p = \frac{1}{3} m_0 n_0 \overline{v}^2 = \frac{2}{3} n_0 \frac{1}{2} m_0 \overline{v}^2$$

$$p = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \frac{1}{2} m_0 \overline{v}^2$$

$$\frac{3}{2} pV = N \frac{1}{2} m_0 \overline{v}^2$$

$$\frac{3}{2} pV = N \overline{E}_{ko}$$

$$\overline{E}_k = \frac{3}{2} pV = 3\text{J}$$

10.2.4 Koliko se molekula gasa nalazi u balonu zapremine V=60l, pri temperaturi T=300K, ako se gas nalazi pod pritiskom p=$5 \cdot 10^3$Pa?

10.2.4.R

$$p = \frac{2}{3} n_0 \frac{1}{2} m_0 \overline{v}^2 = \frac{2}{3} n_0 E_{ko} = \frac{2}{3} n_0 \frac{3}{2} k_B T$$

$$p = n_0 kT$$

$$n_0 = \frac{p}{kT}; \; n_0 = \frac{N}{V}$$

$$\frac{N}{V} = \frac{p}{kT}$$

$$N = \frac{pV}{kT} = 7{,}2 \cdot 10^{22}$$

10.2.5 Izračunati srednju kinetičku energiju molekula helijuma koji ima gustinu 0,12kg/m^3 i pritisak 1,1·10^5 Pa.

10.2.5.R

$$n_0 = \frac{N}{V}$$

$$n_0 m_0 = \frac{N}{V} m_0 = \frac{m}{V} = \rho$$

$$p = \frac{2}{3} n_0 \overline{E}_k$$

$$pm_0 = \frac{2}{3} n_0 m_0 \overline{E}_k$$

$$pm_0 = \frac{2}{3} \rho \overline{E}_k$$

$$\frac{N}{N_A} = \frac{m}{M} \Rightarrow \frac{1}{N_A} = \frac{m_0}{M} \Rightarrow m_0 = \frac{M}{N_A}$$

$$p \frac{M}{N_A} = \frac{2}{3} \rho \overline{E}_k$$

$$\overline{E}_k = \frac{3pM}{2N_A \rho} = 9{,}13 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{J}$$

10.2.6 Pritisak gasa zatvorenog u sudu zapremine 15m^3 na temperaturi 27°C iznosi 1,2·10^5 Pa. Koliki će biti pritisak istog gasa na temperaturi 37°C i pri zapremini 12m^3 ?

10.2.6.R

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

$$p_2 = \frac{p_1 V_1 T_2}{V_2 T_1} = 1{,}55 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$$

10.2.7 Izračunati pritisak 3,2kg kiseonika koji se nalazi u boci zapremine 2m^3 na temperaturi 300K.($M = 32 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$, $R = 8{,}31 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{molK}}$)

10.2.7.R

$$pV = nRT$$

$$pV = \frac{m}{M}RT$$

$$p = \frac{mRT}{MV} = 1{,}25 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$$

10.3 Gasni zakoni

10.3.1 Idealan gas na temperaturi 300K i pritisku 10^5 Pa ispunjava zapreminu od $1\mathrm{m}^3$.

a. Odrediti pritisak gasa pri povećanju zapremine gasa za $9\mathrm{m}^3$ ako temperatura gasa ostaje konstantna?

b. Odrediti broj molova gasa.

10.3.1.R

a. $p_1 V_1 = p_2 V_2$

$$V_2 = V_1 + \Delta V$$

$$p_1 V_1 = p_2 (V_1 + \Delta V)$$

$$p_2 = p_1 \frac{V_1}{V_1 + \Delta V} = 10^4\,\mathrm{Pa}$$

b. $p_1 V_1 = nRT$

$$n = \frac{p_1 V_1}{RT} = 40\mathrm{mol}$$

10.3.2 Zapremina gasa na 300K iznosi $0{,}25\mathrm{m}^3$. Kolika će mu biti zapremina pri nepromenjenom pritisku na temperaturi 330K?

10.3.3.R

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

$$V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1} = 0{,}275\mathrm{m}^3$$

10.3.3 Pritisak gasa na 7°C iznosi $1{,}4 \cdot 10^5$ Pa. Koliki je pritisak istog gasa na 14° C ako je zapremina gasa nepromenjena?

10.3.6.R

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 1{,}435 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$$

10.3.4 Manometar u boci s gasom pokazuje pritisak $1{,}8 \cdot 10^5$Pa. Hlađenjem gasa za 40K pritisak se smanji na $1{,}4 \cdot 10^5$Pa. Izračunati početnu i krajnju temperaturu gasa.

10.3.7.R

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_1 - \Delta T}$$

$$(T_1 - \Delta T)p_1 = T_1 p_2$$

$$T_1 p_1 - \Delta T p_1 = T_1 p_2$$

$$T_1 p_1 - T_1 p_2 = \Delta T p_1$$

$$T_1 = \frac{\Delta T p_1}{p_1 - p_2} = 180\text{K}$$

$$T_2 = T_1 - \Delta T = 140\text{K}$$

10.4 Srednja dužina slobodnog puta molekula

10.4.1 Kolika je srednja dužina slobodne putanje atoma helijuma ako je razmak između njih, u proseku, 4nm?

10.4.1.R

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{n_0 \sigma}$$

$$n_0 = \frac{N}{V} = \frac{N}{l\sigma} = \frac{N}{l\pi d^2}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\frac{N}{l\pi d^2}\pi d^2} = \frac{l}{N}$$

$$n = \frac{m}{M} = \frac{6{,}64 \cdot 10^{-27} kg}{4\frac{\text{g}}{\text{mol}}} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$$

$$N = nN_A = 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 10^{-4}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{4 \cdot 10^{-9}}{10^{-4}} = 4 \cdot 10^{-5} = 0{,}4\mu\text{m}$$

10.4.2 Srednja dužina slobodne putanje molekula vazduha pri normalnim uslovima iznosi 62,1nm. Odrediti srednju dužinu slobodne putanje molekula vazduha u ultravisokom vakuumu (1,33nPa). Temperaturu u oba slučaja smatrati jednakom.

10.4.2.R

$$\overline{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}n_0\sigma} = \frac{kT}{\sqrt{2}p\sigma}$$

$$\frac{\overline{\lambda}_u}{\overline{\lambda}_n} = \frac{\dfrac{kT}{\sqrt{2}p_u\sigma}}{\dfrac{kT}{\sqrt{2}p_n\sigma}} = \frac{p_0}{p_u} = \frac{101\cdot \mathrm{kPa}}{1{,}33\mathrm{nPa}} = 75{,}9\cdot 10^6$$

$$\overline{\lambda}_u = \overline{\lambda}_n \cdot 75{,}9\cdot 10^6 = 4{,}7\mathrm{m}$$

10.5 Difuzija

10.5.1 Kolika je masa azota koji, zbog difuzije, prođe kroz površinu 100cm^2 za 10s ako je gradijent gustine (u pravcu normale na površini) 1,26kg/m^4? Brzina molekula azota je 520m/s, a srednja dužina slobodne putanje 10^{-7}m.

10.5.1.R

$$\Delta m = -\frac{1}{3}\overline{\lambda}v_s\frac{\Delta\rho}{\Delta x}S\Delta t$$

$$\Delta m = -2{,}2\cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg}$$

10.5.2 Koliki je koeficijent difuzije vodonika pri zadatim uslovima ako je koeficijent difuzije helijuma, pod tim istim uslovima, 92mm^2/s?

10.5.2.R

$$D = \frac{1}{3}\overline{\lambda}v_s = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}$$

$$\frac{D_H}{D_{He}} = \frac{d_{He}^2\sqrt{M_{He}}}{d_H^2\sqrt{M_{He}}}$$

$$D_H = D_{He}\left(\frac{d_{He}}{d_H}\right)^2\sqrt{\frac{M_{He}}{M_H}}$$

$$D_H = 88\mathrm{mm}^2/\mathrm{s}$$

11. Termofizika

11.1 Temperatura. Toplota. Unutrašnja energija

11.1.1 Kolika je unutrašnja energija idealnog gasa u kojem se nalazi N jednoatomskih molekula?

11.1.1.R Potencijalna energija idealnog gasa jednaka je nuli, paje energija svakog jednoatomskog molekula jednaka njegovoj kinetičkoj energiji. Prosečna energija molekula je:

$$\overline{E}_{k0} = \frac{3}{2} k_B T$$

Kada se pomnoži broj molekuda prosečnom kinetičkom energijom jednog molekula, dobija se ukupna unutrašnja energija datog gasa:

$$U = N\overline{E}_{k0} = \frac{3}{2} N k_B T$$

11.1.2 Telo mase 100kg klizi niz strmu ravan visine 3m i dužine 6m. Koliko će se energije pretvoriti u unutrašnju energiju tela i strme ravni (podloge) kad se telo spusti sa visine od 3m do horizontalne podloge? Koeficijent trenja je 0,2.

11.1.4.R Promena unutrašnje energaje podloge i tela jednaka je radu sile trenja:

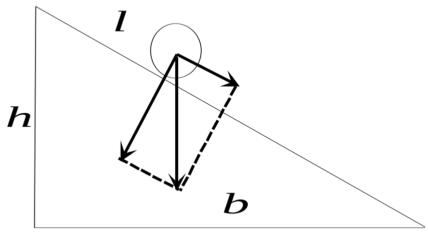
$$\Delta U = A = F_{tr} l = \mu m g \cos\varphi = \mu m g b.$$

Sa slike je očigledno

$b = \sqrt{l^2 - h^2}$

tako da dobijamo

$$\Delta U = \mu m g \sqrt{l^2 - h^2} = 1019\text{J}$$



Slika 11.1. 1

11.1.3 Rad koji izvrši klip površine 50 cm^2 na putu od 12 cm iznosi 180 J. Koliki je pritisak pare?

11.1.6.R Pošto je:

$A = p\Delta V = pSh$; $p = \dfrac{A}{Sh} = 3 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$

11.1.4 Koliki je poluprečnik klipa koji prilikom kretanja kroz cilindar na putu od 14cm, pod pritiskom pare p=2·10^{5}Pa, izvrši rad od 879,2J?

11.1.7.R

$A = p\Delta V = pr^2\pi l$

$r = \sqrt{\dfrac{A}{\pi p l}} = 0{,}1\,\mathrm{m}$

11.2 Prvi princip termodinamike. Rad kod gasnih izoprocesa. Toplotni kapacitet

11.2.1 Koliko se povećava unutrašnja energija vodonika mase 4 g ako mu se povisi temperatura od 0°C do 200°C pri stalnoj zapremini? Kolika se količina toplote dovodi pri tome? Specifični toplotni kapacitet vodonika pristalnoj zapreminije 11.2.1.R

11.2.1.R

$c_v = 1{,}01 \cdot 10^4 \,\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}}$.

11.2.2.R Prema prvom zakonu termodinamike, promena unutrašnje energije je

$\Delta U = Q - A = Q = mc_v\Delta T = 8{,}08 \cdot 10^3\,\mathrm{J}$

11.2.2 Koliko se povećava unutrašnja energija vodonika mase 4 g ako mu se povisi temperatura od 0°C do 200°C pri stalnoj zapremini? Kolika se količina toplote dovodi pri tome? Specifični toplotni kapacitet vodonika pristalnoj zapreminije

$c_v = 1{,}01 \cdot 10^4 \,\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}}$.

11.2.2.R Prema prvom zakonu termodinamike, promena unutrašnje energije je

$\Delta U = Q - A = Q = mc_v\Delta T = 8{,}08 \cdot 10^3\,\mathrm{J}$

Pošto se gas zagreva pri stalnoj zapremini rad A je nula, pa se sva dovedena količina toplote utroši na povećanje unutrašnje energije

11.2.3 Jedan to1 vodonika (H_2) zagreva se od 40°C do 140°C pri stalnom pritisku.

a) Koliki se rad pri širenju gasa izvršio?
b) Kolika je potrebna količina toplote ?
c) Kolika je promena unutrašnje energije ?

($M = 2\dfrac{\text{g}}{\text{mol}}$, $R = 8{,}31\dfrac{\text{J}}{\text{molK}}$, $c_p = 1{,}42\cdot 10^4\,\dfrac{\text{J}}{\text{kgK}}$, $c_v = 1{,}01\cdot 10^4\,\dfrac{\text{J}}{\text{kgK}}$)

11.2.3.R

a) Rad pri izobarnom pšrenju gasa je

$$A = p\Delta V = nR\Delta T = 830\text{J}$$

b) Potrebna količina toplote je

$$Q = mc_p\Delta T = nMc_p\Delta T = 2{,}84\cdot 10^3\,\text{J}$$

c) Jedan deo dovedene količine toplote utroši se na izvršeni rad, a drugi deo povećava unutrašnju energiju gasa, pa je

$$\Delta U = Q - A = 2\cdot 10^3\,\text{J}$$

Promenu unutrašnje energije mogli smo izračunati i na drugi način:

$$Q = mc_v\Delta T = nMc_v\Delta T = 2\cdot 10^3\,\text{J}$$

11.2.4 Vodoniku mase 2 kg zagrevanjem je povišena temperatura za 200 K pri stalnom pritisku. Kolika je dovedena količina toplote i izvršeni rad?

11.2.4.R

$$A = \frac{m}{M}R\Delta T = 1{,}66\text{MJ}\ ;\ \Delta U = \frac{5}{2}nR\Delta T = 4{,}15\text{MJ}$$

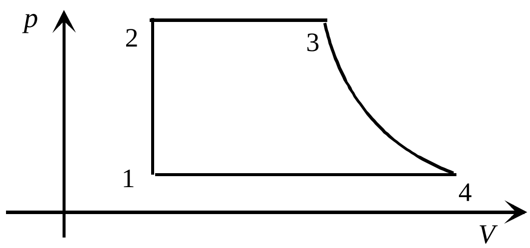
$$Q = \Delta U + A = 5{,}18\text{MJ}$$

11.2.5 U cilindru sa pokretnim klipom nalazi se gas. Njegovo stanje se može menjati na sledeći način:

1. kod stalne zapremine povećava se pritisak;
2. kod stalnog pritiska povećava se zapremina;
3. kod stalne temperature povećava se zapremina;
4. pri stalnom pritisku gas se vraća u početno stanje.

Grafički prikazati promenu stanja gasa u *p-V* , *V-T* i *p-T* koordinatnom sistemu. Kod koje je od te četiri promene stanja gas primio toplotu, a kod kojih je predao okolini? Trenje klipa o zidove suda zanemariti.

11.2.5.R



Slika 11.2. 1

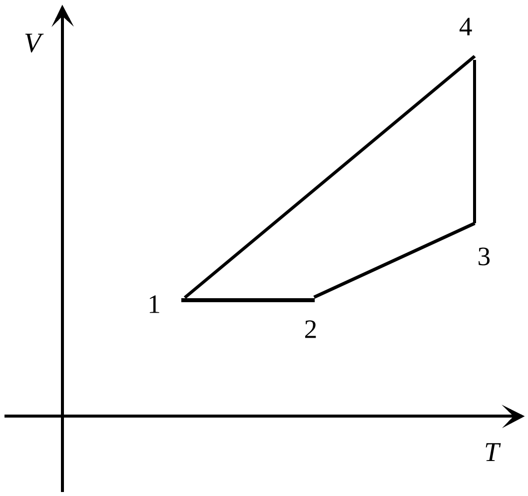
Na slici je dat prikaz svih mogućih promena stanja gasa u datom cilindru. Gas prima toplotu na delovima dijagrama 1-2, 2-3 i 3-4, a na delu 4-1 predaje toplotu.

1-2 $V=\mathrm{const}$ $p=\mathrm{const}T$ $Q=\Delta U>0$ $T\uparrow$

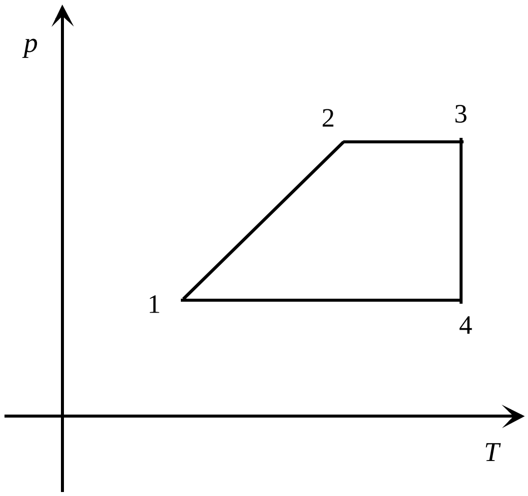
2-3 $p=\mathrm{const}$ $V=\mathrm{const}T$ $Q=A+\Delta U=p\Delta V+\Delta U>0$ $V\uparrow T\uparrow$

3-4 $T=\mathrm{const}$ $p=\dfrac{\mathrm{const}}{V}$ $Q=A=p\Delta V>0$ $V\uparrow$

4-1 $p=\mathrm{const}$ $V=\mathrm{const}T$ $Q=A+\Delta U=p\Delta V+\Delta U<0$ $V\downarrow T\downarrow$

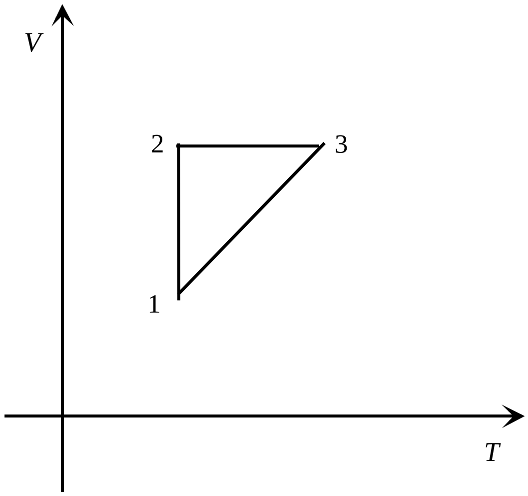


Slika 11.2. 2



Slika 11.2. 3

11.2.6 Promena stanja gasa je prikazana na slici. Prikazati tu promenu stanja gasa u *p*-*V* , *p*-*T* koordinatnom sistemu i označiti na kojim je njegovim delovima gas primio toplotu, a na kojim je toplotu predao okolini.



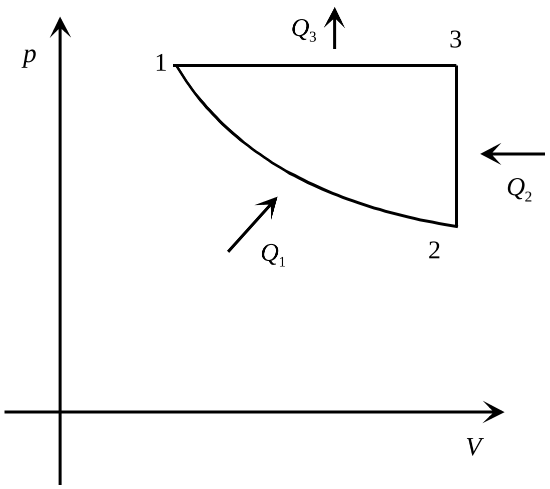
Slika 11.2. 4

11.2.6.R Promene stanja datog gasa u *p*-*V* koordinatnom sistemu prikazane su na slici. Kod prelaza iz stanja 1 u stanje 2 i iz stanja 2 u stanje 3, gas je primao toplotu. Pri prelazu iz stanja 3 u stanje 1 gas je toplotu predavao okolini.

1-2 $T = \text{const}$ $p = \dfrac{\text{const}}{V}$ $Q = A = p\Delta V > 0$ $V\uparrow p\downarrow$

2-3 $V = \text{const}$ $p = \text{const}T$ $Q = \Delta U > 0$ $T\uparrow p\uparrow$

3-1 $p = \text{const}$ $V = \text{const}T$ $Q = A + \Delta U = p\Delta V + \Delta U < 0$ $V\downarrow T\downarrow$



Slika 11.2. 5

11.2.7 U vertikalnom cilindru pod teškim klipom nalazi se kiseonik mase m=2kg. Za povišenje temperature kiseonika za ΔT=5K njemu je bila saopštena količina toplote Q=9160J pri stalnom pritisku. Naći specifičnu toplotu kiseonika, rad koji je izvršen pri širenju gasa i povećanje njegove unutrašnje energije. Molarna masa kiseonika M=32g/mol.

11.2.7.R

$$Q = mc\Delta t$$

$$c = \frac{Q}{m\Delta t} = 916\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}}$$

$$A = p(V_2 - V_1)$$

$$pV_1 = \frac{m}{M}RT_1$$

$$pV_2 = \frac{m}{M}RT_2$$

$$p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1)$$

$$A = \frac{m}{M}R\Delta T = 2590\mathrm{J}$$

$$Q = \Delta U + A$$

$$Q = \Delta U = Q - A = 6570\mathrm{J}$$

11.2.8 U cilindru ispod klipa površine S=100cm^2 nalazi se m=28g azota na temperaturi T_1=273K. Cilindar se zagreje do T_2=373K. Za koliku visinu će se podići klip vertikalno uvis ako je njegova masa M=100kg? Atmosferski pritisak je p_0 =10^{5}Pa.

11.2.8.R

$$p_1V_1 = \frac{m}{M}RT_1$$

$$p_1 = p_2 = p = p_0 + \frac{m'g}{S}$$

$$\Delta V = S\Delta h = \frac{m}{M}\frac{R}{p_0 + \frac{m'g}{S}}(T_2 - T_1)$$

$$\Delta h = \frac{m}{MS}\frac{R}{p_0 + \frac{m'g}{S}}(T_2 - T_1)$$

11.3 Adijabatski proces. Rad pri adijabatskom procesu

11.3.1 Zapremina od 7,5 l kiseonika adijabatski se sabija do zapremine 1 l. Koliki je bio početni pritisak gasa, ako je krajnji 1,6MPa?

11.3.1.R

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$$

$$\gamma = 1{,}4$$

$$p_1 = p_2 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma 95\text{kPa}$$

11.3.2 Azot se adijabatski sabija iz stanja u kojem je pritisak 2MPa i temperatura 27°C do stanja u kojem mu je zapremina duplo manja. Naći temperaturu i pritisak gasa posle sabijanja.

11.3.2.R

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma = 2\text{MPa} \cdot 2^{1{,}4} = 5{,}3\text{MPa}$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 300\text{K} \cdot 2^{0{,}4} = 396\text{K}$$

11.3.3 Jedan kilomol azota, koji se nalazi u normalnim uslovima, adijabatski se raširi do 5 puta veće zapremine. Naći promenu unutrašnje energije i rad gasa pri širenju.

11.3.3.R

$$\Delta U = n c_v \Delta T = \frac{5}{2} nR(T_2 - T_1)$$

Početna temperatura $T_1 = 273\text{K}$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 273\text{K} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{0{,}4}$$

$$\Delta U = \frac{5}{2} nRT_1 \left(\frac{1}{5^{0{,}4}} - 1\right) = -2{,}7\text{MJ}$$

$$A = -\Delta U = 2{,}7\text{MJ}$$

11.4 Karnoov ciklus

11.4.1 Toplotni rezervoar mašine koja radi po Karnoovom ciklusu ima temperaturu 200K, a hladnjak 100K. Koliki je koeficijent korisnog dejstva? Za koliko treba povisiti temperaturu rezervoara da bi koeficijent korisnog dejstva bio 0,6?

11.4.1.R

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 0{,}5$$

$$\eta_1 = \frac{T_1 + \Delta T - T_2}{T_1 + \Delta T}$$

$$\Delta T = \frac{T_2}{1 - \eta_1} - T_1 = 50\text{K}$$

11.4.2 Količina toplote koju radno telo apsorbuje od toplotnog rezervoara u toku Karnoovog ciklusa iznosi 14kJ. Temperatura toplotnog rezervoara je 200K, a koeficijent korisnog dejstva 0,6. Kolika je temperatura hladnjaka, koristan rad u toku jednog ciklusa i količina toplote koju radno telo u toku jednog ciklusa preda hladnjaku?

11.4.2.R

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

$$T_2 = T_1(1 - \eta)80\text{K}$$

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

$$\eta = \frac{A}{Q_1}$$

$$A = \eta Q_1 = 8{,}4\text{kJ}$$

$$A = Q_1 - Q_2$$

$$Q_2 = Q_1 - A = 5{,}6\text{kJ}$$

11.4.3 Temperatura toplotnog rezervoara je za 100K veća od temperature hladnjaka. Kolike su temperature rezervoara i hladnjaka mašine koja radi po Karnoovom ciklusu ako je koeficijent korisnog dejstva 0,4?

11.4.4.R

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{\Delta T}{T_1}$$

$$T_1 = \frac{\Delta T}{\eta}$$

$$T_1 - T_2 = \Delta T$$

$$T_2 = T_1 - \Delta T = 150\text{K}$$

11.4.4 U Karnoovom ciklusu dat je odnos temperature grejača i hladnjaka T_1/T_2=1,6. Koliku količinu toplote je gas primio ako je hladnjaku predao količinu toplote Q =45J?

11.4.6.R

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$Q_1 = Q_2 \frac{T_1}{T_2} = 72\text{J}$$

11.4.5 Koliki je koeficijent korisnog dejstva toplotnog motora koji radi na principu Karnoovog ciklusa ako je temperatura grejača t_1=227°C, a hladnjaka t_2=27°C?

11.4.7.R

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 0{,}4$$

11.4.6 Temperatura toplotnog rezervoara je 250K. Ako se temperatura rezervoara poveća za 50K, pri nepromenjenoj temperaturi hladnjaka, koeficijent korisnog dejstva se poveća tri puta. Kolika je temperatura hladnjaka ako je reč o Karnoovom kružnom ciklusu?

11.4.8.R

$$\eta_1 = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

$$\eta_2 = \frac{T_1 + \Delta T - T_2}{T_1 + \Delta T}$$

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = 2 = \frac{\dfrac{T_1 + \Delta T - T_2}{T_1 + \Delta T}}{\dfrac{T_1 - T_2}{T_1}}$$

$$T_2 = \frac{T_1(T_1 + \Delta T)}{2\Delta T + T_1} = 150\mathrm{K}$$

11.5 Prenošenje toplote. Provođenje toplote. Konvekcija. Zračenje

11.5.1 Led temperature 0°C nalazi se u drvenoj kutiji oblika kocke sa ivicama a=30cm. Debljina zidova kutije iznosi x =1,5 cm. Spoljna temperatura je t = 30 °C. Koliko će se leda istopiti za τ= 3 časa? Toplota topljenja leda je $q_t = 335\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$, a toplotna provodljivost drveta $\lambda = 0{,}209\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}}$

Pad temperature usled prelaza toplote zanemariti.

11.5.1.R Količina toplote koja se provođenjem prenese iz okoline u unutrašnjost kutije za vreme τ iznosi

$$Q = \frac{\lambda S \tau \Delta t}{x} = \frac{\lambda 6 a^2 \tau \Delta t}{x}$$

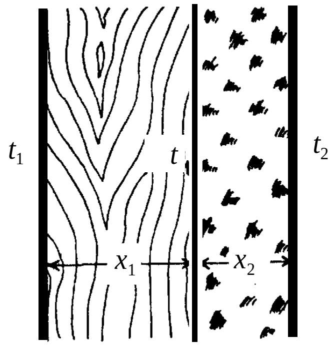
Ova količina toplote se utroši na topljenje leda te ima vrednost mq_t, gde je m masa istopljenog leda. Iz jednakosti:

$$mq_t = \frac{\lambda 6 a^2 \tau \Delta t}{x}$$

sledi

$$m = \frac{\lambda 6 a^2 \tau \Delta t}{xq_t} = 7{,}29\mathrm{kg}$$

11.5.2 Zid se sastoji od sloja drveta debljine x_1 = 3 cm i sloja stakla debljine x_2 =2cm (slika 15.1). Temperature sa obe strane zida su konstantne i iznose $t_1 = 10°\mathrm{C}$ i $t_2 = 30°\mathrm{C}$. Kolika je temperatura na granici drvenog i staklenog sloja? Toplotne (termičke) provodljivosti iznose: za drvo $\lambda_1 = 0{,}3\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}}$ a za staklo $\lambda_2 = 0{,}6\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}}$.



Slika 11.5. 1

11.5.2.R Traženu temperaturu obeležimo sa *t*. Kako je $t_2 > t_1$ biće $t_2 > t > t_1$. Kroz neku uočenu površinu *S* ovakvog kombinovanog zida protok toplote, za slučaj stacionarnog stanja, mora biti isti i za drveni i za stakleni sloj. Kroz stakleni sloj protok toplote iznosi:

$$\frac{Q_2}{\tau} = \frac{\lambda_2 S(t_2 - t)}{x_2}$$

a kroz drveni

$$\frac{Q_1}{\tau} = \frac{\lambda_1 S(t - t_1)}{x_1}$$

Pošto je $\dfrac{Q_1}{\tau} = \dfrac{Q_2}{\tau}$ biće:

$$\frac{\lambda_2 S(t_2 - t)}{x_2} = \frac{\lambda_1 S(t - t_1)}{x_1}$$

Odavde se dobija

$$t = \frac{\lambda_2 x_1 t_2 + \lambda_1 x_2 t_1}{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1} = 25°\mathrm{C}$$

11.5.3 Izračunati koliki je gubitak toplote u toku 24 časa kroz zid površine S =15 m^2 u nekoj zatvorenoj prostoriji. Zid je od cigle debljine $l_1 = 25\mathrm{cm}$ a sa unutrašnje i spoljne strane je omalterisan slojem maltera debljine $l_2 = 2\mathrm{cm}$ sa svake strane. U prostoriji je temperatura $t_1 = 22°\text{C}$ a sa spoljne strane zida $t_2 = -10°\text{C}$. Toplotne provodljivosti su za ciglu $\lambda_1 = 0{,}60\dfrac{\text{W}}{\text{mK}}$ a za malter $\lambda_2 = 0{,}80\dfrac{\text{W}}{\text{mK}}$. Koeficijent prelaza toplote sa unutrašnje strane prostorije za zid je $\alpha_1 = 3{,}9\dfrac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$ a sa spoljne strane zida $\alpha_2 = 4{,}1\dfrac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$.

11.5.3.R Provođenje toplote kroz zid je usko povezano sa prelazom toplote sa okoline na zid, odnosno sa zida na okolinu. Smer toplotnog protoka zavisi od temperature površine zidova i temperature okoline. Veličina toplotnog protoka kroz zid površine S obuhvata tzv. specifične otpore provođenju toplote $\dfrac{l}{\lambda}$, gde je l debijina zida a λ toplotna (termička) provodljivost, i specifične otpore prelazu toplote $\dfrac{1}{\alpha}$. Pri tom treba imati u vidu da najčešće otpor prelaza toplote sa fluida na zid, $\dfrac{1}{\alpha_1}$, nije isti kao otpor prelaza toplote sa zida na fluid, $\dfrac{1}{\alpha_2}$.

Koristeći Njutnov zakon, može se napisati da je brzina prolaska toplote kroz jednostruk ravan zid:

$$q = \frac{Q}{\tau} = \frac{S(t_1 - t_2)}{\dfrac{l}{\lambda} + \dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\alpha_2}} \tag{11.5.1}$$

odnosno za zid sastavljen od više slojeva odgovarajućih debljina l_i itoplotnih provodljivosti λ_i:

$$q = \frac{S(t_1 - t_2)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{l_i}{\lambda_i} + \dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\alpha_2}} \tag{11.5.2}$$

gde je sa Q označena količina toplote koja prođe kroz zid u toku vremena τ. Primenjujući prethodnu jednačinu (11.5.2) na uslove zadatka dobija se

$$q = \frac{S(t_1 - t_2)}{+\dfrac{l_1}{\lambda_1} + 2\dfrac{l_2}{\lambda_2} + \dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\alpha_2}} = 500\text{W} \tag{11.5.3}$$

Odavde je količina toplote koja prođe kroz zid u toku τ = 24 časa:

$$Q = q\tau = 43{,}2\text{MJ}$$

11.5.4 U sredinu konstantne temperature t_s=20°C uneto je telo temperature t_0=100°C. Za τ=10 minuta telo se ohladi do t=60°C. Kroz koje vreme τ_x ce temperatura tela iznositi t_x=25°C?

11.5.4.R Pre rešavanja ovog problema polazi se od Njutnovog zakona hlađenja:

$$\tau_s = \tau \frac{\ln \frac{t_0 - t_s}{t_x - t_s}}{\ln \frac{t_0 - t_s}{t - t_s}} = 40\text{min}$$

11.6 Promene agregatnih stanja. Kalorimetrija

11.6.1 U otvorenom sudu nalazi se voda zapremine V=5ℓ i temperature t =15°C. Kolika količina toplote je potrebna da bi se ova voda pretvorila u paru? Kako se menja temperatura vode u toku ravnomernog zagrevanja? Toplota isparavanja vode je q_i=2,26·10^{6}J/kg.

11.6.2.R

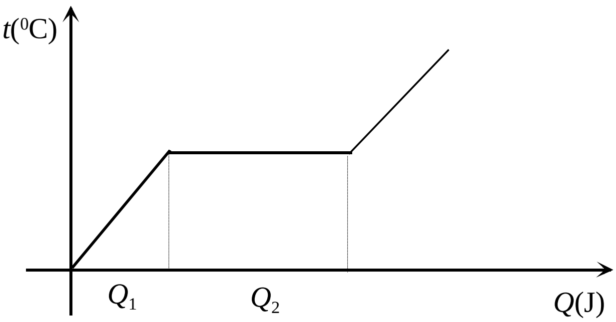
$$Q_1 = mc_v\Delta t = \rho V c_v \Delta t$$

$$Q_1 = 1.779.050\text{J}$$

$$Q_2 = mq_i = \rho V q_i$$

$$Q_2 = 11{,}6 \cdot 10^6\ \text{J}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = 13{,}1\text{MJ}$$



Slika 11.6. 1

11.6.2 Led mase m_1=800g i temperature t_1=-8°C pomeša se sa vodom mase m_2=1,2kg temperature t_2=90°C, koja se nalazi u kalorimetarskom sudu čiji je toplotni kapacitet $M=m_k c_k$=84J/°C. Odrediti temperaturu mešavine u kalorimetru. Specifična toplota leda je c_1=2kJ/kg°C, a vode c_2=4,19kJ/kg°C, dok je toplota topljenja leda q_t=335kJ/kg. Gubitke toplote zanemariti.

11.6.4.R

$$Q = mc\Delta t$$

$$Q_4 + Q_5 = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$Q_1 = m_1 c_1 \left(8^0 C - 0\right)$$

$$Q_2 = m_1 q_t$$

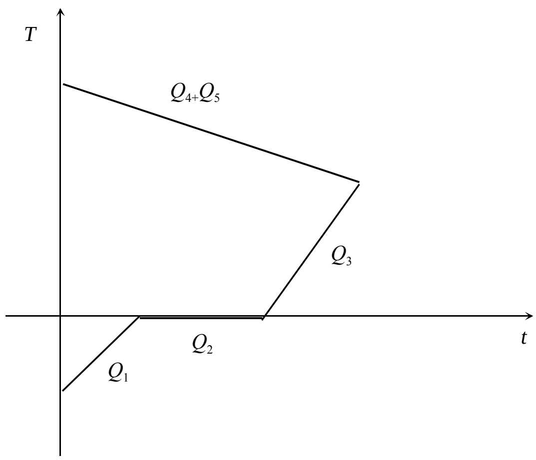
$$Q_3 = m_1 c_2 \left(t_s - 0^0 \mathrm{C}\right)$$

$$Q_4 = M\left(t_2 - t_s\right)$$

$$Q_5 = m_2 c_2 \left(t_2 - t_s\right)$$

$$m_2 c_2 \left(t_2 - t_s\right) + M\left(t_2 - t_s\right) = m_1 c_1 \left(8^0 C - 0\right) + m_1 q_t + m_1 c_2 \left(t_s - 0^0 C\right)$$

$$t_s = \frac{m_2 c_2 t_2 + M t_2 - m_1 c_1 \cdot 8°C - m_1 q_t}{m_1 c_2 + m_2 c_2 + M}$$



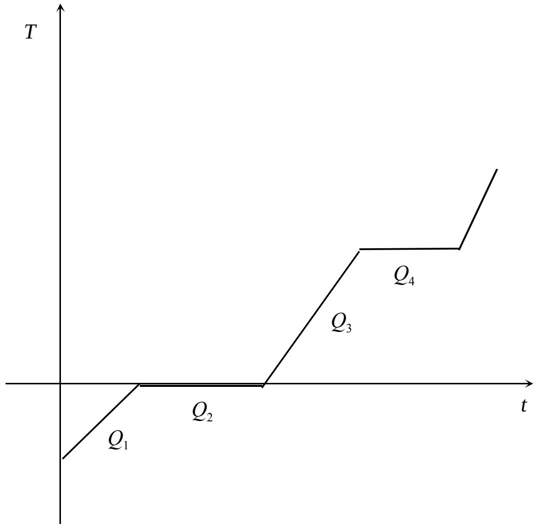
Slika 11.6. 2

$t_s = 21{,}18^0 \mathrm{C}$

11.6.3 Koliko treba vremena da bude uključen električni grejač snage 800W da bi masu leda od 200g temperature -10°C pod normalnim pritiskom pretvorili u paru?

Toplota topljenja leda je q_t=335kJ/kg, a isparavanja vode q_i=2,26MJ/kg. Specifična toplota leda je c_1=2kJ/kg°C, a vode c_2=4,19kJ/kg°C.

11.6.5.R



Slika 11.6. 3

$$P = \frac{A}{t} = \frac{Q}{t}$$

$$\tau = \frac{Q}{P}$$

$$Q = m_1 c_1 \Delta t_1 + m_1 q_t + m_1 c_2 \Delta t_2 + m_1 q_i$$

$$Q = 606800\text{J}$$

$$\tau = \frac{606800\text{J}}{800\text{W}} = 758{,}5\text{s}$$

11.6.4 U sudu zapremine V, sa toplotno neprovodljivim sidovima, nalazi se gas molarne mase M pri temperaturi T i pritisku p, u koji se unese bakarna lopta mase m_1, čija je temperatura T_1 i specifična toplota bakra je c_1, a gasa c. Kolika je temperatura tog istema?

11.6.6.R

$$Q_1 = Q_2$$

$$Q_1 = m_1 c_1 (T_1 - \Theta)$$

$$Q_2 = mc(\Theta - T)$$

$$m = \frac{pVM}{RT}$$

$$m_1 c_1 T_1 - m_1 c_1 \Theta = \frac{pVM}{RT} c\Theta - \frac{pVM}{RT} T$$

$$\Theta = \frac{m_1 c_1 T_1 + \frac{pVM}{RT} cT}{\frac{pVM}{RT} c + m_1 c_1}$$

11.7 Realni gasovi i tečnosti

11.7.1 Odrediti konstante a i b u Van der Valsovoj jednačini za kiseonik, čiji su kritični pritisak i temperatura p_k = 5 MPa i T_k = 154 K?

11.7.1.R

Iz jednačine $T_k = \frac{8a}{27bR}$ i $p_k = \frac{a}{27b^2}$ tražene konstante su:

$$a = \frac{27 T_k^2 R^2}{64 p_k} = 0{,}14 \frac{\mathrm{Nm}^4}{\mathrm{mol}^2}$$

$$b = \frac{T_k R}{8 p_k} = 32 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{mol}}$$

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = nRT$$

11.7.2 Koliki su kritični pritisak i kritična temperatura CO_2, ako su njegove konstante u Van der Valsovoj jednačini $a = 0{,}366 \frac{\mathrm{Nm}^4}{\mathrm{mol}^2}$, $b = 43 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{mol}}$?

11.7.2.R

Kritična temperatura je

$$T_k = \frac{8a}{27bR} = 304\mathrm{K}$$

ili $t = T$ - 273 K = 304 K - 273 K = 31°C.

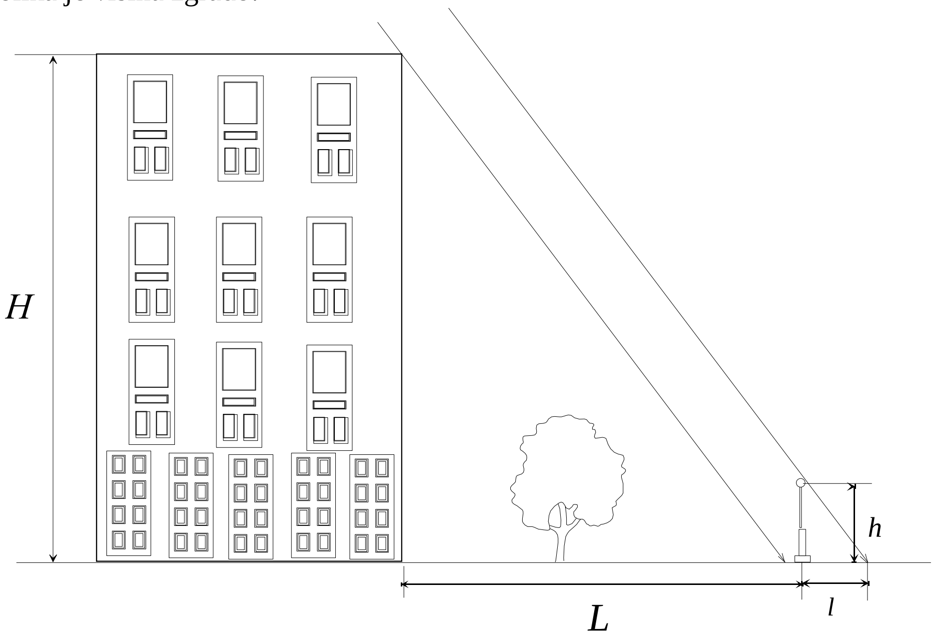
Kritični pritisak je: $p_k = \frac{a}{27b^2} = 7{,}3\mathrm{MPa}$

12. Optika

12.1 Priroda svetlosti

12.1.1 Zgrada je obasjana Sunčevim zracima i pravi senku dužine $L = 40\text{m}$. Na rastojanju većem od 40m stoji vertikalna ulična svetiljka visine *h*=2,7m, i ona pravi senku dužine $l = 3\text{m}$ (vidi sliku 12.1.1).

Kolika je visina zgrade?



Slika 12.1. 1

12.1.1.R

$$\frac{H}{L} = \frac{h}{l}$$

$$H = 36\text{m}$$

12.1.2 Vertikalni štap je udaljen 6m od vertikalnog električnog stuba. Na vrhu stuba se nalazi sijalica. Senka štapa ima dužinu 3m. Za koliko je potrebno udaljiti štap od električnog stuba da bi dužina senke bila 4m.

12.1.2.R Iz sličnosti trouglova ΔABE i ΔDCE na slici 13.1.2 sledi:

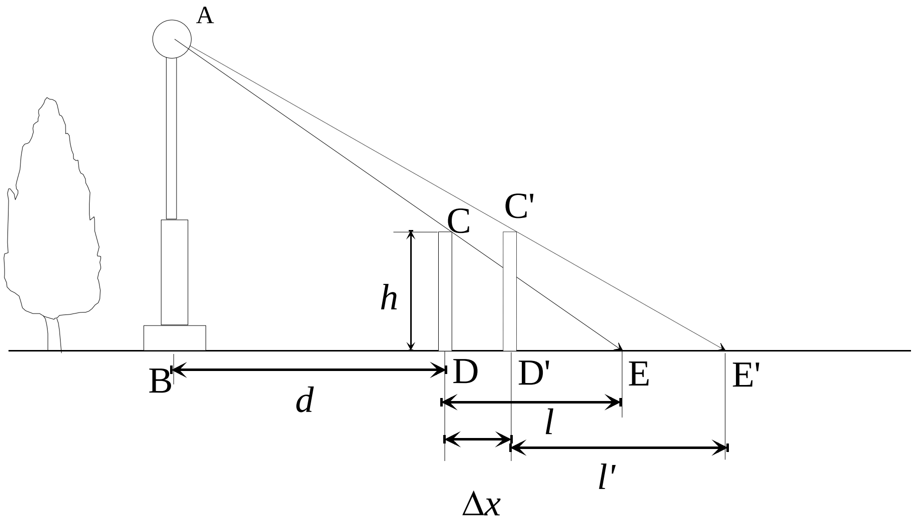
$$\frac{\text{AB}}{\text{CD}} = \frac{d + l}{l} \qquad (12.1.\ 1\ )$$

Iz sličnosti trouglova ΔABE' i ΔDC'D'E' možemo pisati:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{C'D'}} = \frac{d + \Delta x + l'}{l'} \qquad (12.1.\ 2\ )$$

Pošto je CD=C'D' (visina štapa ostaje ista), sledi:

$$\frac{d + l}{l} = \frac{d + \Delta x + l'}{l'} \qquad (12.1.\ 3\ )$$



Slika 12.1. 2

Iz relacije (13.1.3) neposredno dobijamo:

$$\Delta x = l'\left(\frac{d + l}{l} - 1\right) - d = 2\mathrm{m}$$

12.1.3 Nađi energiju fotona talasne dužine 600 nm. Koliki je impuls ovog fotona? Kolika je masa fotona?

12.1.3.R

$$E = h\frac{c}{\lambda} = 3{,}31\mathrm{aJ}$$

Veoma česta jedinica u ovim slučajevima je 1eV (elektron volt):

$$1\mathrm{eV} = 0{,}16a\mathrm{J}$$

Tada možemo napisati:

$$E = 20{,}7\mathrm{eV}$$

Impuls fotona iznosi:

$$p = \frac{h}{\lambda} = 1{,}1 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Masa fotona je: $$m = \frac{h}{\lambda c} = 0{,}467 \cdot 10^{-35}\,\mathrm{kg}$$

12.2 Fotometrijske veličine i jedinice. Fotometrijski zakoni

12.2.1 Centralni prosotrni ugao od 0,75sr iseca na sferi površinu od 470cm^2. Odredi poluprečnik sfere.

12.2.1.R

Iz relacije $\Omega = \dfrac{S}{R^2}$ dobijamo:

$$R = \sqrt{\frac{S}{\Omega}} = 25\text{cm}$$

12.2.2 Na ekran površine 0,5m^2 pada paralelan snop svetlosti čiji je svetlosni fluks 100 lm. Ekran delimično reflektuje svetlost, a delimično je propušta. Koeficijent refleksije iznosi 30%, a koeficijent transparencije iznosi 20%. Kolika je osvetljenost ekrana? Koliki je osvetljaj ekrana sa prednje strane? Koliki je osvetljaj ekrana sa zadnje strane?

12.2.2.R Osvetljenost ekrana iznosi:

$$E = \frac{\Phi}{S} = 200\frac{\text{lm}}{\text{m}^2} = 200\text{lx}$$

Osvetljaj sa prednje strane iznosi:

$$R_p = \rho\frac{\Phi}{S} = 60\text{lx}\ ,$$

a sa zadnje strane:

$$R_p = \tau\frac{\Phi}{S} = 40\text{lx}$$

12.2.3 Sa leve strane je postavljen izvor svetlosti jačine 50cd na rastojanju 20cm, a sa desne strane ispitivani izvor svetlsoti. Osvetljenost oba polja fotometra je ista kada je drugi izvor na rastojanju 60cm od fotometra. Koliki je intenzitet svetlosti drugog izvora?

12.2.3.R Iz jednakosti osvetljenosti imamo:

$$I_2 = I_1\frac{r_2^2}{r_1^2} = 450\text{cd}$$

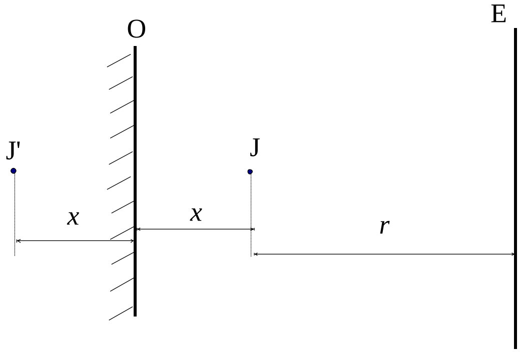
12.2.4 Sijalica od 400cd se nalazi na rastojanju 1m od ekrana. Na kolikom rastojanju od sijalice treba postaviti ravno ogledalo da bi se u centru ogledala dobila osvetljenost uvećana za 100lx?

12.2.4.R Ako nema ogledala tada je osvetljenost:

$$E_1 = \frac{I}{r^2} \tag{12.2. 1 }$$

Ako se postavi ogledalo, tada je osvetljenost:

$$E_2 = \frac{I}{(r+2x)^2} + \frac{I}{r^2} \tag{12.2. 2 }$$



Slika 12.2. 1

Po uslovu zadatka, osvetljenost treba da se uveća za određanu vrednost:

$$E_2 = E_1 + \Delta E \tag{12.2. 3 }$$

Zamenom izraza za osvetljenost u ova dva slučaja, relacije (12.2.1) i (12.2.2), u relaciju (12.2.3), dobijamo:

$$\frac{I}{(r+2x)^2} + \frac{I}{r^2} = \frac{I}{r^2} + \Delta E$$

odakle nakon sređivanja izraza dobijamo:

$$x = \frac{\sqrt{\frac{I}{\Delta E}} - r}{2} = 50\text{cm}$$

Znači da ogledalo treba da bude udaljeno od izvora 50cm.

12.2.5 Dva izvora jačina I_1=75cd i I_2=48cd se nalaze na rastojanju 1,8m. Na kom mestu između ova dva izvora treba postaviti list hartije da bi ona bila sa obe strane jednako osvetljena?

12.2.5.R

$$x = \frac{l}{1+\sqrt{\frac{I_2}{I_1}}} = 1\text{m od prvog izvora.}$$

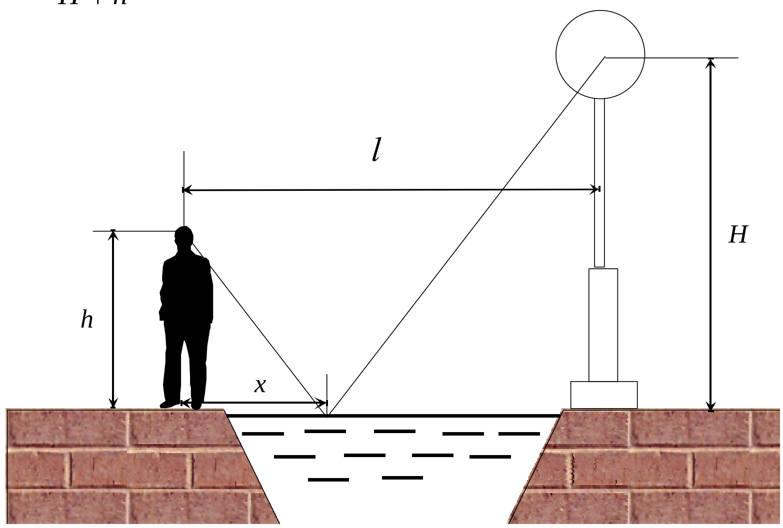
12.3 Odbijanje i prelamanje svetlosti. Totalna refleksija

12.3.1 Čovek stoji na obali reke. Na drugoj strani reke je postavljena svetiljka visine H=2,8 m. Svetiljka emituje svetlost koja se reflektuje od reke i pada čoveku u oči. Rastojanje između svetiljke i čoveka iznosi $l = 23\text{m}$ a čovek je visok h = 180 cm (približno visina očiju). Odredi mesto gde pada zrak svetlosti na vodenu površinu, koji se reflektuje čoveku u oči.

12.3.1.R Iz sličnosti trouglova (vidi sliku 12.3.1):

$$\frac{x}{h} = \frac{l - x}{H}$$

Odatle sledi: $x = \dfrac{lh}{H + h} = 9\text{m}$



Slika 12.3 1

12.3.2 Svetlost se kreće iz vazduha u tečnost. Brzina svetlosti u vazduhu iznosi približno $c_1 = 3 \cdot 10^8 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$, a u tečnosti $c_2 = \sqrt{3} \cdot 10^8 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$. Ako je svetlosni zrak pao na tečnost pod uglom od 60°, koliki je prelomni ugao?

12.3.2.R Iz relacije za prelamanje svetlosti sledi:

$$\sin\beta = \frac{c_2}{c_1}\sin\alpha = \frac{\sqrt{3 \cdot 10^8 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}}}{3 \cdot 10^8 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

$\beta = 30°$

12.3.3 Zbir upadnog i prelomnog ugla iznosi 90°. Upadni ugao je dvostruko veći od prelomnog ugla. Ako se brzine u prvoj i drugoj sredini razlikuju za $c_1 - c_2 = 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, odrediti vrednosti tih brzina.

12.3.3.R Po uslovima zadatka možemo pisati:

$$\alpha + \beta = 90^\circ ; \ \alpha = 2\beta$$

odakle sledi $\alpha = 60°$ i $\beta = 30°$. Takođe ćemo zapisati uslov za brzine:

$$c_1 - c_2 = \Delta c \tag{12.3. 1 }$$

odnosno:

$$c_2 = c_1 - \Delta c \tag{12.3. 2 }$$

Na osnovu zakona prelamanja i uslova (13.3.2) pišemo:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1}{c_1 - \Delta c} \tag{12.3. 3 }$$

rešavanjem ove jednačine po c_1 dobijamo:

$$c_1 = \frac{\Delta c}{1 - \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}} \tag{12.3. 4 }$$

Zamenom podataka dobijamo:

$$c_1 = 2{,}4 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

odnosno iz relacije (12.3.2):

$$c_2 = 1{,}4 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

12.3.4 Svetlost prelazi iz vode, indeksa prelamanja 1,33, u nepoznatu sredinu, tako da je upadni ugao 45°, a prelomni ugao 30°. Koliki je indeks prelamanja nepoznate sredine.

12.3.4.R Iz zakona prelamanja svetlosti sledi:

$$n_2 = n_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$n_2 = 1{,}9$$

12.3.5 Koliki je indeks prelamanja dijamanta ako je kritični ugao totalne refleksije za granicu vazduh-dijamant $\alpha_g = 24^0 40'$ ($\sin 24^0 40' = 0{,}417$)?

Iz relacije za totalnu refleksiju dobijamo: $n = \dfrac{1}{\sin\alpha_g} = 2{,}4$

12.4 Prelamanje svetlosti kroz planparalelnu ploču

12.4.1 Za koliko se pomeri svetlosni zrak koji prolazi kroz staklenu planparalelnu ploču debljine 5cm i indeksa prelamanja 1,5? Na ploču pada svetlosni zrak pod uglom $\alpha = 30°$.

12.4.1.R Iz relacije

$$a = d\sin\alpha\left(1 - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right) \qquad (12.4.1)$$

sledi

$a \approx 1\text{cm}$

12.4.2 Svetlosni zrak pada na staklenu planparalelnu ploču indeksa prelamanja 1,55 pod uglom 60°. Kolika je debljina ploče ako se zrak pomerio prilikom prolaska kroz ploču za 2mm?

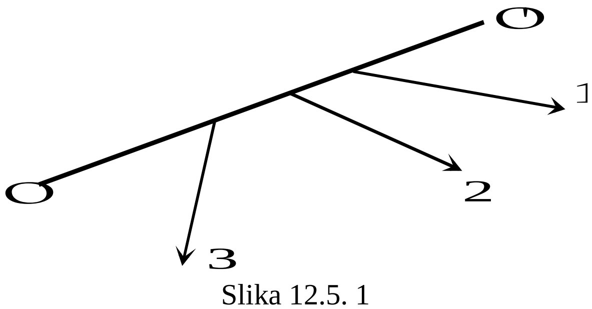
12.4.2.R Iz relacije (13.4.1) dobijamo *d*=3,4mm

12.5 Ravno ogledalo

12.5.1 Čovek visine 180 cm stoji ispred ravnog ogledala koje je okačeno o zid. Kolika treba da bude najmanja visina ogledala da bi se on ceo video u ogledalu.

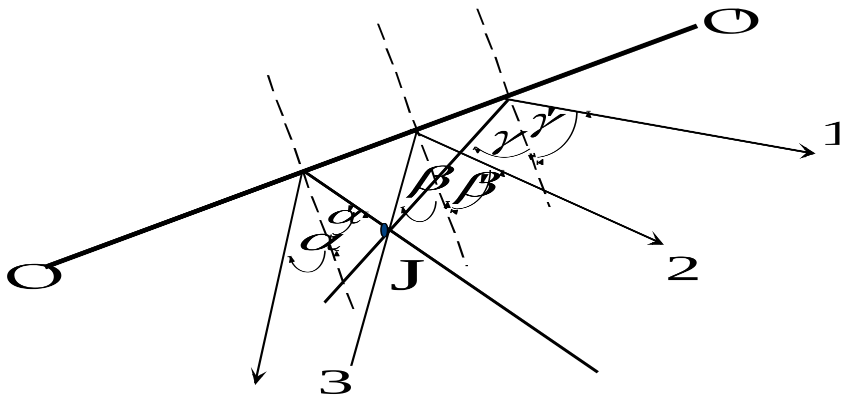
12.5.1.R Gornja ivica ogledala mora biti na polovini rastojanja od očiju do temena, a donja ivica na polovini rastojanja od očiju do stopala. Znači, minimalna visina ogledala mora biti jednaka polovini visine čoveka, tj. 90cm.

12.5.2 Zraci 1, 2 i 3 se odbijaju od ravnog ogledala OO'. Nacrtaj izvor svetlosti iz kojeg dolaze zraci na ogledalo na slici 13.5.1. Izvor svetlosti je J.



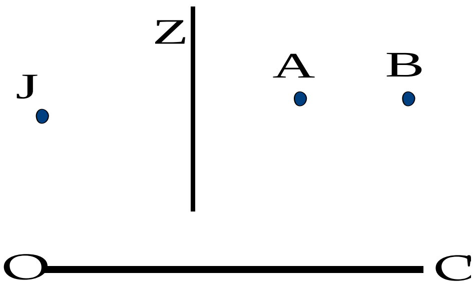
Slika 12.5. 1

12.5.2.R Na slici 13.5.2 je data konstrukcija izvora svetlosti.

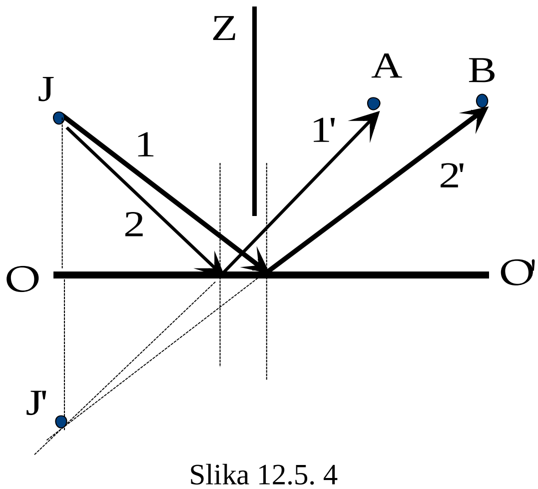


Slika 12.5. 2

12.5.3 Nacrtaj put zrakova svetlosti od izvora J do tačaka A i B na slici 13.5.3. Z je prepreka a OO' ravno ogledalo.



Slika 12.5. 3

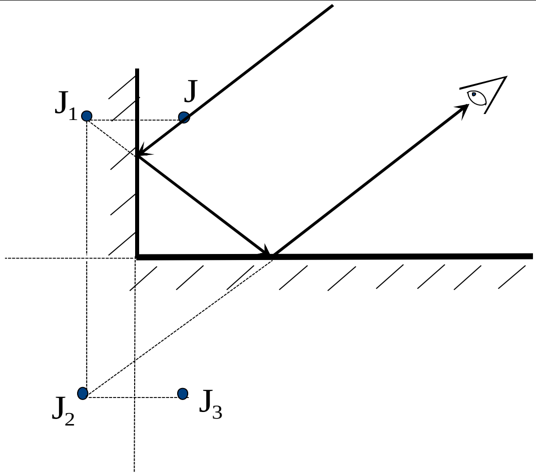


Slika 12.5. 4

12.5.3.R Rešenje je dato na slici 12.5.4. J' predstavlja imaginarni lik izvora J. On se dobija u preseku reflektovanih zrakova (produžetaka tih zrakova, i zbog toga lik i jeste imaginaran!)

12.5.4 Predmet je postavljen između dva ravna ogledala koja stoje pod uglom od 90°. Koliko likova će se obrazovati? Konstruiši likove. Nacrtaj put jednog svetlosnog zraka.

12.5.4.R 3. Vidi sliku 12.5.5.



Slika 12.5. 5

12.6 Sferno ogledalo

12.6.1 Sunčevi zraci padaju paralelno sa optičkom osom na konkavno ogledalo. Na optičkoj osi ogledala, na rastojanju 20cm postavi se papir natopljen benzinom. Posle kratkog vremena papir se upali. Koliki je poluprečnik krivine ovog ogledala?

12.6.1.R Papir će se upaliti jer se nalazi u žiži ogledala, znači žižna daljina iznosi $f = 20\text{cm}$. Sledi: $R = 2f = 40\text{cm}$.

12.6.2 Kolika je žižna daljina sfernog ogledala koje daje realan lik na daljini 38cm, ako je predmet udaljen 76cm od temena ogledala. Kakvo je ovo ogledalo?

12.6.2.R Iz jednačine ogledala imamo $f = \dfrac{pl}{p+l} = 25{,}11\text{cm}$. Pošto je lik realan u pitanju je konkavno ogledalo.

12.6.3 Veličina lika u konkavnom ogledalu je ista kao i veličina predmeta i iznosi 3cm. Lik je na udaljenosti 15cm od temena ogledala. Kolika je žižna daljina ovog ogledala?

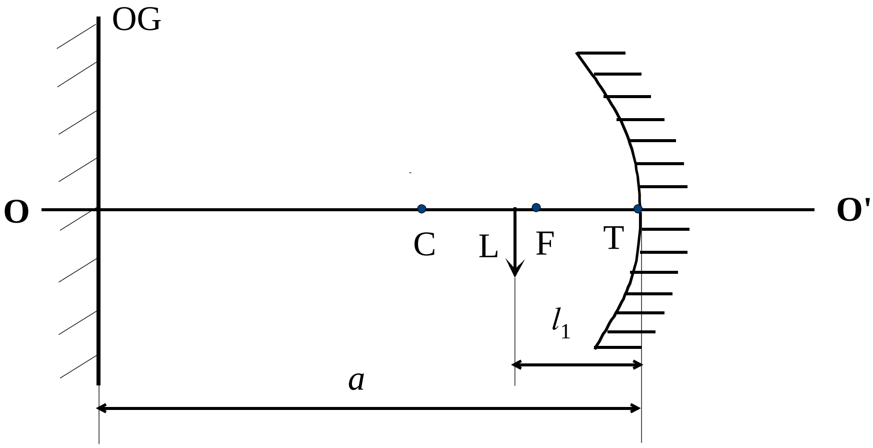
12.6.3.R Iz definicije uvećanja sledi $U = \dfrac{L}{P} = \dfrac{3\text{cm}}{3\text{cm}} = 1$, odnosno iz definicije imamo: $U = \dfrac{l}{p} = 1$, odnosno $l = p$. Dalje koristimo jednačinu za konkavna ogledala u obliku $f = \dfrac{pl}{p+l}$ i dobijamo $f = 7{,}5\text{cm}$.

12.6.4 Konkavno sferno ogledalo daje tri puta uvećan lik. Lik i predmet su na međusobnoj udaljenosti 16cm. Kolika je žižna daljina ogledala?

12.6.4.R Iz uslova zadatka imamo: $l - p = 16\text{cm}$ i iz definicije uvećanja $l = 3p$. Kombinovanjem ovih relacija dobijamo $p = 8\text{cm}$ i $l = 24\text{cm}$. Iz jednačine ogledala dobijamo za žižnu daljinu $f = 6\text{cm}$.

12.6.5 Poluprečnik krivine konkavnog ogledala iznosi $R = 15\text{cm}$. Lik je udaljen od temena $l_1 = 8\text{cm}$. Ako na udaljenosti od $a = 60\text{cm}$ od temena sfernog ogledala postavimo ravno ogledalo normalno na optičku osu, kolika je udaljenost lika(l_2) od temena konkavnog ogledala (vidi sliku 13.6.1)?

12.6.5.R Iz podatka o poluprečniku krivine sočiva možemo dobiti žižnu daljinu $f = \dfrac{R}{2} = 7{,}5\text{cm}$. Iz jednačine za sferno konkavno ogledalo dobijamo udaljenost predmeta $p_1 = 56\text{cm}$ od temena sfernog ogledala. Udaljenost istog predmeta od ravnog ogledala iznosi $p_2 = a - p_1 = 4\text{cm}$. Udaljenost lika u ravnom ogledalu je isto tolika, samo sa desne strane ogledala. Sada možemo izračunati udaljenost lika u ravnom ogledalu od temena sfernog ogledala $l_2 = a + l_1 = 64\text{cm}$.



Slika 12.6. 1

12.6.6 Predmet, veličine 2 cm se nalazi na rastojanju 30 cm od temena ogledala, čiji je radijus krivine 20 cm. Gde će se nalaziti lik predmeta i kakav će biti lik? Konstruiši lik predmeta. Koliko je uvećanje lika?

12.6.6.R Pošto znamo radijus krivine ogledala, dobijamo za žižnu daljinu:

$$f = \frac{R}{2} = 10\text{cm}$$

Iz ovih podataka možemo zaključiti da je predmet na rastojanju većem od dvostruke žižne daljine i da će se lik nalaziti između žižne daljine i dvostruke žižne daljine.

Iz jednačine ogledala dobijamo udaljenost lika od temena ogledala:

$$l = \frac{pf}{p-f} = 15\text{cm}$$

Na osnovu ovog rezultata, pošto je lik udaljen +10 cm od temena ogledala, zaključujemo da je lik realan.

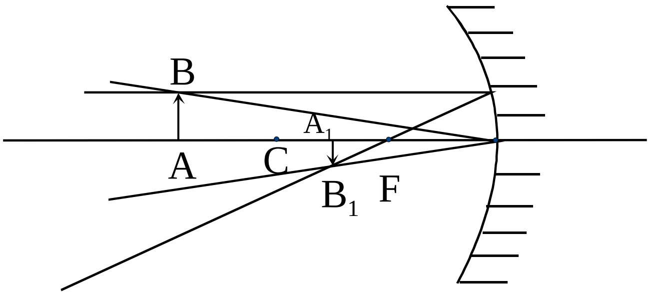
Iz relacije za uvećanje možemo dobiti veličinu lika:

$$L = \frac{l}{p} P = 1\text{cm}$$

Iz ovog podatka možemo zaključiti da je lik umanjen, odnosno:

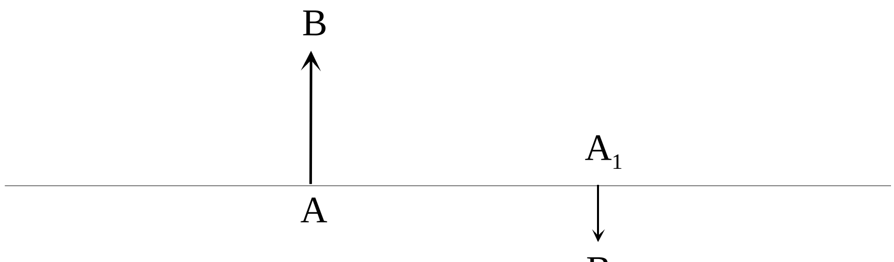
$$U = \frac{L}{P} = \frac{1\text{cm}}{2\text{cm}} = 0{,}5$$

Na kraju ćemo konstruisati lik predmeta *AB* na slici 13.6.2. Sa slike vidimo da je lik izvrnut.

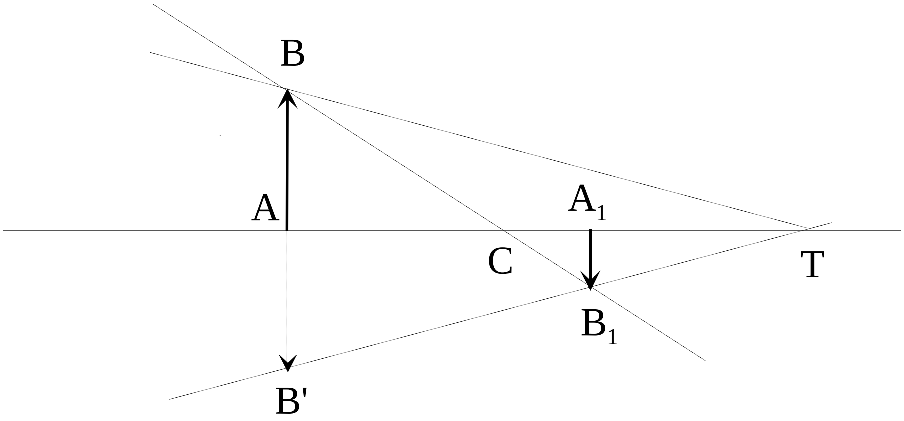


Slika 12.6. 2

12.6.7 Pomoću konkavnog sfernog ogledala je dobijen lik A_1B_1 predmeta AB. Na slici 13.6.3 su prikazani predmet, lik i optička osa. Konstruisati ogledalo i objasniti kakav je lik predmeta.



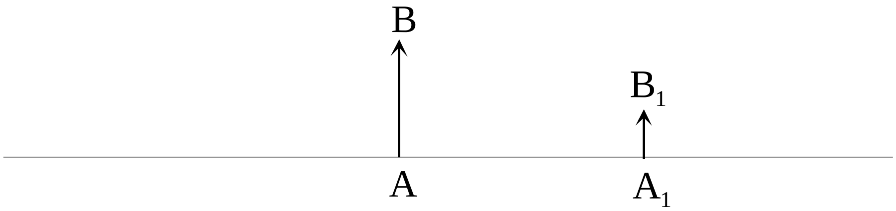
Slika 12.6. 3



Slika 12.6. 4

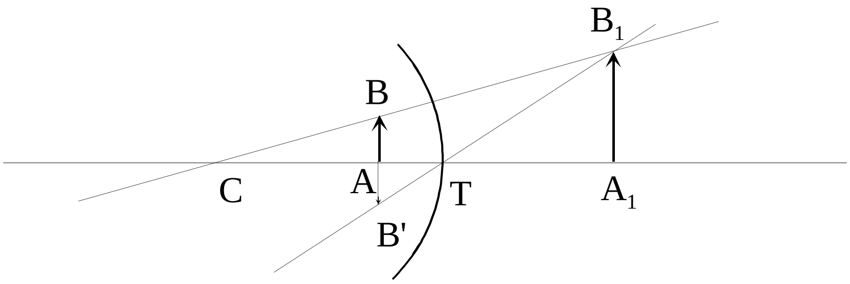
12.6.7.R Povučemo liniju kroz tačke BB_1 (vidi sliku 13.6.4). U preseku ove linije i optičke ose dobijamo centar ogledala C - ova linija je u stvari četvrti karakerističan zrak. Konstruiše se tačka B', simetrična tački B u odnosu na optičku osu. Provučemo liniju kroz tačke $B'B_1$. U preseku ove linije i optičke ose dobijamo teme ogledala T. Linija kroz $B'B_1$ predstavlja odbijeni zrak od temena ogledala. Upadni zrak do temena ćemo sada dobiti ako povučemo liniju kroz tačke B i T. Žiža konkavnog ogledala se nalazi na polovini rastojanja između temena i centra ogledala. Otvor sfernog konkavnog ogledala je uvek prema predmetu. Lik je očigledno umanjen izvrnut i realan.

12.6.8 Pomoću konkavnog sfernog ogledala je dobijen imaginaran lik A_1B_1 predmeta AB. Na slici 13.6.5 su prikazani predmet, lik i optička osa. Konstruisati ogledalo i objasniti kakav je lik predmeta.



Slika 12.6. 5

12.6.8.R Kao u prethodnom primeru, centar ogledala ćemo dobiti povlačenjem linije kroz tačke B i B_1. Teme ogledala ćemo dobiti ako prvo konstruišemo simetričnu tačku(B') tačke B, a zatim povučemo liniju kroz tačke B' i B_1. U preseku optičke ose i ove linije dobijamo teme ogledala. Otvor ogledala je okrenut prema predmetu. Vidimo da je lik iza ogledala, tj. imaginaran, uvećan i usparavan, vidi sliku 12.6.6.



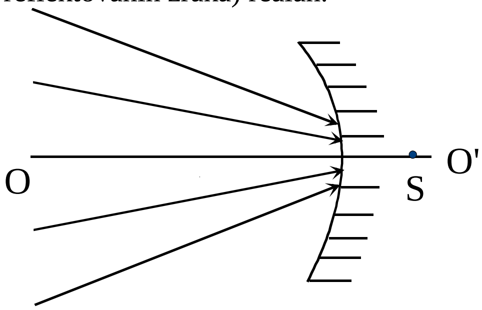
Slika 13.6. 6

12.6.9 Konvergentan snop svetlosti pada na konkavno sferno ogledalo poluprečnika krivine 70cm (vidi sliku 12.6.7). Produžeci zrakova se seku u tački *S* iza ogledala, na rastojanju 15cm od temena ogledala. Gde će se seći reflektovani zraci? Da li je njihov presek realan?

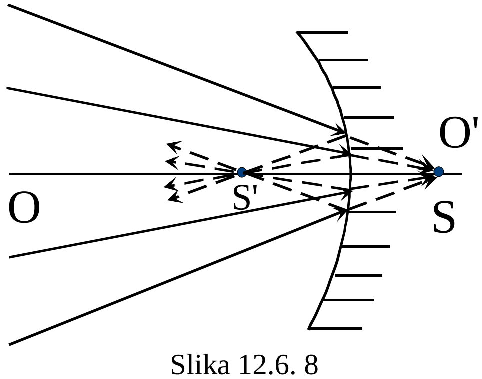
12.6.9.R Tačka *S* se može smatrati imaginarnim predmetom za ovo ogledalo, na osnovu relacije za sferno konkavno ogledalo imamo:

$$-\frac{1}{p}+\frac{1}{l}=\frac{2}{R}$$

Iz ove relacije dobijamo: $l = 105\text{cm}$. Sa slike 12.6.8 se vidi da je lik (presek reflektovanih zraka) realan.



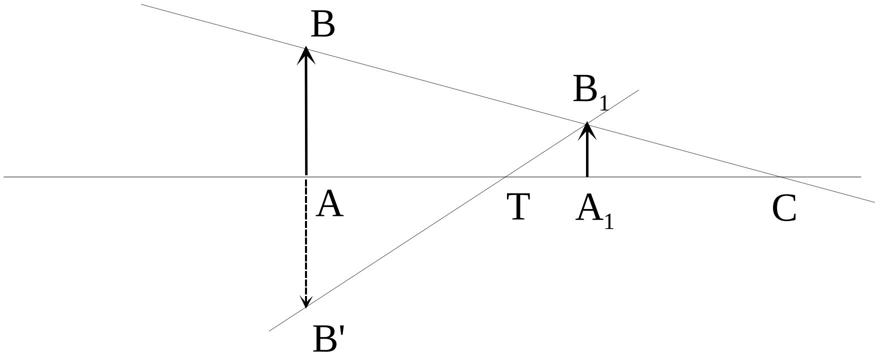
Slika 12.6. 7



Slika 12.6. 8

12.6.10 Konveksno sferno ogledalo formira imaginaran lik A_1B_1 predmeta AB. Na slici 13.6.9 su predstavljeni lik, predmet i optička osa. Nacrtaj konveksno ogledalo i ustanovi osobine lika?

12.6.10.R Analiziraj sliku 12.6.10. Lik je uspravan, umanjen i imaginaran.



Slika 13.6. 9

12.6.11 Sferno ogledalo daje imaginarni lik koji je 4 puta manji od predmeta a nalazi se na 12cm od temena ogledala. Nađi:

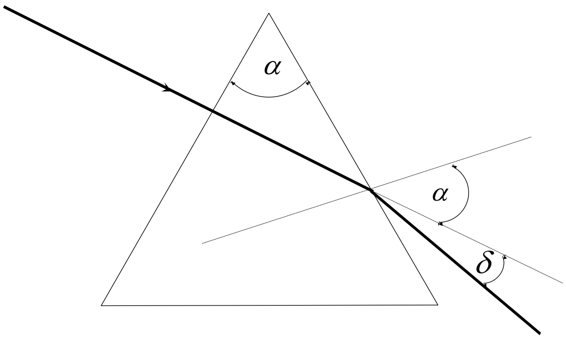
a. udaljenost predmeta od ogledala;
b. kakvo je ogledalo?
c. žižnu daljinu ogledala.

12.6.11.R:

a. p=48cm;
b. konveksno ogledalo;
c. f=-16cm.

12.7 Prizma

12.7.1 Svetlosni zrak pada normalno na bočnu stranu prizme indeksa prelamanja 1,5.Skretni ugao iznosi $\delta = 30°$. Odrediti ugao prizme α.



Slika 12.7. 1

12.7.1R Prilikom ulaska zraka u prizmu ne dolazi do prelamanja jer je upadni ugao 90°. Za granicu prizma vazduh važi:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{n}$$

Sa slike 12.7.1 je očigledno:

$$\beta = \alpha + \delta$$

Uvrštavanjem dobijamo:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\delta)} = \frac{1}{n}$$

Imamo u vidu adicionu formulu:

$$\sin(\alpha+\delta) = \sin\alpha\cos\delta + \sin\delta\cos\alpha$$

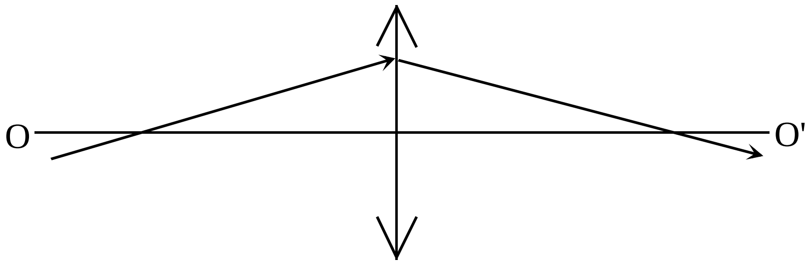
Nakon jednostavnih algebarskih transformacija dobijamo:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\delta}{n-\cos\delta} = \frac{\frac{1}{2}}{1{,}5-\frac{\sqrt{3}}{2}} = 0{,}79$$

$\alpha = 38{,}3°$

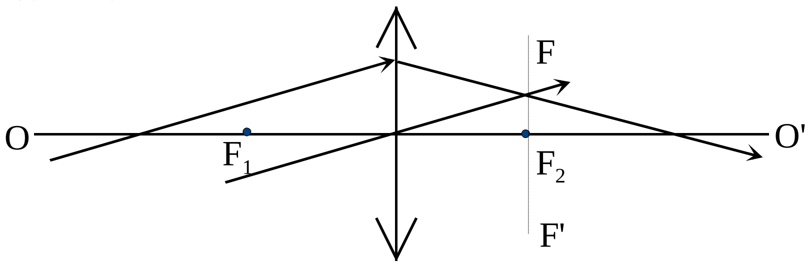
12.8 Sočiva

12.8.1 Na slici 13.8.1 je dat zrak svetlosti koji pada na tanko sabirno sočivo, i zrak koji se prelomio u sočivu. Nađi grafički žiže ovog sočiva.



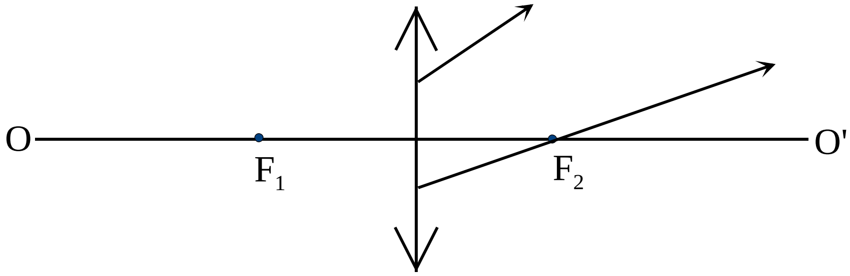
Slika 12.8. 1

12.8.1.R Na slici 12.8.2 je dato rešenje. Povučemo zrak koji je paralelan datom zraku kroz optički centar sočiva. U preseku ova dva zraka se nalazi žižna ravan. Povučemo normalu iz tačke preseka do preseka sa optičkom osom sočiva. Presek normale i optičke ose nam daje desnu žižu. Simetrično, na drugoj strani od sočiva se nalazi leva žiža.



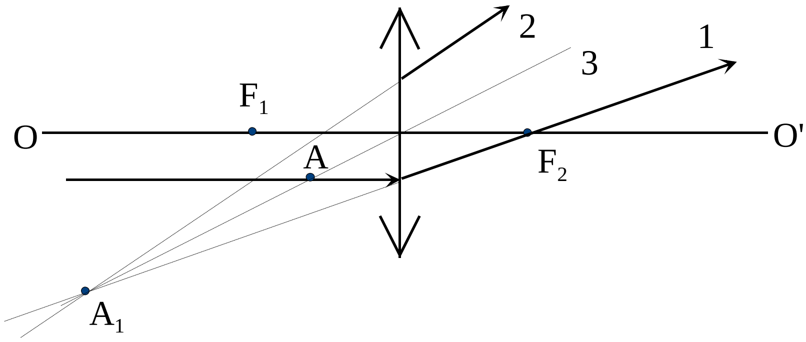
Slika 12.8. 2

12.8.2 Na slici 12.8.3 su prikazana dva zraka svetlosti. Jedan od tih zrakova prolazi kroz žižu sočiva. Nađi položaj svetle tačke i njenog lika.



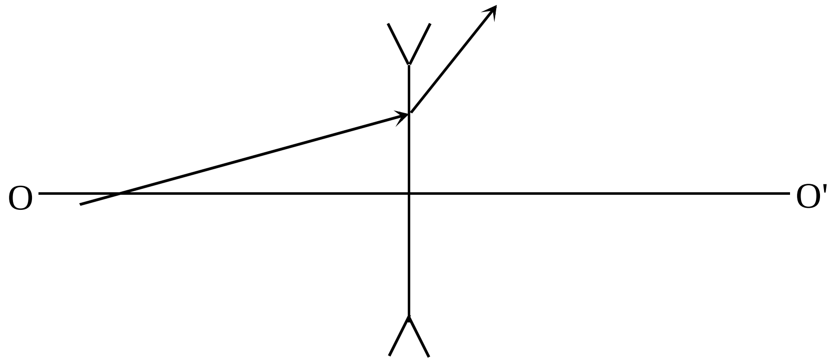
Slika 12.8. 3

12.8.2.R Rešenje je dato na slici 12.8.4. Povučemo produžetke zraka, s tim što zrak 1 nakon produžetka do sočiva dalje povlačimo paralelno sa optičkom osom. Drugi yrak samo produžimo. U preseku produžetaka zrakova 1 i 2 dobijamo lik predmeta A_1. Povućićemo još jedan zrak (3) kroz optički centar sočiva i kroz tačku A_1. Upreseku ovog zraka i zraka koji ide paraleleno sa optičkom osom sočiva dobijamo predmet A.



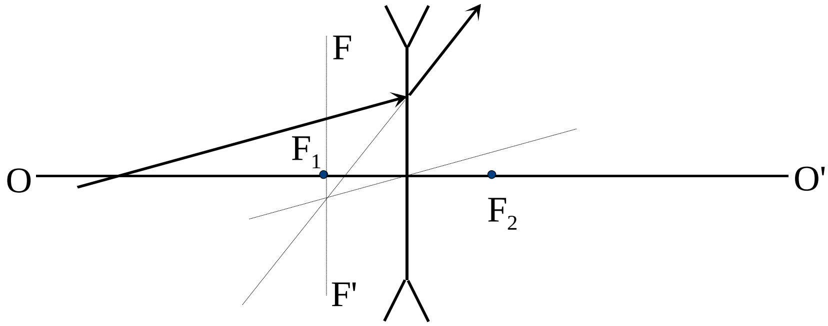
Slika 12.8. 4

12.8.3 Na slici 12.8.5 je prikazan zrak koji se kreće prema rasipnom sočivu i nakon prolaska kroz sočivo. Konstruiši žiže sočiva.



Slika 12.8. 5

12.8.3.R Rešenje je dato na slici 12.8.6. Kroz centar sočiva povučemo zrak paralelan sa datim zrakom, pre nego što je prošao kroz sočivo. U preseku ova dva zraka dobijamo žižnu ravan. Povučemo normalu na optičku osu sočiva i u preseku normale i optičke ose dobijamo levu žižu rasipnog sočiva. Simetrično u odnosu na sočivo se nalazi desna žiža.



Slika 12.8. 6

12.9 Jednačina tankih sočiva

12.9.1 Žižna daljina tankog sabirnog sočiva iznosi 25cm. Na rastojanju 50cm od temena sočiva se nalazi predmet. Gde se nalazi lik ovog predmeta?

12.9.1.R Iz opšte jednačine sočiva dobijamo:

$$l = \frac{pf}{p - f} = 50\text{cm}$$

12.9.2 Ispred tankog sabirnog sočiva, žižne daljine 30cm, se nalazi predmet tako da je ispunjen uslov: $f - p = 10\text{cm}$. Predmet je između žiže i sočiva. Odredi položaj lika. Da li je lik realan?

12.9.2.R Iz uslova zadatka nalazimo da je predmet na udaljenosti:

$$p = f - 10\text{cm} = 20\text{cm}$$

Iz jednačine sočiva dobijamo: $l = -60\text{cm}$. Lik je imaginaran.

12.9.3 Predmet se nalazi na rastojanju 40cm od temena rasipnog sočiva. Ako je lik na udaljenosti od 15cm od temena sočiva, kolika je žižna daljina ovog sočiva?

12.9.3.R Uzmimo jednačinu rasipnog sočiva u obliku:

$$f = \frac{pl}{p - l} = 40\text{cm}$$

12.9.4 Tanko sabirno sočivo ima žižnu daljinu 25cm. Predmet visine *P*=5cm se nalazi na rastojanju *p*=1,5*f*. Odrediti veličinu lika i njegov položaj. Koliko je uvećanje ovog sočiva?

12.9.4.R Iz uslova zadatka dobijamo: $p = 1{,}5f = 37{,}5\text{cm}$

Iz jednačine sočiva imamo:

$$l = \frac{pf}{p-f} = 3f = 75\text{cm}$$

Iz definicije uvećanja i uslova zadatka imamo:

$$\frac{L}{P} = \frac{l}{1{,}5f}$$

dobijamo: $L = \dfrac{lP}{1{,}5f} = \dfrac{75\text{cm}\cdot 5\text{cm}}{1{,}5\cdot 25\text{cm}} = 10\text{cm}$

Uvećanje dobijamo iz definicije: $U = \dfrac{l}{p} = \dfrac{75\text{cm}}{37{,}5\text{cm}} = 2$

12.9.5 Predmet visine *P*=7,2cm se nalazi na optičkoj osi na rastojanju *p*=36cm od temena sočiva, žižne daljine *f*=45cm. Odrediti položaj lika i njegovu veličinu. Koliko je uvećanje sočiva?

12.9.5.R Iz jednačine sočiva za rasipna sočiva dobijamo:

$$l = \frac{pf}{p+f} = 20\text{cm}$$

Iz jednačine za uvećanje sočiva sledi:

$$L = \frac{lP}{p} = \frac{20\text{cm}\cdot 7{,}2\text{cm}}{36\text{cm}} = 4\text{cm}$$

Iz definicije dobijamo uvećanje: $U = 0{,}56$

12.9.6 Sabirno sočivo ima žižnu daljinu *f*=40cm. Kolika je optička jačina ovog sočiva?

12.9.6.R $D = \dfrac{1}{f} = 2{,}5\dfrac{1}{\text{m}}$. Optička jačina ovog sočiva je +2,5 dioptrije.

12.9.7 Kolika je optička jačina rasipnog sočiva žižne daljine *f*= - 50 cm?

12.9.7.R $D = \dfrac{1}{f} = -2\dfrac{1}{\text{m}}$. Optička jačina ovog sočiva je -2 dioptrije.

12.9.8 Tanko sabirno sočivo je umanjilo realni predmet 2 puta. Ako predmet primaknemo prema sočivu za 30cm dobijamo uvećan lik 2 puta. Kolike su udaljenosti predmeta i likova od temena sočiva u ova dva slučaja? Kolika je žižna daljina i optička jačina ovog sočiva?

12.9.8.R U prvom slučaju imamo:

$$\frac{l_1}{p_1}=\frac{1}{2} \qquad (12.9.\ 1\ )$$

Iz jednačine sočiva imamo:

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{l_1}=\frac{1}{f} \qquad (12.9.\ 2\ )$$

Zamenom prethodnog uslova dobijamo:

$$f=\frac{p_1}{3} \qquad (12.9.\ 3\ )$$

U drugom slučaju:

$$\frac{l_2}{p_2}=2 \qquad (12.9.\ 4\ )$$

uvrštavanjem ovog uslova u jednačinu sočiva dobijamo:

$$f=\frac{2}{3}p_2 \qquad (12.9.\ 5\ )$$

Izjednačavanjem desnih strana jednačina (12.9.3) i (12.9.5) i imajući u vidu uslov zadatka $p_2=p_1-30\text{cm}$, dobijamo:

$$p_1=60\text{cm};\ l_1\text{=30cm};\ p_2=30\text{cm};\ l_2\text{=60cm};\ f=20\text{cm};\ D=\frac{1}{f}=5\frac{1}{\text{m}}$$

Optička jačina ovog sočiva je +5 dioptrija.

12.9.9 Kolika je žižna daljina i optička jačina bikonkavnog sočiva, koje je načinjeno od materijala indeksa prelamanja 1,8 ako se ono nađe u vodi indeksa prelamanja 1,33. Poluprečnici krivina sočiva iznose 20cm i 40cm.

12.9.9.R U ovom slučaju uzimamo radijuse krivina sa negativnim predznakom:

$$D=\frac{1}{f}=-(n_{2,1}-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=-2{,}65\frac{1}{\text{m}}$$

odnosno za žižnu daljinu dobijamo f=37,74cm.

12.9.10 Kolika je žižna daljina bikonkavnog sočiva koje je načinjeno od stakla indeksa prelamanja n = 1,6? Poluprečnici krivina sočiva iznose R_1 = 10 cm i R_2 = 20 cm. Ako je predmet na udaljenosti 35 cm, gde će se formirati njegov lik?

12.9.10.R

$$f=-\frac{R_1R_2}{(n-1)(R_1+R_2)}=-11{,}1\text{cm}$$

$$l = -\frac{pf}{p+f} = -8{,}4\text{cm}$$ Lik je imaginaran.

12.9.11 Bikonveksno sočivo načinjeno od stakla, indeksa prelamanja n=1,6, u vazduhu ima žižnu daljinu f_0 = 10 cm.

a. Kolika će biti žižna daljina ovog sočiva ako se ono potopi u tečnost indeksa prelamanja n_1 = 1,5?

b. Kolika će biti žižna daljina ovog sočiva ako se ono potopi u tečnost čiji je indeks prelamanja n_2 = 1,7?

12.9.11.R

$$f_2 = f_0 \frac{n_2(n-1)}{n-n_2} = 1{,}02\text{m}$$

Sočivo je i dalje sabirno sa novom žižnom daljinom.

12.10 Ekvivalentna žiža sistema dva sočiva

12.10.1 Dva tanka sabirna sočiva, žižnih daljina $f_1 = 10\text{cm}$ i $f_2 = 12\text{cm}$, imaju zajedničku optičku osu. Sočiva se nalaze na udaljenosti d=35cm. Predmet se nalazi na rastojanju p=30cm od optičkog centra prvog sočiva. Odredi položaj lika i uvećanje sistema sočiva.

12.10.1.R Lik, koji se dobija od prvog sočiva se nalazi sa desne strane prvog sočiva na rastojanju:

$$l_1 = \frac{p_1 f_1}{p_1 - f_1} = 15\text{cm}$$

Taj položaj lika odgovara udaljenosti predmeta od drugog sočiva:

$$p_2 = d - l_1 = 20\text{cm}$$

Tada ćemo udanjenost lika od drugog sočiva dobiti iz relacije za sočiva:

$$l_2 = \frac{p_2 f_2}{p_2 - f_2} = 30\text{cm}$$

Uvećanje koje daje prvo sočivo iznosi:

$$U_1 = \frac{l_1}{p_1} = \frac{15\text{cm}}{30\text{cm}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

a uvećanje drugog sočiva je:

$$U_2 = \frac{l_2}{p_2} = \frac{30\text{cm}}{20\text{cm}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Uvećanje sistema sočiva iznosi:

$$U = U_1 \cdot U_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Konstrukcija likova je data na slici

12.10.2 Dva tanka sočiva, sabirno žižne daljine $f_1 = 20\text{cm}$ i rasipno žižne daljine $f_2 = 25\text{cm}$, imaju zajedničku optičku osu. Sočiva se nalaze na udaljenosti d=65cm. Predmet se nalazi na rastojanju p=40cm od optičkog sentra prvog sočiva. Odredi položaj lika i uvećanje sistema sočiva.

12.10.2.R Lik, koji se dobija od prvog - sabirnog sočiva se nalazi sa desne strane prvog sočiva na rastojanju:

$$l_1 = \frac{p_1 f_1}{p_1 - f_1} = 40\text{cm}$$

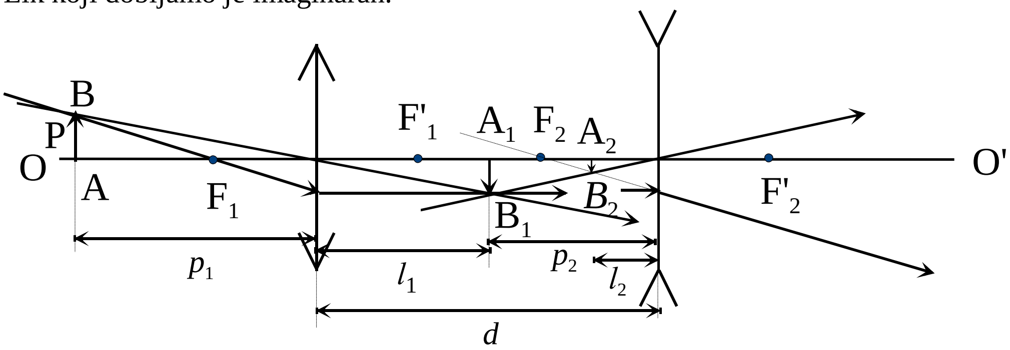
Taj položaj lika odgovara udaljenosti predmeta od drugog sočiva:

$$p_2 = d - l_1 = 25\text{cm}$$

Tada ćemo udaljenost lika od drugog sočiva dobiti iz relacije za sočiva:

$$l_2 = \frac{p_2 f_2}{p_2 + f_2} = 12{,}5\text{cm}$$

Lik koji dobijamo je imaginaran.



Slika 13.10. 1

Uvećanje koje daje prvo sočivo iznosi:

$$U_1 = \frac{l_1}{p_1} = \frac{40\text{cm}}{40\text{cm}} = 1$$

a uvećanje drugog sočiva je:

$$U_2 = \frac{l_2}{p_2} = \frac{12{,}5\text{cm}}{25\text{cm}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Uvećanje sistema sočiva iznosi:

$$U = U_1 \cdot U_2 = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Konstrukcija likova je data na slici 13.10.2.1.

12.10.3 Optički centrirani sistem sočiva se nalazi u vazduhu i sastoji se , gledajući sleva na desno od sočiva žižnih daljina $f_1 = 10\text{cm}$, $f_2 = -20\text{cm}$ i $f_3 = 5\text{cm}$. Rastojanje između prvog i drugog sočiva iznosi $d_1 = 15\text{cm}$, a između drugog i trećeg $d_2 = 11\text{cm}$. Predmet se nalazi u beskonačnosti. Gde se nalazi konačan lik?

12.10.3.R Lik se nalazi na rastojanju $l_3 = 7{,}5\text{cm}$ desno od trećeg sočiva.

12.11 Konstrukcija likova kod sočiva

12.11.1 Predmet, visine 3cm, se nalazi na rastojanju 45cm od temena sabirnog sočiva. Žižna daljina sočiva iznosi 15cm. Odrediti računski i grafički gde će se nalaziti lik predmeta. Kolika je veličina predmeta i koliko je uvećanje sočiva?

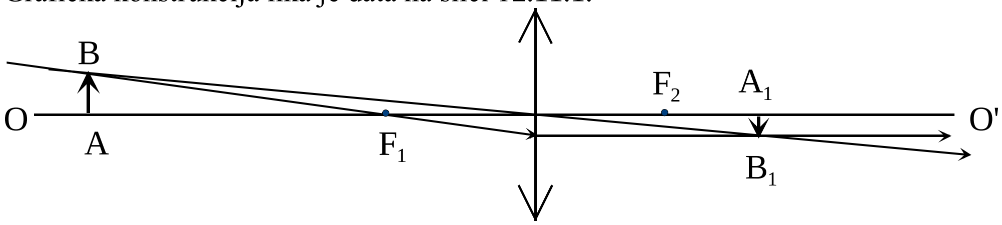
12.11.1.R Iz jednačine sočiva (4.4.6) dobijamo udaljenost lika:

$$l = \frac{pf}{p - f} = 22{,}5\text{cm}$$

Iz jednačine za uvećanje dobijamo veličinu lika i uvećanje sočiva

$$L = \frac{P}{p} l = 1{,}5\text{cm} \;;\; U = \frac{l}{p} = 0{,}5$$

Grafička konstrukcija lika je data na slici 12.11.1.



Slika 12.11.1

12.11.2 Predmet, visine 4cm, se nalazi na rastojanju 45cm od temena rasipnog sočiva. Žižna daljina sočiva iznosi 15cm. Odrediti računski i grafički gde će se nalaziti lik predmeta. Kolika je veličina predmeta i koliko je uvećanje sočiva?

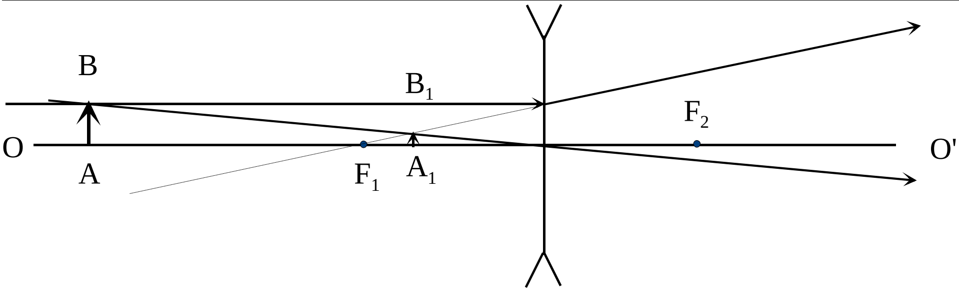
12.11.2.R Iz jednačine sočiva dobijamo udaljenost lika:

$$l = \frac{pf}{p + f} = 11{,}25\text{cm}$$

Iz jednačine za uvećanje dobijamo veličinu lika i uvećanje sočiva

$$L = \frac{P}{p} l = 1\text{cm} \;;\; U = \frac{l}{p} = 0{,}02$$

Grafička konstrukcija lika je data na slici 13.11.2.



Slika 13.11.2

12.12 Optički instrumenti

12.12.1 Žižna daljina lupe je 1 cm. Koliko je uvećanje lupe, ako je:

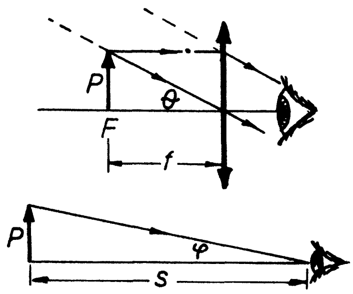
a) oko akomodirano na beskonačnost;

b) oko akomodirano na daljinu jasnog vida?

12.12.1.R

a) Kada je oko akomodirano na beskonačnost, tada se lik vidi u beskonačnosti, što znači da je predmet postavljen u žižu sočiva (slika 13.12.1). Tangens ugla pod kojim oko vidi lik je:

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{P}{f}$$



Slika 13.12. 1

Kada bi se golim okom posmatrao dati predmet na daljini jasnog vida *s*, tangens ugla φ pod kojim bi se video bio bi:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{P}{s}$$

Sledi da je uvećanje lupe:

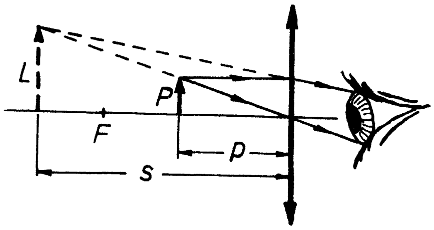
$$U = \frac{\mathrm{tg}\theta}{\mathrm{tg}\varphi}$$

$$U = \frac{s}{f}$$

$$U = 25$$

b) Kada je oko akomodirano na daljinu jasnog vida, to znači da se lik dobija na rastojanju 25 cm od sočiva (slika 13.12.2). Dakle, za ugao θ pod kojim se vidi lik važi:

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{L}{s}$$



Slika 12.12. 2

Kada se predmet gleda golim okom na daljini jasnog vida, za ugao pod kojim se vidi važi:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{P}{s}$$

Uvećanje lupe je:

$$U = \frac{\mathrm{tg}\theta}{\mathrm{tg}\varphi}$$

$$U = \frac{L}{P}$$

Sa slike se vidi da je:

$$\frac{L}{P} = \frac{s}{p}$$

$$U = \frac{s}{p}$$

Iz jednačine sočiva:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

sledi:

$$p = \frac{sf}{f+s}$$

Dakle, uvećanje lupe je:

$$U = \frac{f+s}{f}$$

Odnosno

$$U = 1 + \frac{s}{f}$$

$$U = 26$$

12.12.2 Žižne daljine objektiva i okulara mikroskopa su 5 cm i 3 cm. Koliko je uvećanje mikroskopa, ako je dužina mikroskopske cevi 12 cm?

12.12.2.R Iz izraza za uvećanje mikroskopa:

$$U = \frac{d \cdot l}{f_{\mathrm{ob}} \cdot f_{\mathrm{ok}}}$$

sledi:

$$U = 20$$

12.12.3 Uvećanje objektiva je 30, a okulara mikroskopa 4. Koliko je njegovo uvećanje?

12.12.3.R Pošto je:

$$U = U_{\mathrm{ob}} \cdot U_{\mathrm{ok}}$$

uvećanje mikroskopa je:

$$U = 120$$

12.13 Interferencija i difrakcija svetlosti. Optička rešetka

12.13.1 Razlika pređenih puteva dva koherentna svetlosna talasa iznosi 1,2λ. Kolika je odgovarajuća fazna razlika?

12.13.1.R $\Delta\varphi = 2{,}4\pi$ rad

12.13.2 Superpozicijom dva koherentna svetlosna talasa na ekranu je dobijena interferenciona slika. Talasna dužina upotrebljene svetlosti je 550 nm, rastojanje između izvora je 30 μm, a normalno rastojanje od izvora do ekrana iznosi 2 m.

a. Koliko je rastojanje između dva susedna svetla mesta na ekranu?
b. Koliko je rastojanje između dva susedna tamna mesta?

12.13.2.R

a. Δx = 36,7 mm
b. Δx = 36,7 mm

12.13.3 Dva kohrentna svetlosna izvora svetlosti, talasne dužine 500nm na međusobnom rastojanju 0,1 mm daju na ekranu interferencionu sliku. Susedni maksimumi su udaljeni 1 cm. Odredi udaljenost ekrana od izvora svetlosti.

12.13.3.R L = 2 m

12.13.4 U Frenelovom ogledu rastojanje između imaginarnih likova izvora koherentne svetlosti iznosi d = 1 mm, dok je njihovo rastojanje do zaklona L = 2 m. Ako je rastojanje između susednih interferencionih pruga Δx = 1,2 mm, izračunati talasnu dužinu upotrebljene monohromatske svetlosti.

12.13.4.R λ = 600 nm

12.13.5 Dva koherentna svetlosna izvora talasne dužine 600 nm daju interferencionu sliku na ekrnu udaljenom 1 m od izvora. Nađi koliko je rastojanje između centralnog i petog maksimuma ako je rastojanje između izvora 20 μm.

12.13.5.R $x_5 = \dfrac{5\lambda L}{d} = 15\text{cm}$

12.13.6 Ako se rastojanje između koherentnih svetlosnih izvora poveća za 3mm rastojanje između centralnog i drugog interferencionog maksimuma sa smanji četiri puta. Koliko je rastojanje između izvora na početku i nakon promene?

12.13.6.R d = 1mm; $d+\Delta d$ = 4 mm

12.13.7 Ako je rastojanje između koherentnih izvora jednako, a takođe i rastojanje od ekrana, tada se sedmi interferencioni maksimum zelene boje formira na istom rastojanju na kome se formira peti maksimum crvene boje. Kolika je talasna dužina zelene boje ako je talasna dužina crvene boje 707 nm?

12.13.7.R Rezultat: $\lambda = 505\text{nm}$

12.13.8 Monohromatska svetlost pada na otvor širine 2 μm pod uglom 90°. Maksimumi drugog reda se javljaju po uglom od 30°. Kolika je talasna dužina upotrebljene svetlosti?

12.13.8.R $\lambda = \dfrac{2d\sin\alpha}{5} = 564\text{nm}$

12.13.9 Koliki je maksimalni red spektra natrijumove svetlosti (talasne dužine λ=589nm) koji se dobija pomoću difrakcione rešetke čija je konstanta d = 2 μm?

12.13.9.R

$$k_{max} = 3$$
$$N = 2k_{max} + 1 = 7$$

12.13.10 Difrakciona rešetka ima na svakom milimetru po 75 zareza. Ona se osvetli monohromatskom svetlošću talasne dužine 500 nm, pri čemu se na ekranu vide svetle pruge na jednakim rastojanjima jedne od drugih. Rastojanje između centralne i druge svetle pruge iznosi 11,25cm. Kolika je konstanta ove difrkcione rešetke? Na kojoj udaljenosti se nalazi ekran? Koristiti uslov da za male uglove važi $\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha$.

12.13.10.R d=1,7μm; L=1m

12.13.11 Optička rešetka je načinjena tako da na 2,5 cm dolazi 14000 zareza. Koliki je najviši red maksimuma osvetljenosti koji možemo postići ovom rešetkom ako je talasna dužina upotrebljene svetlosti 550nm?

12.13.12.R $k_{max} = 3$

12.13.12 Na difrakcionu rešetku koja ima 500 zareza na 1mm normalno pada svetlost. Odrediti dužinu spektra prvog reda na ekranu ako je rastojanje između rešetke i ekrana 4 m. Za granice vidljivog spektra uzeti λ_c=780nm i λ_{lj}= 400 nm.

12.13.12.R Δx = 76cm

12.13.13 Optička rešetka ima 6000 zareza na 1 cm i ugao skretanja svetlosti za spektar drugog reda iznosi 30°. Kolika je talasna dužina upotrebljene svetlosti?

12.13.13.R λ = 416,6 nm

13. Atomska i nuklearna fizika

13.1 Zakoni zračenja apsolutno crnog tela i hipoteza kvanta

13.1.1 Kolika se energija izrači za 1min kroz otvor peći površine 5cm^2 i temperature 1000K? Smatrati da se peć ponaša kao apsolutno crno telo.

14.1.1.R

$$E = \sigma \cdot T^4 \cdot S \cdot t = 1{,}71\text{kJ}$$

13.1.2 Naći temperaturu tela, ako maksimumu spektra njegovog zračenja odgovara talasna dužina 650 nm.

14.1.2.R Prema Vinovom zakonu:

$$T = \frac{b}{\lambda_{max}} = 4462\text{K}$$

13.1.3 Kada se temperatura apsolutno crnog tela udvostruči, talasna dužina koja odgovara maksimumu emisione moći promeni se za 500nm. Odrediti početnu i krajnju temperaturu apsolutno crnog tela. Da li se talasna dužina povećala ili smanjila?

14.1.1.R $T_1 = 2900\text{K}$; $T_2 = 5800\text{K}$; Talasna dužina se smanjila, jer su teperatura i talasna dužina obrnuto proporcionalne veličine.

13.1.4 Koliku energiju izrači apsolutno crno telo u obliku lopte prečnika 1cm za 1min ako mu je temperatura 5000 K.

14.1.1.R $E = \sigma T^4 r^2 \pi t = 1{,}68\text{MJ}$

13.1.5 Ako je talasna dužina koja odgovara maskimumu emisione moći 400nm, koliku enrgiju izrači apsoluno crno telo , koje je u obliku lopte poluprečnika 1 mm za 2 min. Kolika je temperatura ovog apsolutno crnog tela?

14.1.1.R E = 59 kJ; T = 7250 K

13.2 Fotoelektrični efekat

13.2.1 Crvena granica fotoefekta za natrijum iznosi 500nm. Koliki je izlazni rad elektrona?

14.2.1.R $A_i = \dfrac{hc}{\lambda_{max}} = 0{,}4 \cdot 10^{-18}\text{J} = 2{,}5\text{eV}$

13.2.2 Ako se površina cezijuma izloži svetlosti talasne dužine 400nm, maksimalna brzina fotoelektrona iznosi $6{,}5\cdot10^{5}$m/s. Kolika je crvena granica fotoefekta? Masa elektrona je m=$9{,}1\cdot10^{-31}$kg, Plankova konstanta iznosi h=$6{,}62\cdot10^{-34}$Js, i brzina svetlosti ima vrednost c=$3\cdot10^{8}$m/s.

14.2.2.R

$$h\frac{c}{\lambda}=h\frac{c}{\lambda_0}+\frac{mv^2}{2}$$

odnosno:

$$\lambda_0=\frac{hc}{h\frac{c}{\lambda}-\frac{mv^2}{2}}=650\text{nm}$$

13.2.3 Izlazni rad elektrona iz cezijuma iznosi 1,97 eV. Kolika je kinetička energija elektrona i brzina fotoelektrona ako se metal osvetli svetlošću talasne dužine 580nm?

14.2.3.R $E_k = 2{,}7\cdot10^{-20}$ J; $v = 2{,}4\cdot10^{5}$ m/s

13.2.4 Da li će nastati fotoefekat u barijum oksidu pod dejstvom zračenja frekvencije $3\cdot10^{14}$ Hz ako je izlazni rad za barijum oksid $4{,}6\cdot10^{-19}$J?

14.2.4.R Uslov za pojavu fotoefekta je $\nu>\nu_{\min}$, odnosno: $\nu>\frac{A_i}{h}$. Uslov je ispunjen.

13.3 Atomski spektri

13.3.1 Odrediti opseg talasnih dužina ($\Delta\lambda$) koje ne emituje atom vodonika između vidljivog i infracrvenog dela spektra.

14.3.1.R Elektronski prelazi u atomu vodonika u okviru Balmerove serije dovode do emisije fotona u vidljivom delu spektra. Maksimalna talasna dužina emitovanog fotona je određena minimalnom promenom energije elektrona, što odgovara elektronskom prelazu sa trećeg (n_2=3) na drugi (n_1=2) nivo. Iz opšte forniule za izračunavanje talasne dužine emitovanog fotona u okviru bilo koje serije

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right)$$

zamenom vrednosti za n_1 i n_2 se dobija

$$\frac{1}{\lambda_{max}^{vid}} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{5R}{36}$$

odakle sledi

$$\lambda_{max}^{vid} = \frac{36}{5R} = 656{,}3\text{nm}$$

Minimalna talasna dužina infracrvenog zračenja pripada Pašenovoj seriji prelaza ($n_1 = 3$) i to za $n_2 \to \infty$:

$$\frac{1}{\lambda_{min}^{ic}} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{\infty^2}\right) = \frac{R}{9}$$

što daje

$$\lambda_{min}^{ic} = \frac{9}{R} = 820{,}4\text{nm}$$

Traženi interval talasnih dužina ($\Delta\lambda$) je $656{,}4\text{nm} < \Delta\lambda < 820{,}4\text{nm}$

13.3.2 Koliko iznosi minimalna i maksimalna talasna dužina, frekvencija i energija emitovanih fotona u okviru Balmerove serije atoma vodonika.

14.3.2.R

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$n = 3$

$$\frac{1}{\lambda_{max}} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda_{max}} = R\frac{9-4}{36}$$

$$\frac{1}{\lambda_{max}} = R\frac{5}{36}$$

$$\lambda_{max} = \frac{36}{5R} = 656{,}3\text{nm}$$

$$\nu_{min} = \frac{c}{\lambda_{max}} = 4{,}57 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}$$

$$E_{min} = h\frac{c}{\lambda} = hcR\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = 1{,}89\text{eV}$$

$n \to \infty$

$$\frac{1}{\lambda_{min}} = R\left(\frac{1}{2^2} - 0\right)$$

$$\frac{1}{\lambda_{min}} = R\frac{1}{4}$$

$$\lambda_{min} = \frac{4}{R} = 364{,}6\,\text{nm}$$

$$\nu_{max} = \frac{c}{\lambda_{min}} = 8{,}23\cdot 10^{14}\,\text{Hz}$$

$$E_{min} = h\frac{c}{\lambda} = hcR\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = 1{,}89\,\text{eV}$$

13.3.3 Odrediti minimalnu i maksimalnu talasnu dužinu, frekvenciju i energiju emitovanih fotona koje emituju atomi vodonika u okviru Lajmanove serije prelaza.

14.3.3.R

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$n = 2$

$$\frac{1}{\lambda_{max}} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)$$

$$\lambda_{max} = \frac{3}{4R} = 121{,}5\,\text{nm}$$

$$\nu_{min} = \frac{c}{\lambda_{max}} = 4{,}57\cdot 10^{14}\,\text{Hz}$$

$$E_{min} = h\frac{c}{\lambda} = hcR\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = 1{,}89\,\text{eV}$$

$n \to \infty$

$$\frac{1}{\lambda_{min}} = R\left(\frac{1}{1^2} - 0\right)$$

$$\frac{1}{\lambda_{min}} = R$$

$$\lambda_{min} = \frac{1}{R} = 91{,}2\,\text{nm}$$

$$\nu_{max} = \frac{c}{\lambda_{min}} = 8{,}23\cdot 10^{14}\,\text{Hz}$$

$$E_{min} = h\frac{c}{\lambda} = hcR\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = 1{,}89\,\text{eV}$$

13.4 Borov model atoma

13.4.1 Pri prelazu elektrona sa višeg energetskog nivoa na niži u nekom atomu, dolazi do promene njegove energije za ΔE=2,6 eV. Izračunati talasnu dužinu i frekvenciju emitovanog fotona.

13.4.1.R Na osnovu drugog Borovog postulata energija eniitovanog fotona (E_f) je jednaka promeni energije elektrona (ΔE) kada on pređe sa višeg ua niži energetski nivo

$$E_f = \Delta E \tag{13.4. 1 }$$

a s druge strane, na osnovu Plankove teorije, energija fotona je

$$E_f = h\nu = h\frac{c}{\lambda} \tag{13.4. 2 }$$

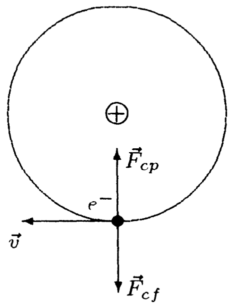
gde je ν - frekvencija, a λ - talasna dužina fotona. Iz (14.4.1) i (14.4.2) sledi

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = 477{,}4\text{nm}$$

i

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = 6{,}28 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}$$

13.4.2 Izračunati poluprečnik putanje, energiju i brzinu elektrona na prvoj orbiti atoma vodonika na osnovu Borovog modela atoma.



Slika 13.4. 1

13.4.2.R Na osnovu prvog Borovog postulata da moment količine kretanja elektrona može imati samo celo brojne umnoške od $\frac{h}{2\pi}$, tj.:

$$mv_n r_n = n\frac{h}{2\pi} \tag{14.4. 3 }$$

gde je v_n - brzina elektrona na *n*-toj orbiti i r_n - dozvoljeni poluprečnik putanje elektrona *n*-te orbite, kao i jednakosti centripetalne i centrifugalne sile koje deluju na elektron

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}=\frac{mv^2}{r} \tag{14.4. 4 }$$

za dozvoljeni poluprečnik putanje elektrona se dobija

$$r_n=\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}n^2 \tag{14.4. 5 }$$

Za $n = 1$ sledi

$$r_n=\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}1^2=52{,}9\mathrm{pm} \tag{14.4. 6 }$$

Elektron u atomu poseduje potencijalnu *Ep* (usled delovanja privlačne sile između elektrona i jezgra) i kinetičku energiju *Ek* (usled kretanja elektrona). Ukupna energija elektrona na *n*-toj putanji (*En*) je jednaka zbini potencijalne i kinetičke energije

$$E_n=E_p+E_k \tag{14.4. 7 }$$

Potencijalna energija je negativna i jednaka je

$$E_p=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} \tag{14.4. 8 }$$

a kinetička energija

$$E_k=\frac{mv^2}{2}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} \tag{14.4. 9 }$$

gde je uzeta u obzir jednakost $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}=\frac{mv^2}{r}$. Sabiranjem izraza za potencijalmi i kinetičku energiju $E_p=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$ i $E_k=\frac{mv^2}{2}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$ i uzimajući u obzir $r_n=\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}n^2$, za ukupnu energiju se dobija

$$E_n=-\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2} \tag{14.4. 10 }$$

Za $n = 1$ dobija se energija elektrona na prvoj putanji

$$E_1=-\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{1^2}=-2{,}174\cdot 10^{-18}\mathrm{J}=-13{,}59\mathrm{eV}$$

gde je uzeto u obzir da je $1\mathrm{J}=6{,}25\cdot 10^{18}\mathrm{eV}$.

Za brzinu elektrona na n-toj orbiti, pomoću $mv_n r_n = n\dfrac{h}{2\pi}$ i $r_n = \dfrac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2$ se dobija

$$v_n = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h}\frac{1}{n} \qquad (14.4.\ 11\ )$$

Za $n = 1$ je

$$v_1 = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h}\frac{1}{1} = 2{,}18\cdot 10^6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

13.4.3 Izračunati poluprečnik putanje, energiju i brzinu elektrona na šestoj Borovoj orbiti atoma vodonika, ako su poznate vrednosti ovih veličina na prvoj orbiti:

13.4.3.R Na osnovu formule $r_n = \dfrac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2$ za poluprečnik putanje elektrona na n-toj orbiti se može pisati

$$r_n = r_1 n^2$$

te za $n = 6$ sledi $r_6 = r_1 6^2 = 1{,}904\,\mathrm{nm}$. Slično, za energiju i brzinu se dobija

$$E_n = \frac{E_1}{n^2}$$

$$E_6 = \frac{E_1}{36} = -0{,}38\,\mathrm{eV}$$

$$v_n = \frac{v_1}{n}$$

$$v_6 = \frac{v_1}{6} = 3{,}63\cdot 10^5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

13.4.4 Koliko iznosi period i frekvencija obilaska elektrona u atomu vodonika na prvoj Borovoj orbiti, ako je poznat poluprečnik pulanje $r_1 = 52{,}9\,\mathrm{pm}$.

13.4.4.R

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1}$$

$$m v_1 r_1 = \frac{h}{2\pi}$$

$$T_1 = \frac{4\pi^2 m r_1^2}{h} = 1{,}519\cdot 10^{-16}\,\mathrm{s}\ ;\ \nu_1 = \frac{1}{T_1} = 6{,}585\cdot 10^{15}\,\mathrm{Hz}$$

13.5 De Broljeva relacija

13.5.1 Kolika je debroljevska talasna dužina elektrona koji se kreće brzinom 10^6m/s? Masa elektrona je m=9,1·10^{-31}kg, Plankova konstanta iznosi h=6,62·10^{-34}Js.

13.5.1.R Iz de Broljeve relacije:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = 7{,}3 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$$

Ovde treba imati u vidu da je ova brzina elektrona mnogo manja od brzine svetlosti pa se može primeniti navedena formula. U slučaju brzina uporedivih sa brzinom svetlosti se ne može primeniti formula u navedenom obliku, moraju se uzeti u obzir takozvani relativistički efekti, ali to izlazi izvan okvira ovog uxbenika.

13.5.2 Nađi debroljevsku talasnu dužinu elektrona čija je kinetička energija 10 keV. Ne uzimati u obzir relativističke efekte.

13.5.2.R Prema relaciji $E_k = \frac{mv^2}{2}$, uz pretvaranje energije iz eV u J:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = 12\,\mathrm{pm}$$

13.5.3 Koliki impuls elektrona odgovara debroljevskoj talasnoj dužini 700nm? Kolika je brzina ovog elektrona? Masa elektrona iznosi m= 9,1·10^{-31} kg.

13.5.3.R p = 0,9·10^{-24} kgm/s; v = 10^5 m/s

13.5.4 Kolika je debroljevska talasna dužina elektrona koji ima kinetičku energiju 5·10^{-19}J?

13.5.4.R λ=0,7nm

13.5.5 Kojom brzinom treba da se kreće elektron da bi njegova kinetička energija bila jednaka energiji fotona talasne dužine 520 nm? Koliki je impuls ovog elektrona?

13.5.5.R v = 9,2·10^5 m/s; p = 8,4·10^{-25} kgm/s

13.5.6 Talasna dužina elektrona koji se koriste u elektronskom mikroskopu iznosi 50 pm. Odrediti kolikim naponom su ubrzani elektroni ako je njihova masa m=9,1·10^{-31} kg, a naelektrisanje 0,16aC.

13.5.6.R Iz $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$, dobijamo $U = \frac{h^2}{2me\lambda^2} = 602\mathrm{V}$

13.6 Rentgenski zraci

13.6.1 Izračunati talasne dužine karakterističnog *x* zračenja K_α, K_β, K_γ, ... K_∞ linija za bakar. Redni broj atoma bakra u periodnom sistemu elemenata je Z = 29. Koliko iznosi energija veze *K* elektrona? Konstanta ekraniranja iznosi $a \approx 1$.

13.6.1.R Talasne dužine karakterističnog *x* zračenja izračunavaju se prema Mozlijevom zakonu:

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z-a)^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right) \qquad (13.6.\ 1\ )$$

gde je Z - redni broj elementa periodnog sistema od kog je sačinjena anoda, a - konstanta koja određuje uticaj elektronskog omotača na elektronski prelaz i približno je jednaka jedinici za K seriju, n - broj elektronske ljuske na koju se vrši elektronski prelaz i m - broj elektronske ljuske sa koje elektron vrši prelaz na nižu ljusku. Za K seriju je n = 1, a m = 2,3,4, ...∞, što redom daje karakteristične linije K_α, K_β, K_γ, ... K_∞. Na osnovu toga, za K_α liniju se može pisati:

$$\frac{1}{\lambda_{K_\alpha}} = R(Z-1)^2\left(1-\frac{1}{2^2}\right) = R(29-1)^2\,\frac{3}{4} = \frac{2352R}{4}$$

što daje

$$\lambda_{K_\alpha} = \frac{4}{2352R} = 0{,}155\,\text{nm}$$

Za K_β liniju je:

$$\frac{1}{\lambda_{K_\beta}} = R(Z-1)^2\left(1-\frac{1}{3^2}\right) = R(29-1)^2\,\frac{8}{9} = \frac{6272R}{9}$$

a talasna dužina iznosi

$$\lambda_{K_\beta} = \frac{9}{6272R} = 0{,}131\,\text{nm}$$

Slično za K_γ liniju, uzimajući da je m= 4, se dobija $\lambda_{K_\gamma} = 0{,}124\,\text{nm}$.

Minimalna talasna dužina K serije dobija se za elektronski prelaz sa $m \to \infty$ na n = 1:

$$\frac{1}{\lambda_{K_\infty}} = R(Z-1)^2\left(1-\frac{1}{\infty^2}\right) = R28^2$$

$$\lambda_{K_\infty} = \frac{1}{28^2 R} = 0{,}116\,\text{nm}$$

Energija veze K elektrona je upravo jednaka energiji fotona koji se emituje prilikom elektronskog prelaza sa $m \to \infty$ na n = 1, te se može pisati

$$E_V^K = \frac{hc}{\lambda_{K_\infty}} \tag{13.6. 2 }$$

zamenom brojnih vrednosti se dobija

$E_V^K = 10{,}7\,\text{keV}$

13.6.2 Izračunati talasne dužine karakterističnog *x* zračenja L_α, L_β i L_∞ linija za vanadijum (Z = 23). Konstanta ekraniranja iznosi $a = 7{,}5$.

13.6.2.R Konstanta *a* iz Mozlijevog zakona za L seriju karakterističnog *x* zračenja ima vrednost 7,5. Elektronski prelazi u okviru L serije se više sa energetskih ljuski za koje je m = 3,4, 5, ...∞, na drugu energetsku ljusku (n = 2). Uzimajući u obzir pomenutu formulu, kao i vrednosti za a = 7,5, m = 3 i n = 2, za L_α liniju se može pisati:

$$\frac{1}{\lambda_{L_\alpha}} = R(Z-7{,}5)^2\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right) = 15{,}5^2\,\frac{5}{36}R$$

što za talasnu dužinu λ_{L_α} daje

$\lambda_{L_\alpha} = 2{,}73\,\text{nm}$

Za m = 4 dobija se talasna dužina λ_{L_β} linije $\lambda_{L_\beta} = 2{,}02\,\text{nm}$, a za $m \to \infty$ dobija se minimalna talasna dužina L serije vanadijuma $\lambda_{L_\infty} = 1{,}52\,\text{nm}$.

13.6.3 Koliko puta je veća talasna dužina *x* zračenja K_α linije gvožđa (Z_1= 26) od K_α linije molibdena (Z_2 = 42)?

13.6.3.R

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{3}{4}R(Z_1-1)^2$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = \frac{3}{4}R(Z_2-1)^2$$

$$\frac{\frac{1}{\lambda_2}}{\frac{1}{\lambda_1}} = \frac{\frac{3}{4}R(Z_2-1)^2}{\frac{3}{4}R(Z_1-1)^2}$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \left(\frac{Z_2-1}{Z_1-1}\right) = 2{,}69$$

13.6.4 Koliko puta je manja minimalna talasna dužina K serije od minimalne talasne dužine L serije karakterističnog *x* zračenja atoma bakra (Z = 29)?

13.6.4.R 1,7 puta

13.7 Karakteristike atomskog jezgra. Defekt mase i energija veze

13.7.1 Izračunati energiju veze po nukleonu u jezgru atoma ugljenika ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$, ako je masa atoma ugljenika $m_{{}^{12}_{6}\mathrm{C}} = 12{,}00380u$.

13.7.1 Energija veze jezgra se računa na osnovu Ajnštajnove formule o ekvivalentnosti mase i energije:

$$E_V = \Delta m c^2 \qquad (13.7.\ 1\ )$$

gde je Δm - defekt mase jezgra, koji se izračunava oduzimanjem mase jezgra od zbira pojedinačnih masa protona i neutrona koji izgrađuju jezgro:

$$\Delta m = Zm_p + (A-Z)m_n - m_j \qquad (13.7.\ 2\ )$$

gde je Z - redni broj elementa u periodnom sistemu (jednak broju protona), A - maseni broj (broj nukleona) i m_j - masa jezgra. S obzirom da se masa jezgra može izraziti i preko mase atoma (m_a) oduzimanjem Z masa elektrona

$$m_j = m_a - Zm_e \qquad (13.7.\ 3\ )$$

formula (14.7.2) se može napisati i u obliku:

$$\Delta m = Zm_{{}^{1}_{1}\mathrm{H}} + (A-Z)m_n - m_j \qquad (13.7.\ 4\ )$$

gde je uzeto u obzir da je $Zm_{{}^{1}_{1}\mathrm{H}} = m_j + Zm_e$. Zamenom brojnih vrednosti u (13.7.4) dobija se

$$\Delta m = 6\cdot 1{,}00814u + (12-6)1{,}00899u - 12{,}00380u = 0{,}09898u$$

Uzimajući u obzir da je $u = 1{,}66\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ za defekt mase se dobija:

$$\Delta m = 0{,}09898\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 1{,}64\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

Energija veze jezgra na osnovu (14.7.1.1) iznosi

$$E_V = \Delta m c^2 = 1{,}64\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}\cdot 9\cdot 10^{16}\,\frac{\mathrm{m}^2}{s^2} = 1{,}476\cdot 10^{-11}\,\mathrm{J} = 92{,}25\,\mathrm{MeV}$$

ili po nukleonu

$$E_0 = \frac{E_v}{A} = \frac{92{,}25\,\mathrm{MeV}}{12} = 7{,}69\,\mathrm{MeV}$$

13.7.2 Naći energiju veze za atome dva izotopa, ${}^{13}_{7}\mathrm{N}$ i ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$. Koji je od njih stabilniji? $m_{{}^{13}_{7}\mathrm{N}} = 13{,}00987u$ i $m_{{}^{13}_{7}\mathrm{N}} = 14{,}00752u$

13.7.2.R

$E_v\left({}^{13}_{7}N\right)=94{,}39\,\mathrm{MeV}$ $E_v\left({}^{14}_{7}N\right)=104{,}96\,\mathrm{MeV}$

Pošto je $E_v\left({}^{14}_{7}N\right)>E_v\left({}^{13}_{7}N\right)$, to je ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$ stabilniji od ${}^{13}_{7}\mathrm{N}$.

13.8 Zakon radioaktivnog raspada

13.8.1 Vreme poluraspada izotopa kalijuma 40 iznosi $1{,}27\cdot10^{9}$ god. Kolika je konstanta raspada?

13.8.1.R Koristeći vezu između radioaktivne konstante i vremena paluraspada čiji je oblik:

$$\lambda=\frac{0{,}693}{T}$$

13.8.2 Početni broj jezgara radioaktivnog radijuma je $3{,}2\cdot10^{30}$. Koliki će broj neraspadnutih jezgara biti posle 4860 godina ako je njegovo vreme poluraspada 1620 godina?

13.8.2.R Iz zakona radioaktivnog raslada čiji je oblik:

$$N=N_0 2^{-\frac{t}{T}}$$

nalazimo da je:

$$N=4\cdot10^{29}$$

13.8.3 Posle koliko vremena će broj neraspadnutih čestica radioaktivnog preparata čije je vreme poluraspada $2{,}48\cdot10^{5}$ godina, opasti na jednu osminu od početnog?

13.8.3.R Polazeći od zakona radioaktivnog raspada u obliku:

$$N=N_0 2^{-\frac{t}{T}}$$

i unoseći uslov zadatka:

$$N=\frac{1}{8}N_0$$

dobijamo:

$$\frac{1}{8}N_0=N_0 2^{-\frac{t}{T}}$$

odnosno:

$$2^{-3}=2^{-\frac{t}{T}}$$

Odavde je:

$$\frac{t}{T}=3$$

i

$$t = 3T = 7{,}44 \cdot 10^5 \,\text{god}$$

13.8.4 Broj raspadnutih radioaktivnih čestica posle 4 godine iznosi $3\cdot10^{18}$, dok je početni broj iznosio $8\cdot10^{18}$. Koliko je vreme poluraspada datog radioaktivnog preperata?

13.8.4.R Broj raspadnutih radioaktivnih čestica posle vremena t iznosi:
Broj raspadnutih jezgara je

$$N' = N_0 - N$$

a broj neraspadnutih jezgara iznosi

$$N = N_0 - N' = 5\cdot10^{18}$$

Odavde je:

$$N = N_0 2^{-\frac{t}{T}}$$

odnosno

$$\frac{N}{N_0} = 2^{-\frac{t}{T}}$$

Logaritmovanjem ovog izraza dobijamo:

$$\log\frac{N}{N_0} = -\frac{t}{T}\log 2$$

odnosno:

$$T = -\frac{t\log 2}{\log\dfrac{N}{N_0}} = 5{,}9\,\text{god}$$

13.8.5 Izračunati procenat neraspadnutih radioaktivnih jezgara za vreme koje je 1,5 puta veće od vremena poluraspada.

13.8.5.R

$$N = N_0 2^{-\frac{t}{T}}$$

$$N_0 - N = N_0\left(1 - 2^{-\frac{t}{T}}\right)$$

procenat raspadnutih $\dfrac{N_0 - N}{N_0} = 1 - 2^{-\frac{t}{T}} = 1 - 2^{-\frac{1{,}5T}{T}} = 0{,}353 = 35{,}3\%$

procenat neraspadnitih $1-\frac{N_0-N}{N_0}=2^{-\frac{t}{T}}=2^{-\frac{1,5T}{T}}=0{,}647=64{,}7\%$

13.9 Nuklearne reakcije

13.9.1 U nuklearnim reakcijama:

$${}_4\mathrm{Be}^9+{}_1\mathrm{D}^2\rightarrow \mathrm{X}+{}_0\mathrm{n}^1$$

$${}_3\mathrm{Li}^7+{}_1\mathrm{p}^1\rightarrow \mathrm{X}+{}_0\mathrm{n}^1$$

$${}_5\mathrm{B}^{10}+{}_1\mathrm{D}^2\rightarrow \mathrm{X}+{}_0\mathrm{n}^1$$

$${}_{22}\mathrm{BTi}^{47}+{}_1\mathrm{p}^2\rightarrow \mathrm{X}+{}_0\mathrm{n}^1$$

oslobađaju se jezgra produkti i po jedan neutron. Napisati šeme ovih reakcija.

13.9.1.R

$${}_4\mathrm{Be}^9+{}_1\mathrm{D}^2\rightarrow{}_5\mathrm{B}^{10}+{}_0\mathrm{n}^1$$

$${}_3\mathrm{Li}^7+{}_1\mathrm{p}^1\rightarrow{}_4\mathrm{Be}^7+{}_0\mathrm{n}^1$$

$${}_5\mathrm{B}^{10}+{}_1\mathrm{D}^2\rightarrow{}_6\mathrm{C}^{11}+{}_0\mathrm{n}^1$$

$${}_{22}\mathrm{Ti}^{47}+{}_1\mathrm{p}^2\rightarrow{}_{23}\mathrm{V}^{48}+{}_0\mathrm{n}^1$$

13.9.2 Izjednačiti nuklearne reakcije izazvane neutronima sa jezgrima srebra ${}_{47}\mathrm{Ag}^{107}$, vodonika ${}_1\mathrm{H}^1$ i torijuma ${}_{90}\mathrm{Th}^{232}$ kad se zna da je produkt reakcije jezgro i γ-kvant.

13.9.2.R

$${}_{47}\mathrm{Ag}^{107}+{}_1\mathrm{n}^1\rightarrow{}_{47}\mathrm{V}^{108}+{}_0\gamma^0$$

$${}_1\mathrm{H}^2+{}_0\mathrm{n}^1\rightarrow{}_1\mathrm{H}^3+{}_0\gamma^0$$

$${}_{90}\mathrm{Th}^{232}+{}_0\mathrm{n}^1\rightarrow{}_{90}\mathrm{Th}^{233}+{}_0\gamma^0$$

13.9.3 Šta su nepoznate čestice mete ako se zna da su produkti reakcije:

$$\mathrm{X}+\mathrm{p}\rightarrow{}_{11}\mathrm{Na}^{22}+\alpha$$

$$Y+\gamma\rightarrow 2\alpha\,?$$

Napisati potpune šeme reakcije.

13.9.3.R

Iz zakona održanja količine naelektrisanja sledi da su redni brojevi nepoznatih čestica mete:

$$Z_1=11+2-1=12$$

$$Z_2=2\cdot 2=4$$

Iz periodnog sistema nalazimo da je reč o izotopima magnezijuma i berilijuma. Nuklearne rekacije izgledaju ovako:

$${}_{12}\mathrm{Mg}^{25} +_1 \mathrm{p}^1 \rightarrow_{11} \mathrm{Na}^{22} +_2 \alpha^2$$

$${}_4\mathrm{Be}^8 +_0 \gamma^0 \rightarrow 2_2\alpha^2$$

13.9.4 Naći nepoznate produkte reakcije:

a) ${}_4\mathrm{Be}^9 +_1 \mathrm{p}^1 \rightarrow \mathrm{X} +_2 \alpha^2$;

b) ${}_3\mathrm{Li}^7 +_2 \alpha^4 \rightarrow \mathrm{Y} +_0 \mathrm{n}^1$;

c) ${}_{13}\mathrm{Al}^{27} + \gamma \rightarrow \mathrm{Z} +_1 p^1$,

i napisati potpune šeme reakcija.

13.9.4.R Slično kao u prethodnom zadatku, iz zakona održanja koli čine naelektrisanja nalazimo da produkti reakcije imaju sledeće redne i masene brojeve: Izjednačene nuklearne reakcije izgledaju ovako:

a) ${}_4\mathrm{Be}^9 +_1 \mathrm{p}^1 \rightarrow_{19} \mathrm{X}^{41} +_2 \alpha^2$;

b) ${}_3\mathrm{Li}^7 +_2 \alpha^4 \rightarrow_5 \mathrm{Y}^{10} +_0 \mathrm{n}^1$;

c) ${}_{13}\mathrm{Al}^{27} + \gamma \rightarrow_{12} \mathrm{Z}^{26} +_1 p^1$.

13.9.5 Za nuklearnu reakciju:

$${}_3\mathrm{Li}^6 +_1 \mathrm{H}^2 \rightarrow_3 \mathrm{Li}^7 +_1 \mathrm{H}^1$$

odrediti da li je ona egzotermna ili endotermna. Koliko iznosi energija reakcije?

$m\left({}_3\mathrm{Li}^6\right) = 6{,}01703u$

$m\left({}_1\mathrm{H}^2\right) = 2{,}01355u$;

$m\left({}_3\mathrm{Li}^7\right) = 7{,}01823u$

$m\left({}_1\mathrm{H}^1\right) = 1{,}007825u$

13.9.5.R Energija reakcije se izračunava po formuli

$Q = \Delta m c^2$,

gde je Δm - razlika masa čestica koje u reakciju ulaze i iz nje izlaze:

$$\Delta m = m\left({}_1\mathrm{H}^2\right) + m\left({}_3\mathrm{Li}^6\right) - \left(m\left({}_1\mathrm{H}^1\right) + m\left({}_3\mathrm{Li}^7\right)\right)$$

gde je $m\left({}_1\mathrm{H}^2\right)$ - masa jezgra projektila, $m\left({}_3\mathrm{Li}^6\right)$ - masa jezgra mete, $m\left({}_1\mathrm{H}^1\right)$ i $m\left({}_3\mathrm{Li}^7\right)$ - mase jezgara produkata reakcije. Na osnovu prethodnih relacija se dobija

$$Q = [m\left({}_1\mathrm{H}^2\right) + m\left({}_3\mathrm{Li}^6\right) - \left(m\left({}_1\mathrm{H}^1\right) + m\left({}_3\mathrm{Li}^7\right)\right)]\, c^2 = 0{,}080676\mathrm{J} = 5{,}04\mathrm{MeV}$$

Pošto je $Q > 0$, tj. energija se oslobađa, reakcija je egzotermna.

13.9.6 Kakav je energetski bilans za reakciju:

${}_7N^{14} +_2 He^4 \rightarrow_8 O^{17} +_1 p^1$.

$m({}_1H^1) = 1{,}007825u$; $m({}_2He^4) = 4{,}002604u$; $m({}_7N^{14}) = 14{,}003074u$;

$m({}_8O^{17}) = 16{,}99913u$;

13.9.6.R $Q = -1{,}19\,\mathrm{MeV}$ (endotermna reakcija).

13.10 Fisija i fuzija

13.10.1 Ako se prilikom fisije ${}_{92}U^{235}$ izazvane, termalnim neutronom, dobijaju produkti $m_1 = 94{,}945u$ i $m_2 = 138{,}955u$ uz još dva oslobođena neutrona, naći energetski bilans fisije. ($m({}_{92}U^{235}) = 235{,}11750u$, $m_n = 1{,}00899u$)

13.10.1.R $Q = \Delta mc^2 = [m({}_{92}U^{235}) + m_n - m_1 - m_2 - 2m_n]\, c^2 = 194{,}1\,\mathrm{MeV}$.

13.10.2 Izračunati energiju oslobođenu prilikom sledeće fuzione reakcije:

${}_1H^2 +_1 H^2 \rightarrow_2 He^3 +_0 n^1$

$m({}_1H^2) = 2{,}01355u$;

$m({}_2He^3) = 3{,}014933u$;

$m_n = 1{,}008665u$;

13.10.2.R Energija Q koja se oslobađa u nuklearnoj reakciji jednaka je razlici energija mirovanja čestica koje stupaju u reakciju i čestica koje se u reakciji dobijaju. Dakle, energija reakcije je:

$$Q = \Delta mc^2 = [2m({}_1H^2) - m({}_2He^3) - m_n]\, c^2$$

$$Q = 3{,}26\,\mathrm{MeV}.$$

13.10.3 Naći energiju u kWh koja se oslobodi pri fisiji 1g ${}_{92}U^{235}$ i tu eneigiju uporediti sa toplotom sagorevanja iste količine mazuta koja iznosi $Q_s = 39\,\mathrm{kJ}$. Za oslobođenu energiju fisije po jednom jezgru ${}_{92}U^{235}$ uzeti $200\,\mathrm{MeV}$.

13.10.3.R

$$Q_{fis} = nN_A E_0 = \frac{m}{M} N_A E_0 = 7{,}79 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J} = 21{,}6\,\mathrm{MWh}\,; \quad \frac{Q_{fis}}{Q_s} \approx 2 \cdot 10^6$$

Znači, pri fisiji 1g ${}_{92}U^{235}$ oslobodi se energije kao pri sagorevanju 2000 t mazuta.

Literatura

1. Sajfert V., Fizika, TF »M.Pupin«, Zrenjanin, 1999
2. V. Jovović, Zbirka rešenih zadataka Fizika I, TF »M. Pupin« Zrenjanin, 1996
3. S. Lukić, M. Avramov, V. Jovović, Zbirka zadataka iz fizike, elektricitet i magnetizam, optika, atomska i nuklearna fizika, TF »M. Pupin« Zrenjanin, 1996
4. D. I. Saharov, Zbirka zadataka iz fizike, Naučna knjiga, Beograd, 1987
5. J. Janjić, Ž. Popović, B. Radivojević, Zbirka zadataka iz fizike, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1998
6. G. Dimić, M. Mitrinović, Zbirka zadataka iz fizike D, Građevinska knjiga, Beograd, 1987
7. B.Stanić, M. Marković, Testovi za prijemne ispite na tehničkim fakultetima, Nauka, 1994
8. N. Čaluković, B. Nikić, Zadaci i testovi iz fizike, Klub NT, Beograd, 1995
9. M. Pejović, S. Golubović, D. Župac, Zbirka rezenih zadataka iz fizike, Prosveta, Niš, 1989
10. P. Kulišić, M. Eterović, Zadaci iz fizike, Školska knjiga, Zagreb, 1987
11. B. Mikuličić, E. Vernić, M. Variček, Zbirka zadataka iz fizike, Školska knjiga, Zagreb, 1987
12. G. Dimić, M. Mirjanić, S. Žegarac, Priručnik iz fizike za takmičenje srednjoškolaca i prijemne ispite na fakultetima, Naučna knjiga, Beograd, 1968
13. V. Georgijević, Lj. Janković, G. Todorović, Zbirka testova iz fizike, Barex, Beograd, 1991
14. M. Raspopović, B. Nikić, N. Čaluković, Zbirka zadataka iz fizike, Naučna knjiga, Beograd, 1988
15. N. Čaluković, Fizika 1, Zbirka rešenih zadataka za I razred gimnazija i tehničkih škola, Krug, Beograd, 1996
16. N. Čaluković N. Kadelburg, Fizika 2, Zbirka rešenih zadataka za II razred gimnazija i tehničkih škola, Krug, Beograd, 1996
17. N. Kadelburg, K. Panić, Fizika 3, Zbirka rešenih zadataka za III razred gimnazija i tehničkih škola, Krug, Beograd, 1996
18. N. Čaluković, Fizika 4, Zbirka rešenih zadataka za IV razred gimnazija i tehničkih škola, Krug, Beograd, 1996
19. K. Nikolić, P. Marinković, J. Cvetić, Fizika, zbirka rešenih zadataka I i II deo, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1998
20. O. Žižić, Fizika, zbirka rešenih zadataka, Mašinski fakultet, Beograd, 1995

Sadržaj