

Др Вјекослав Сајферт

ФИЗИКА ФЛУИДА



за студенте смера **Индустријско инжењерство у експлоатацији нафте и гаса**

Универзитет у Новом Саду
Технички факултет "Михајло Пупин"
Зрењанин, 2014

Др Вјекослав Сајферт
Физика флуида за студенте смера Индустриско инжењерство у
експлоатацији нафте и гаса

Аутор:

Др Вјекослав Сајферт, редовни професор ТФ "Михајло Пупин" у
Зрењанину

Рецензенти:

Др Маша Букуров, ванредни професор ФТН у Новом Саду

Др Јован П. Шетрајчић, редовни професор ПМФ у Новом Саду

Издавач:

Технички факултет "Михајло Пупин", Зрењанин

За издавача:

Проф. др Милан Павловић, декан ТФ "Михајло Пупин" у
Зрењанину

Обрада текста на рачунару:

Др Вјекослав Сајферт, редовни професор ТФ "Михајло Пупин" у
Зрењанину

Дизајн корица:

Станислава Синђелић

Коректура:

Мсц Бранимир Сајферт, дипломирани инжењер

Штампа: "Дигинет", Зрењанин

Тираж: 200 примерака

ISBN 978-86-7672-244-0

Одлуком Наставно научног већа Техничког факултета "Михајло Пупин" од 24.09.2014. године, овај уџбеник је одобрен за штампање и коришћење у настави.

ЦИП – Каталогизација у публикацији

Библиотека Матице српске, Нови Сад

532/533(075.8)

САЈФЕРТ, Вјекослав

Физика флуида : за студенте смера Индустриско инжењерство у
експлоатацији нафте и гаса / Вјекослав Сајферт. - Зрењанин: Технички
факултет "Михајло Пупин", 2014 (Зрењанин: Дигинет) – 149 стр.:

Илустр. ; 25 cm (Библиотека Уџбеници / Технички факултет "Михајло Пупин",
Зрењанин ; 197

Тираж 200. – Библиографија.

ISBN 978-86-7672-244-0

а) Физика флуида

COBISS.SR-ID 290901511

Предговор

Уџбеник **Физика флуида** је намењен студентима смера Индустијско инжењерство у експлоатацији нафте и гаса на Техничком факултету "Михајло Пупин" у Зрењанину.

Захвалан сам рецензентима проф. др Маши Букуров и проф. др Јовану Шетрајчићу на савесном прегледу рукописа и корисним саветима и сугестијама за побољшање текста овог уџбеника.

Захвалан сам унапред свима који ми укажу на пропусте или на могућност да ова **Збирка** буде још квалитетнија и кориснија студентима.

Аутор



Рипаљка, Сокобања

At the time Pascal began a series of experiments on atmospheric pressure. By 1647 he had proved, to his satisfaction, that vacuum existed. Descartes visited Pascal on 23 September. His visit only lasted two days and the two argued about the vacuum, which Descartes did not believe in. After the visit, Descartes wrote, rather cruelly, in a letter to Huygens that Pascal “*has too much vacuum in his head*”.

Отприлике у то време Паскал је почео серију експеримената на атмосферском притиску. До 1647. доказао је, на његово задовољство, да вакуум постоји. Декарт је посетио Паскала 23 септембра. Његова посета је трајала два дана и они су се расправљали око вакуума, у шта Декарт није веровао. Декарт је написао, прилично свирепо, у писму Хајгенсу после те посете да Паскал ... *има превише вакуума у његовој глави*.

Садржај

Предговор	3
Паскал, Декарт и Хајгенс	4
1. Особине флуида	5
1.1 Молекулске силе	5
1.2 Густина флуида	5
1.3 Тежина и специфична тежина	5
1.4 Еластичне деформације и компресибилност флуида	5
1.5 Притисак у флуиду	5
1.6 Преношење притиска кроз течност. Паскалов закон	5
1.7 Хидраулична преса	5
2. Статика флуида	21
2.1 Хидростатички притисак	21
2.2 Хидростатички парадокс	21
2.3 Потисак и Архимедов закон	21
2.4 Аеростатички притисак и потисак у гасовима	21
2.5 Површински напон	21
2.6 Појаве на граници чврстих и течних тела. Капиларне појаве	21
3. Кинематика флуида	47
3.1 Карактеристике струјања флуида	47
3.2 Проток флуида	47
3.3 Закон континуитета	47
3.4 Ламинарно струјање идеалног флуида	47
4. Динамика флуида	57
4.1 Бернулијева једначина	57
4.2 Примена Бернулијеве једначине	57
4.3 Торичелијева теорема	57

4.4	Вентуријева цев	57
4.5	Питоова цев.....	57
5.	Вискозност	71
5.1	Увод	71
5.2	Њутнов закон	71
5.3	Кретање тела кроз флуид. Стоксов закон.....	71
5.4	Поазејев закон	71
5.5	Турбулентно кретање и Рејнолдсов број.....	71
6.	Основе молекулско кинетичке теорија гасова и термодинамике.....	88
6.1	Молекулско кинетичка теорија. Брзина молекула	88
6.2	Модел идеалног гаса и основна релација МКТ	88
6.3	Једначина гасног стања	88
6.4	Бојл Мариотов закон	88
6.5	Геј Лисаков закон	88
6.6	Шарлов закон	88
6.7	Средња дужина слободног пута молекула	88
6.8	Добијање ниских притисака	88
6.9	Методe добијања ниских притисака	88
6.10	Дифузија	88
6.11	Реални гасови и течности.....	88
6.12	Експерименталне изотерме и критично стање супстанције	88
7.	Термофизика	118
7.1	Увод	118
7.2	Температура. Топлота. Унутрашња енергија.....	118
7.3	Мерење температуре. Термометри	118
7.4	Први закон термодинамике	118
7.5	Рад код гасних изопроцеса	118

7.6	Топлотни капацитет	118
7.7	Адијабатски процес. Рад при адијабатском процесу	118
7.8	Повратни и неповратни процеси	118
7.9	Други принцип термодинамике	118
7.10	Топлотни мотори	118
7.11	Карноов циклус	118
7.12	Преношење топлоте	118
7.13	Провођење топлоте	118
7.14	Конвекција	118
7.15	Зрачење.....	118
7.16	Кондензовање гасова и добијање ниских температура	118
7.17	Промене агрегатних стања. Топљење и очвршћавање	118
7.18	Испаравање и кондензовање. Кључање	118
7.19	Дијаграми промене агрегатних стања	118
8.	Литература	141

Најчешће коришћене ознаке

$$a \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] / \text{убрзање}$$

$$A \text{ [J]} / \text{рад}$$

$$k_B \left[\frac{\text{J}}{\text{K}} \right] / \text{Болцманова константа}$$

$$v \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] / \text{брзина}$$

$$v_{nv} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] / \text{највероватнија брзина молекула}$$

$$\bar{v} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] / \text{средња квадратна брзина молекула}$$

$$v_s \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] / \text{средња брзина молекула}$$

$$g \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] / \text{гравитационо убрзање}$$

$$d \text{ [m]} / \text{пречник}$$

$$E \text{ [J]} / \text{енергија}$$

$$l \text{ [m]} / \text{дужина}$$

$$m \text{ [kg]} / \text{маса}$$

$$m_0 \text{ [kg]} / \text{маса једног молекула}$$

$$M \left[\frac{\text{kg}}{\text{mol}} \right] / \text{моларна маса}$$

$$E_V \text{ [Pa]} / \text{модул еластичности}$$

$$\vec{M} \text{ [Nm]} / \text{момент силе}$$

$$\kappa \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa} / \text{модул стишљивости}$$

$$N - \text{број молекула}$$

$$n \text{ [mol]} / \text{количина супстанце}$$

$$n_0, n'_0 / \text{концентрација}$$

$$V \text{ [m}^3\text{]} / \text{запремина}$$

$$p, p_0, p' \text{ [Pa]} - \text{притисак}$$

$$p_{at} \text{ [Pa]} / \text{атмосферски притисак}$$

$q_V \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$ - запремински проток

$q_m \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right]$ - масени проток

$r \text{ [m]}$ / полупречник

$Q \text{ [N]}$ - сила Земљине теже

$Q \text{ [J]}$ / топлота

$R \left[\frac{\text{J}}{\text{molK}} \right]$ / универзална гасна константа

R_e - Рејнолдсов број

$s \left[\frac{1}{\text{Pa}} = \text{Pa}^{-1} = \frac{\text{m}^2}{\text{N}} \right]$ / компресибилност

$S \text{ [m}^2\text{]}$ / површина

$t \text{ [}^\circ\text{C]}$ / температура

$T \text{ [K]}$ / апсолутна (термодинамичка) температура

$h \text{ [m]}$ / висина

$U \text{ [J]}$ / унутрашња енергија

$F \text{ [N]}$ / сила

$F_A \text{ [N]}$ / Архимедова сила

$F_O \text{ [N]}$ / сила отпора

c - специфична топлота

$C_p \left[\frac{\text{J}}{\text{K}} \right]$ / топотни капацитет при сталном притиску

$C_V \left[\frac{\text{J}}{\text{K}} \right]$ / топотни капацитет при сталној запремини

$c_m \left[\frac{\text{J}}{\text{kgK}} \right]$ специфични топлотни капацитет

$c_n \left[\frac{\text{J}}{\text{molK}} \right]$ моларни топлотни капацитет

$\beta \left[\frac{1}{\text{K}} \right]$ / термички коефицијент

$\sigma \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right]$ / специфична тежина

$\gamma \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} = \frac{\text{J}}{\text{m}^2} \right]$ - површински напон

$\eta \text{ [Pas]}$ / динамичка вискозност

$\nu \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$ / кинематичка вискозност

$\rho \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$ / густина

1. Особине флуида

У свакодневном животу позната су три агрегатна стања: *чврсто*, *течно* и *гасовито*. У савременој физици се спомиње и четврто агрегатно стање - *плазма*. Плазма постоји само на јако високим температурама, када је велики број атома јонизован, и кажемо да је то високојонизујуће стање гаса.

Ми ћемо се бавити углавном гасовима и течностима и користићемо заједнички назив - флуиди.

Које су основне разлике између чврстих, течних и гасовитих тела? Оно што је одмах видљиво: чврста тела имају сталну запремину и сталан облик; течности имају сталну запремину, а облик им зависи од суда у којем се налазе; гасови немају ни сталан облик, ни сталну запремину - увек су распоређени по целокупном простору који имају на располагању. Наравно, то важи ако тела нису изложена деловању спољашњих сила. Ако на чврсто тело делују силе, тело се деформише, мења му се облик; ако је сила изузетно јака, може се променити и запремина тела. Јаким силама може се мењати и запремина течности - течност се може сабити. Сабијање се изазива силама које делују нормално на неку површину тела; а чињеница да те силе морају бити јаке показује да постоје унутрашње силе у самој течности које су супротстављају сабијању, односно деловању нормалних сила.

То што течности и гасови немају сталан облик указује на то да они не пружају никакав отпор деловању тангенцијалних сила, односно они могу да теку. Сва тела која могу да теку називају се флуиди. Флуид тече ако на њега делују тангенцијалне силе произвољне јачине.

Са становишта механике, течности и гасови имају много заједничких особина, па се и проучавају заједно у механици флуида. Ми ћемо се бавити механиком идеалних и нестишљивих флуида: у идеалном флуиду нема сила унутрашњег трења, а нестишљив флуид се не може сабијати.

Течности и гасови имају еластичност запремине, што има за последицу преношење притиска у свим правцима равномерно. До извесног степена флуиди се могу проучавати заједно, јер се њихова својства могу описати истим законима, па отуда и назив области њиховог заједничког истраживања: механика флуида. Сходно класичној подели, механика флуида се дели на статистику флуида, која проучава стање равнотеже течности и гасова, кинематику флуида, где се анализира кретање честица флуида без утицаја сила и динамика флуида, која се бави макроскопским ефектима кретања течности и гасова под дејством сила.

1.1 Молекулске силе

Ако се капљице исте течности додирну оне се споје у једну кап. Оловне, глатко исполиране, плочице се "слепе" при додиру са њиховим углачаним површинама. Ови и многи други огледи, који су нам познати, показују да се молекули исте супстанције на малим растојањима узајамно привлаче релативно јаким силама. Насупрот томе, из мале стишљивости чврстих и течних тела, као и из еластичне деформације тела, може да се закључи да међу молекулима на још мањим растојањима од оних, при којима се привлаче, делују релативно јаке одбојне силе.

У случају чврстих и течних тела, на која не делују спољашње силе, постоји неко одређено растојање између суседних молекула, за које је резултанта привлачних и одбојних сила једнака нули па се молекули налазе у положајима равнотеже. При том њихова потенцијална енергија узајамно деловања има минималну вредост.

Молекулске силе међу молекулима делују само на малим растојањима која су величине самих молекула. Зато међумолекулске силе представљају силе кратког домета. Услед тога њих можемо да занемаримо у случају гасовитих тела.

Најзад, услед кратког домета молекулских сила, густина течних и чврстих тела или еластична својства чврстих тела не зависе од броја њихових молекула, па тиме ни од величине тела, пошто се молекулске силе испољавају само међу суседним молекулима.

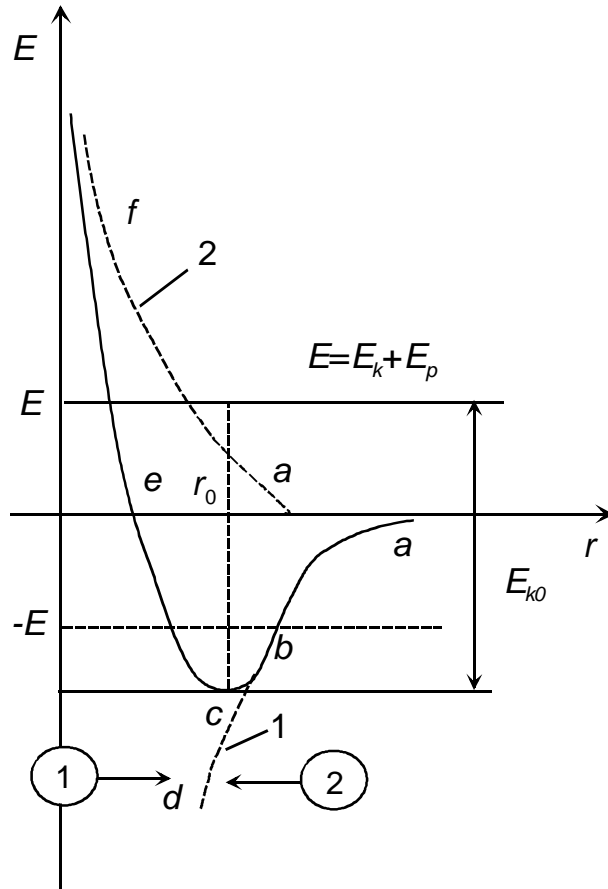
Молекулске силе су силе електромагнетне природе. Молекули су сложени системи који се састоје од електрона и атомских језгра. Иако су молекули као целина електрично неутрални на малим растојањима постоји електрично деловање међу њима. Електрони и језгра једног молекула узајамно делују са електронима и језгрима другог.

Да бисмо формирали потенцијалну криву узајамног деловања два молекула (атома) полазимо од експериментално утврђених закључака:

- међумолекулске силе брзо опадају са повећањем растојања међу молекулима;
- силе привлачења мењају се спорије са повећањем растојања међу молекулима;
- силе међумолекулског деловања зависе за посматрани пар молекула од њиховог растојања.

На слици 1.1.1 представљена је типична потенцијална крива узајамног деловања два молекула (атома) означених са 1 и 2. Молекул 1 налази се стално у координантом почетку а молекул 2 може да се налази на различитим растојањима r од првог.

Ако се молекул 2 налази на великом растојању r од првог, потенцијална енергија њиховог узајамног деловања блиска је нули, чему одговара асимптотско приближавање нули криве функције $E_p(r)$ за велике вредности r .



Слика 1.1.1

При смањењу растојања r најпре почињу да делују силе привлачења, које расту са скраћењем растојања молекула. Привлачним силама одговара негативна потенцијална енергија. На слици је то приказано делом криве abc. На делу криве од a до b делују само привлачне, док од b до c почиње и деловање одбојних сила. Испрекидани део криве од c до d показује како би се мењала потенцијална енергија да нема сила одбијања. Силе одбијања делују у супротном смеру од деловања сила привлачења и зато је њима одговарајућа потенцијална енергија позитивна. Испрекиданом линијом 2 приказана је потенцијална енергија одбијања у функцији растојања молекула.

При изједначавању молекулских сила привлачења и одбијања на неком растојању молекула r_0 крива има минимум, а при даљем смањивању растојања почиње да расте. Минимуму потенцијалне енергије одговара равнотежни положај молекула у кристалу, на пример, када је резултанта привлачних и одбојних сила једнака нули.

Што се тиче кинетичке енергије молекула, она је увек позитивна и расте са повишењем температуре. Ако њу додамо потенцијалној енергији добијамо укупну енергију молекула $E = E_k + E_p$. Ако је укупна енергија позитивна, као на слици, онда молекули нису везани, изван домета су молекулских сила и налазе се у гасовитом телу. У случају кристала, укупна енергија молекула је негативна и пресеца криву $E_p(r)$ испод r - осе. Молекули се налазе у дубокој потенцијалној јами. Што се тиче течних тела, њима одговара интермедијарни случај, узајамно деловање молекула је мање него у случају чврстих тела, а још увек много веће него код гасовитих тела.

Течности су по неким својим особинама сличне гасовима, по неким - чврстим телима. Течна тела, као и гасовита, немају сталан сопствени облик, већ попримају облик суда у коме се налазе, али имају добро дефинисану слободну површину. Течности, као и гасови, истискују тела која се у њима налазе (потисак) и притисак се у њима преноси подједнако на све стране. Поред тога, течности и гасови су изотропни: физичке особине не зависе од правца у њима. За разлику од гасова, који увек испуњавају цео расположиви простор, течности имају сталну запремину, слично чврстим телима. У тој запремини молекули течности су густо збијени, те је њихова стишљивост неупоредиво мања од стишљивости гасова, а густина много већа од густине гасова (приближно 1000 пута).

При топљењу чврстог тела његова запремина се врло мало повећава, од 5 до 15%, док се при преласку течности у гас повећава много више. То значи да је просечно растојање између молекула у течности само мало веће него у чврстом телу, па је и утицај међумолкулских (кохезионих) сила у течности практично исти као у чврстим телима. Чињеница да је специфична топлота супстанције у течном стању само мало виша (око 10%) него у чврстом стању, указује да се топлотно кретање молекула у течном стању мало разликује од кретања у чврстом стању. Повишење температуре, као што знамо, одговара повећању средње кинетичке енергије, односно средње брзине, молекула. Ако је потребна скоро иста енергија да се температура супстанције у чврстом и течном стању повиси за један степен, онда се и средња брзина молекула у оба случаја повећавају за скоро исти износ, што показује да су кретања молекула у оба стања веома слична.

Феноменолошки се повећање запремине флуида ΔV при загревању описује на следећи начин:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \beta \Delta t,$$

где су

V_0 почетна запремина,

$\frac{\Delta V}{V_0}$ релативна промена запремине,

β термички коефицијент ширења и

Δt промена температуре

Овај израз можемо написати и у облику

$$\Delta V = V_0 \beta \Delta t.$$

Исто тако се може написати, имајући у виду да је $\Delta V = V - V_0$:

$$V = V_0(1 + \beta \Delta t). \quad (1.1.1)$$

Имајући у виду дефиницију густине флуида (о којој ће бити више речи у наредном параграфу), пишемо даље:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_0(1 + \beta \Delta t)}.$$

Ако узмемо да је на температури $t_0 = 0^\circ \text{C}$ густина одговарајућа густина ρ_0 , даље добијамо:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta t}. \quad (1.1.2)$$

Пример:

На температури 100°C густина живе је 13400 kg/m^3 . На којој температури је густина живе 13100 kg/m^3 ?

Коефицијент запреминског ширења живе је $\beta = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$.

Решење: Користећи формулу (1.1.2) у облику

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{1 + \beta t_1}; \rho_2 = \frac{\rho_0}{1 + \beta t_2},$$

добијамо

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \beta t_1}{1 + \beta t_2}.$$

Решавамо последњу једначину по t_2 :

$$t_2 = \frac{\frac{\rho_1}{\rho_2} (1 + \beta t_1) - 1}{\beta} = 229^\circ\text{C}.$$

1.2 Густина флуида

У уводном објашњењу ове главе је већ напоменуто да су маса m и запремина V физичка својства која се везују уз коначну количину јасно разграниченог тела (слика 1.2.1). Средња густина тог тела је:

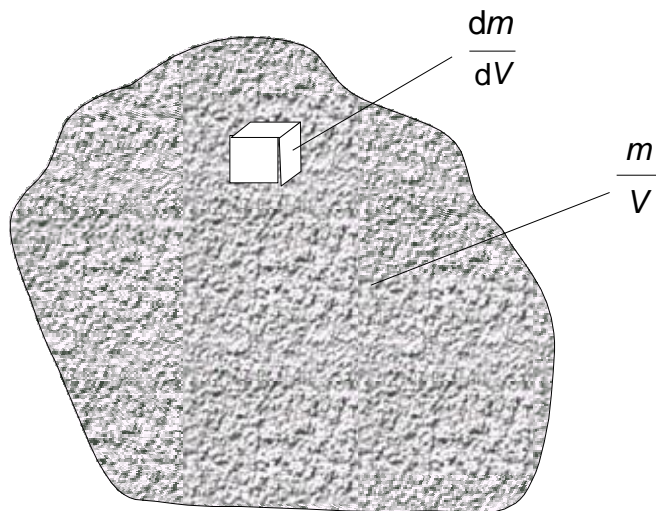
$$\bar{\rho} = \frac{m}{V},$$

и ако се претпостави да је тело хомогено, средња густина је својство материје у било којој тачки тела.

За нехомогена тела, са густином у простору која није константна, уместо средње густине, треба увести расподелу густине по простору $\rho(x, y, z)$. У изразу за густину је потребно смањити посматрану запремину до нивоа елементарне запремине dV која ће имати масу dm , па је

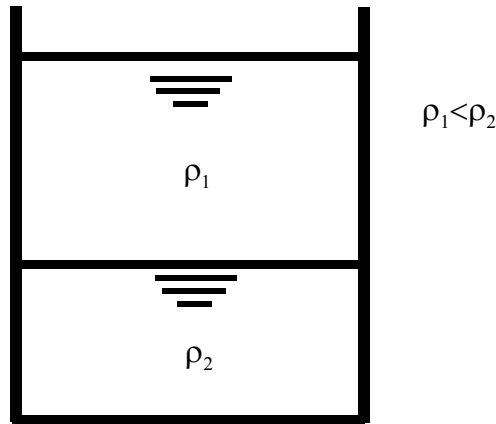
$$\rho(x, y, z) = \frac{dm}{dV}.$$

Као и код чврстих тела и код флуида се може уочити оговарајућа елементарна запремина dV масе dm и израчунати густина $\rho(x, y, z)$. За константну густину флуида $\rho(x, y, z) = \text{const}$, каже се да је флуид хомоген.



Слика 1.2.1

На слици 1.2.2 је приказан случај када се два хомогена флуида, течности, налазе у истом суду. Претпоставља се да не долази до мешања тих флуида и да се формира јасна хоризонтална граница. Услед мешања флуида, граница никада није оштра. Међутим, ако се изучавају силе на резервоар висине пар метара, да ли је граница између флуида оштра или са континуалним прелазом у зони од неколико сантиметара, заиста није од суштинског значаја. Флуид мање густине, ρ_1 , ће увек заузимати горњи део суда, док ће флуид веће густине, ρ_2 , заузимати доњи део суда.



Слика 1.2.2

Густина флуида се мења са променом температуре, али у знатно мањој мери него што се мења вискозност. У задацима хидростатике, густина ваздуха ће се занемаривати, јер се ради са малим висинским разликама. Силе, услед деловања тежине течности, су доминантне, па се за густину ваздуха узима да је приближно нула.

У случају смеше флуида, удели појединих компонената могу се исказати као масени или запремински, и представљају однос масе или запремине једне компоненте подељену са укупном масом или запремином смеше. Уколико су познати масени удели појединих компонената смеше и њихове густине, густина смеше течности добија се из релација:

$$V_s = V_1 + V_2,$$

односно

$$\frac{m_s}{\rho_s} = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2},$$

одакле следи

$$\rho_s = \frac{\rho_1 \rho_2 m_s}{m_1 \rho_2 + m_2 \rho_1}.$$

Ако су познати запремински удели и густине појединих делова, густина смеше течности добија се на основу следећих релација:

$$m_s = m_1 + m_2,$$

$$\rho_s V_s = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2,$$

одакле следи

$$\rho_s = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_s}.$$

Пример: Колика је густина мазута масе $m = 1 \text{ t}$ који се налази у цистерни и заузима запремину $V = 1,087 \text{ m}^3$. Изразити резултат у $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ и $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

Решење:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{1000 \text{ kg}}{1,087 \text{ m}^3} = 920 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Пошто је $1 \text{ kg} = 10^3 \text{ g}$ и $1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3$, следи

$$\rho = 0,92 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

1.3 Тежина и специфична тежина

Тежина је сила, једнака производу масе крутог тела и убрзања земљине теже g

$$Q = mg$$

односно, тежина елементарног делића који има запремину dV је

$$dQ = dMg$$

Када се посматра флуид, уобичајено је да се уместо елементарне масе пише ρdV па је тежина елементарног делића флуида:

$$dQ = \rho dVg$$

Увешћемо још појам специфичне тежине:

$$\sigma = \frac{dQ}{dV} = \frac{dMg}{dV} = \rho g$$

Пример: Запремина од 6 m^3 неког машинског уља има тежину $Q = 53000 \text{ N}$. Колика је специфична тежина и густина овог уља?

Решење:

$$\sigma = \frac{Q}{V} = \frac{53000}{6} = 8833 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} ; \rho = \frac{\sigma}{g} = 900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

1.4 Еластичне деформације и компресибилност флуида

Све материје су у извесној мери стишљиве, јер одређена промена притиска увек доноси промену запремине. Стишљивост флуида се дефинише преко модула стишљивости κ (аналоган модулу еластичности код чврстих тела):

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{\kappa} dp,$$

или

$$\kappa = -\frac{V}{dV} dp,$$

где знак минус у изразу указује на то да повећање притиска увек изазива смањење запремине.

Пошто је маса флуида константна, не зависи од степена деформације, елементарна запремина се може написати као:

$$dV = d\left(\frac{m}{\rho}\right) = m d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{m}{\rho^2} d\rho,$$

па се претходни израз може написати у функцији од масе и густине:

$$\kappa = -\frac{\frac{m}{\rho}}{-\frac{m}{\rho^2} d\rho} dp = \rho \frac{d\rho}{d\rho}.$$

Из овог израза се види да је модул стишљивости једнак односу повећања притиска према релативном повећању густине услед повећаног притиска. Коефицијент стишљивости има реципрочну вредност:

$$s = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\rho}.$$

Пример:

Модул стишљивости воде на нормалној температури је $\kappa = 2,07 \text{ GPa}$. Ако је густина воде на површини $\rho_0 = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, колика ће бити густина на 10 m дубине? Колика је релативна промена запремине?

Решење:

Притисак воде на 10 m дубине је:

$$p_{10} = \rho g h = 98,1 \text{ kPa}.$$

Промена густине воде се добија из израза:

$$\kappa = \rho \frac{dp}{d\rho},$$

одакле следи

$$d\rho = \rho \frac{d\rho}{\kappa}.$$

У овом случају можемо узети коначне разлике:

$$\Delta\rho = \rho \frac{\Delta\rho}{\kappa},$$

односно

$$\Delta\rho = \rho \frac{p_{10} - p}{\kappa} = 0,047 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

па ће густина воде на дубини од 10m бити

$$\rho_{10} = \rho_0 + \Delta\rho = 1000,047 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

При овој промени притиска, релативна промена запремине ће бити:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{\kappa} \Delta p = -0,0047\%.$$

Модул стишљивости ваздуха на нормалној температури је $\kappa = 140 \text{ kPa}$, што је око 10000 пута мање од модула стишљивости воде. Стишљивост је изузетно важна код проучавања термодинамичких процеса који се одигравају у парним котловима, компресорима, измењивачима топлоте и осталим термодинамичким машинама.

1.5 Притисак у флуиду

Притисак је скалар и представља једно од својстава флуида везаних за једну тачку (као и густина, температура итд.) Означава се са p и има димензију Паскал ($\text{Pa} = \text{N/m}^2$). У употреби је и бар ($1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$).

Разликује се унутрашњи и спољашњи притисак. Унутрашњи притисци у оквиру елементарних запремина у посматраној издвојеној флуидној запремини се поништавају. Спољашњи притисак представља дејство спољашњих сила. Тачна дефиниција притиска одређена је напонским стањем.

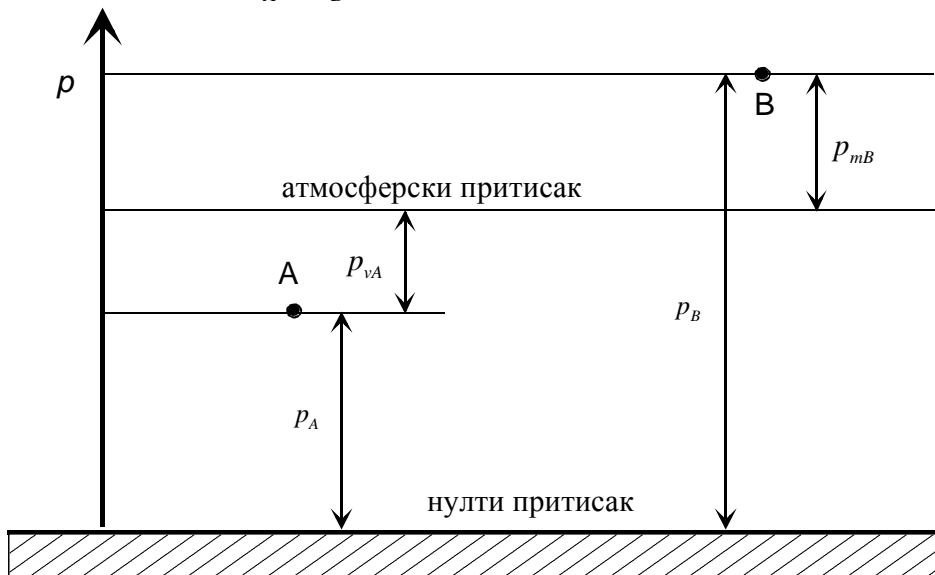
Атмосферски притисак је последица деловања целокупне Земљине атмосфере и мења се са географским положајем. Зависи од температуре и густине ваздуха. За стандардни атмосферски притисак узима се притисак који влада на нула метара надморске висине при температури од $15\text{ }^{\circ}\text{C}$ и износи 101325 Pa .

Зависно од тога да ли се притисак мери од нуле или од атмосферског притиска разликујемо (слика 1.5.1):

манометарски притисак или натпритисак p_{mB}

вакуумметарски притисак или потпритисак p_{vA}

апсолутни притисак p_A и p_B



Слика 1.5.1

Апсолутни притисак добија се при мерењу притиска од нултог притиска (p_A и p_B). Релативни притисак добија се при мерењу притиска од атмосферског притиска. Релативни притисак може да буде вакуумметарски (потпритисак) p_{vA} и манометарски (натпритисак) p_{mB}

Ако у одређеној запремини влада манометарски притисак тада је апсолутни притисак једнак збиру атмосферског притиска и натпритиска.

$$p_A = p_a - p_{vA}$$

Ако у одређеној запремини постоји вакуум, тада је апсолутни притисак у њој једнак разлици атмосферског притиска и потпритиска.

$$p_B = p_a + p_{mB}$$

Пример: Ако је притисак у гуми аутомобила 234,579 кПа а атмосферски притисак 101,325 кПа, колики је апсолутни притисак?

Решење:

$$p_B = p_a + p_{mB} = 336\text{kPa}.$$

Пример

Ако је притисак у гуми од аутомобила 234,579 кПа а апсолутни притисак 476,031 кПа, да ли је атмосферски притисак нормалан? Ако није, колики би требало да буде апсолутни притисак да би атмосферски притисак био нормалан?

Решење:

$$p_a = p_B - p_{mB} = 103485\text{Pa}.$$

Не одговара атмосферском притиску. Да би атмосферски притисак био 101,325 кПа потребно је да апсолутни притисак буде

$$p'_B = p_a + p_{mB} = 335904\text{Pa}.$$

Течности и гасови немају еластичност облика (већ само запремине) и због тога се дејство силе код њих не може извести преко једне тачке као код чврстих тела. због тога се уводи физичка величина која карактерише дејство нормалне силе по јединици површине. Ова физичка величина се назива притисак, и обично се обележава са p . Ако је сила која делује равномерно распоређена по површини S флуида, онда је реч о средњем притиску:

$$p = \frac{F}{S}. \quad (1.5.1)$$

За случај неравномерног деловања силе дефинише се притисак у тачки, тј. узимамо граничну вредност површине:

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS}. \quad (1.5.2)$$

Површина ΔS може бити оријентисана произвољно, али сила делује увек нормално на њу, па је отуда притисак у течности у свим правцима исти и представља скаларну физичку величину. Јединица за притисак је:

$$[p] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{m}^{-1}\text{kg}\text{s}^{-2} = \text{Pa}. \quad (1.5.3)$$

Често се користи јединица бар:

$$1\text{bar} = 10^3\text{mbar} = 10^5\text{Pa}. \quad (1.5.4)$$

Димензија за притисак је:

$$\text{dim}p = \frac{\text{dim}F}{\text{dim}S} = L^{-1}\text{MT}^{-2}. \quad (1.5.5)$$

Пример: Течност делује силом интензитета $F = 40 \text{ N}$ на површину $S = 20 \text{ cm}^2$. Колики је притисак течности?

Решење: Притисак је бројно једнак односу интензитета силе и површине на коју та сила нормално делује. Наиме,

$$p = \frac{F}{S},$$

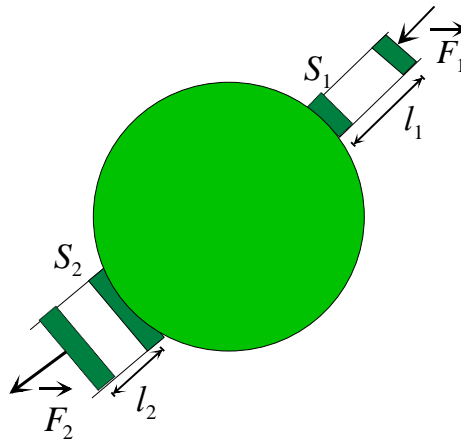
па се заменом добија да је

$$p = 20 \text{ kPa}.$$

1.6 Преношење притиска кроз течност. Паскалов закон

Преношење притиска у течности има широку примену у техници, па је због тога корисно указати детаљније на ову особину.

Узмимо да се идеална течност налази у цилиндричном суду чији је попречни пресек приказан на слици 1.6.1. Оса цилиндра је нормална на раван слике тако да се слој течности у равни пресека налази на истој висини x . Са стране овог цилиндра налазе се два мања цилиндра различитог попречног пресека S_1 и S_2 , са покретним клиповима.



Слика 1.6.1

Када на клип површине S_1 делује сила \vec{F}_1 , она врши притисак:

$$p_1 = \frac{F_1}{S_1}, \quad (1.6.1)$$

који се преноси кроз течност. Клип 1 се при томе померио за l_1 . Течност врши притисак на зидове суда и клип 2, померајући га за дужину l_2 , дејствујући на њега силом:

$$F_2 = p_2 S_2. \quad (1.6.2)$$

Пошто се ради о идеалној течности рад силе \vec{F}_1 дуж пута l_1 мора бити једнак раду силе \vec{F}_2 дуж пута l_2 :

$$F_1 l_1 = F_2 l_2, \quad (1.6.3)$$

односно:

$$p_1 S_1 l_1 = p_2 S_2 l_2, \quad (1.6.4)$$

Како очигледно важи:

$$S_1 l_1 = V_1 \wedge S_2 l_2 = V_2, \quad (1.6.5)$$

следи да запремине морају бити једнаке јер је течност нестишљива, па добијамо:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2, \quad (1.6.6)$$

односно:

$$p_1 = p_2. \quad (1.6.7)$$

Ово се речима може исказати:

Притисак се преноси кроз течност у свим правцима подједнако.

Ово представља садржај Паскаловог закона.

Ова особина течности је омогућила примену код различитих уређаја који играју улогу простих машина, нпр. хидрауличних преса, дизалица, кочница код возила, киповање материјала итд.

1.7 Хидраулична преса

Из релације (1.6.7) произилази

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2}. \quad (1.7.1)$$

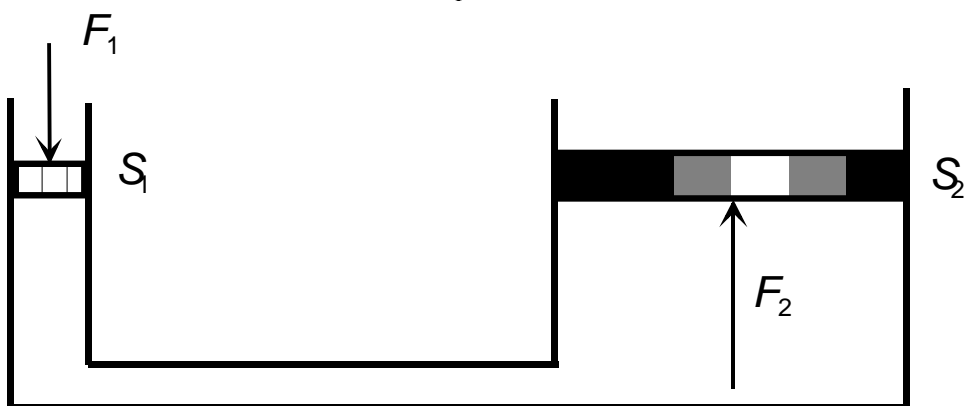
Ово представља повољну околност да се однос сила $\frac{F_1}{F_2}$ на слици 1.7.1

подешавањем површина клипова S_1 и S_2 може начинити произвољним. Пошто се однос површина клипова S_1 и S_2 може начинити врло великим, значи да се на основу закона преношења притиска може дејством неке силе F_1 на клип S_1 произвести врло велика сила F_2 на клипу S_2 . Оваква околност се користи код хидрауличне пресе, помоћу које се може произвести врло велика сила дејством далеко мање силе. Таква преса служи онда као машина са врло великом механичком предношћу. На сл. 1.7.1 приказан је

принцип хидрауличне пресе који се не разликује од оног на слици 1.6.1. Из односа (1.7.1) произлази

$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}. \quad (1.7.2)$$

Хидраулична преса се употребљава најчешће тамо где се захтевају врло велике силе. Да би ход великог клипа могао да буде већи, притисак на мали клип се наизменично понавља, при чему се доводе нове количине течности и убацују у пресу. Тиме мали клип S_1 игра улогу пумпе.



Слика 1.7.1

При дејству пресе уложен рад на малом клипу преноси се на велики клип, који у том случају врши рад. Мали и велики клип могу бити на великом растојању спојени само једном цеви. При том се може подесити стално преношење рада на веће даљине ако се дејство великог клипа наизменично понавља. Овакви уређаји се зову *хидраулични преноси* и служе за вршење рада на већим даљинама и под повољним околностима. Крме на броду се обично покрећу хидрауличним преносом. Позната је и увелико одомаћена употреба хидрауличних кочница итд.

Пример: Однос полупречника клипова у хидрауличној преси је 1/10. Колики је однос интензитета силе којом се на пресу делује и интензитет силе којом она делује?

Решење: Код хидрауличне пресе однос површина клипова једнак је односу сила које делују на клипове

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2},$$

где је $S_1 = \pi r_1^2$ и $S_2 = \pi r_2^2$, па је тражени однос интензитета сила

$$\frac{F_1}{F_2} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 = \frac{1}{100},$$

пошто је $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{10}$. Према томе, машина ће деловати 100 пута јачом силом него што је јачина силе којом се на њу делује.

Пример: Помоћу хидрауличне пресе треба да се подиже терет који је 64 пута већи од интензитета силе којом се на пресу делује. Колики треба да буде однос полупречника клипова у преси?

Решење: Пошто однос сила треба да буде $\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{64}$, онда је потребно да однос полупречника буде

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{F_1}{F_2}} = \frac{1}{8}$$

односно

$$r_2 = 8r_1$$

Пример: Површине клипова хидрауличне пресе износе $S_1 = 20 \text{ cm}^2$ и $S_2 = 2000 \text{ cm}^2$. На коју висину ће се подићи већи клип када се мањи клип спусти за $h = 50 \text{ cm}$?

Решење: Имајући у виду нестишљивост течности, при чему је запремина течности која истекне из ужег суда једнака запремини течности која се улије у шири суд, важи следећа релација

$$S_1 h_1 = S_2 h_2,$$

и из релације за хидрауличну пресу

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2},$$

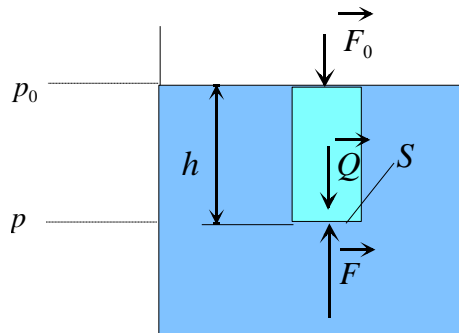
добивамо

$$h_2 = \frac{S_1}{S_2} h_1 = \frac{20}{2000} 50 \text{ cm} = 0,5 \text{ cm}.$$

2. Статика флуида

2.1 Хидростатички притисак

Често је потребно знати притисак на некој дубини h испод слободне површине течности. Ради једноставности овај проблем је најлакше разматрати у идеалној течности (апсолутно невискозној и апсолутно нестишљивој, тј. свуда исте густине).



Слика 2.1.1

Нека на слободну површину течности делује атмосферски притисак p_0 (види слику 2.1.1), који се преноси на све остале слојеве. Издвојимо у течности вертикални цилиндар, чији је попречни пресек S , а висина h . На горњу површину течности у цилиндру делује сила \vec{F}_0 , условљена притиском p_0 и Земљина тежа \vec{Q} која делује на течност у запремини цилиндра V . Како је течност у равнотежи, са супротне стране мора деловати сила супротног смера и мора бити задовољен услов:

$$\vec{F}_0 + \vec{Q} + \vec{F} = 0, \quad (2.1.1)$$

односно:

$$F = F_0 + Q. \quad (2.1.2)$$

Даље можемо писати:

$$pS = p_0S + mg, \quad (2.1.3)$$

где је p притисак на дубини h испод површине течности. Како је:

$$m = \rho V = \rho Sh, \quad (2.1.4)$$

релацију (2.1.3) сада можемо писати у облику:

$$pS = p_0S + \rho Shg, \quad (2.1.5)$$

односно:

$$p = p_0 + \rho gh, \quad (2.1.6)$$

где је ρgh хидростатички притисак. Релација (2.1.6) представља релацију за израчунавање притиска на дубини h .

Пример: Колики је притисак на дну реке чија је дубина $h = 10\text{ m}$?

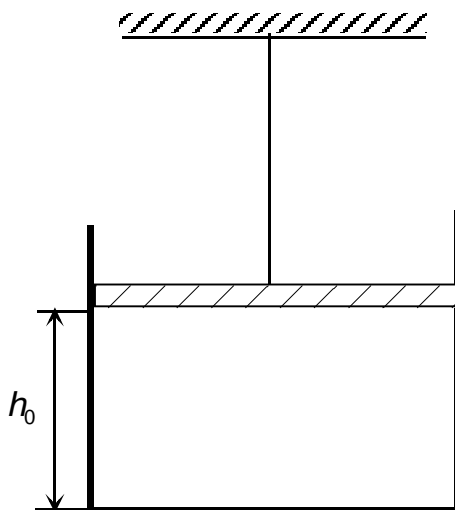
Решење: $p = \rho gh = 98,1\text{ kPa}$.

Пример Колика сила делује на врата подморнице, површине $S = 0,5\text{ m}^2$, ако се она налази на дубини $h = 100\text{ m}$? Узети да је густина морске воде $\rho = 1020 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Решење: Интензитет силе која делује на врата подморнице једнак је производу притиска воденог стуба изнад врата и површине врата, тј.

$$F = pS = \rho ghS = 0,5\text{ MN}$$

Пример: Цилиндрични суд, у коме се налази гас, попречног пресека S затворен је клипом масе m . Клип се држи на висини h_0 од дна помоћу нити чија је сила затезања T (слика 2.1.2). Нит се прекине и клип почне да се креће без трења. На ком растојању од дна суда ће брзина клипа бити максимална? Спољашњи притисак је p_0 . Температуру сматрати константном.



Слика 2.1.2

Решење: Услов равнотеже клипа везаног за нит је $mg + p_0S = T + pS$ (слика 2.1.3). Када се нит прекине сила која делује на клип наниже биће већа од силе која делује навише. Зато ће се клип кретати убрзано наниже. Међутим, тада се

гас испод клипа сабија, па је сила pS све већа и у једном тренутку изједначиће се са силом $mg + p_0S$. Све до тог тренутка кретање клипа било је убрзано, односно брзина се повећавала. Од тог тренутка, пошто ће притисак и даље расти, кретање клипа биће успорено. Дакле брзина клипа максимална је онда кад је резултујућа сила која на њега делује једнака нули. Нека је тада притисак гаса испод клипа p_2 . С обзиром да важи

$$mg + p_0S = p_2S,$$

следи

$$p_2 = p_0 + \frac{mg}{S}.$$

У почетном стању било је

$$p_1S = mg + p_0S - T,$$

односно

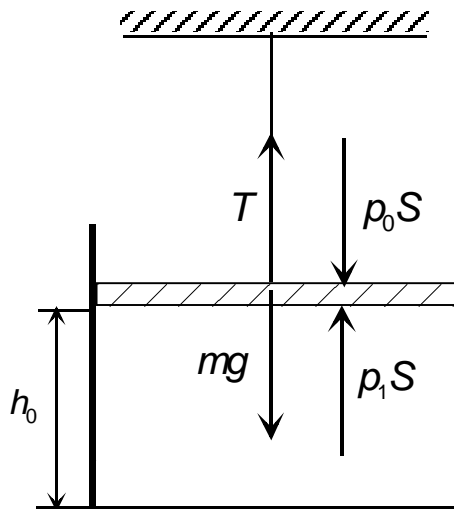
$$p_1 = p_0 + \frac{mg - T}{S}.$$

Како је температура константна важи (из једначине стања идеалног гаса):

$$p_1Sh_0 = p_2Sh,$$

одакле је

$$h = \frac{p_1h_0}{p_2} = \frac{(p_0S + mg - T)h_0}{p_0S + mg}.$$



Слика 2.1.3

Ваздушни омотач око Земље се налази у гравитационом пољу. Због тога је атмосферски притисак сличан притиску у течности. Концентрација молекула гаса и притисак опадају са висином h , где $h=0$ одговара површини Земље. Атмосферски притисак на висини h се рачуна по барометарској формули:

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}, \quad (2.1.7)$$

где су:

p - притисак на висини h изнад Земље,

p_0 - притисак на површини Земље

M - молекулска маса

R - универзална гасна константа

T - апсолутна температура.

Као што је познато из молекулско кинетичке теорије основна релација за притисак има облик:

$$p = n_0 k T, \quad (2.1.8)$$

односно на површини Земље:

$$p_0 = n'_0 k T, \quad (2.1.9)$$

где су n_0 и n'_0 конценатрација на висини h и на површини Земље респективно.

Ако ове релације за притисак уврстимо у релацију (2.1.7) добијамо:

$$n_0 = n'_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}. \quad (2.1.10)$$

Дискутоваћемо ову релацију за два гранична случаја:

1. Гас се налази на врло ниској температури, тј. $T \rightarrow 0$, онда и концентрација молекула тежи нули, $n_0 \rightarrow 0$. Израз:

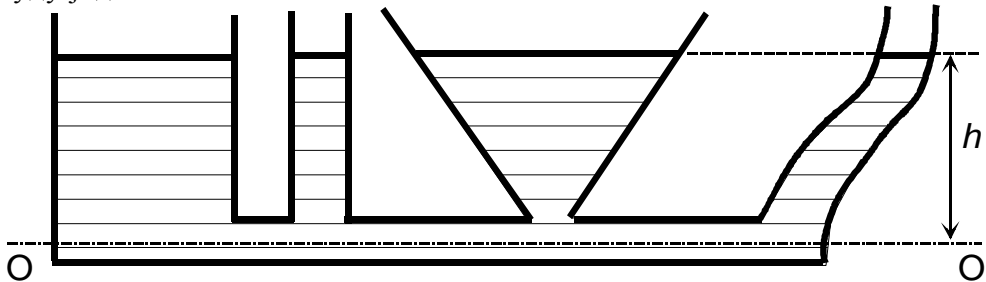
$$e^{-\frac{Mgh}{RT}} \quad (2.1.11)$$

тежи нули ако температура тежи нули. То значи да би број молекула гаса на било којој висини на апсолутној нули, био практично једнак нули. Ово се може објаснити тиме што би и кинетичка енергија молекула за $T = 0$ била једнака нули, па би молекули под утицајем гравитације пали на површину планете.

2. Гас се налази на врло високој температури, $T \rightarrow \infty$, број молекула би био n_0 . Молекули би се у овом случају равномерно распоредили по целој планети независно од висине.

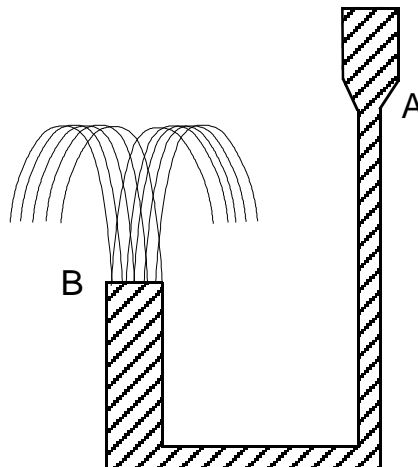
2.2 Хидростатички парадокс

У спојеним судовима, који су горе отворени, течност стоји на истом нивоу (слика 2.2.1), без обзира на облик суда. Ово се може једноставно протумачити да у мирној течности силе притиска морају бити свуда у равнотежи. Пошто притисак у течности зависи само од вертикалне висине h и густине ρ , и произлази да услед једнакости притиска на једном хоризонталном нивоу, на пример О-О, и висине стубова течности морају да буду једнаке.



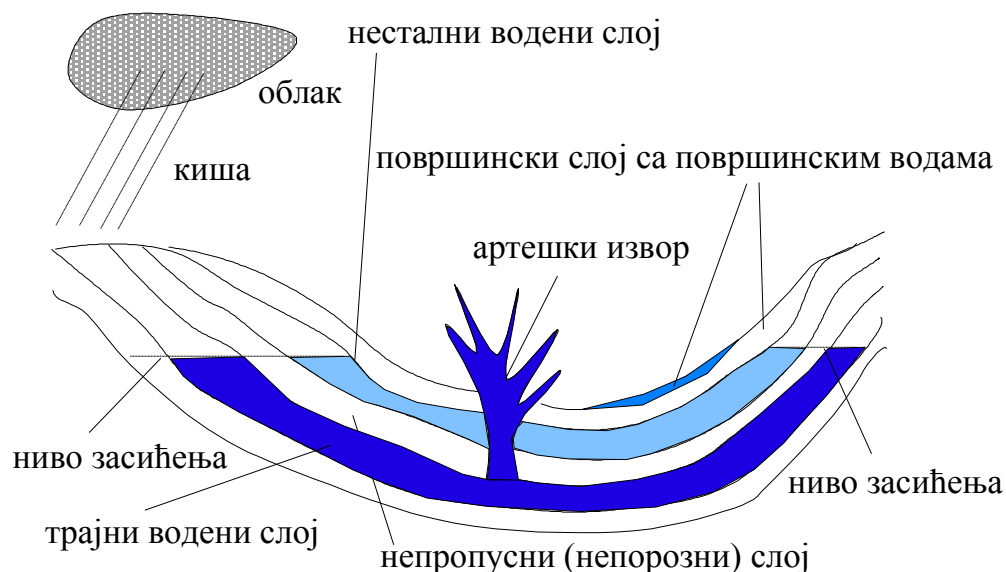
Слика 2.2.1

1. Код водоскока вода из суда A (слика 2.2.2), који је на вишем положају, струји кроз цев наниже до отвора B и ту избија, јер у том краку треба да буде њен ниво на истој висини као у A . Због отпора ваздуха, трења и због тога што капљице које падају потискују млаз наниже, не може вода доспети на ону висину коју треба да има.



Слика 2.2.2

2. Код артешких (артерских) бунара вода се сама подиже кроз цев која је спуштена у земљу, понекад у дубину од неколико стотина метара. Овакви бунари бушени су први пут у XVII веку у Француској покрајини Артоа. Код ових бунара потребно је да се наиђе на неки слој AA_1 (шљунак, песак — слика 2.2.3), који са површине земље прима велике количине атмосферске воде, а лежи између друга два слоја BB_1 и CC_1 глина), који не пропуштају воду. Кад је такав слој савијен, понаша се као спојени суд, па је разумљиво зашто се вода пење у цеви Z како би допрла до висине слободне површине.



Слика 2.2.3

Надолажење и нестајање подземних вода у бунарима, мочварама и подрумима објашњавамо такође помоћу закона за спојене судове. Ниво воде у њима зависи од подизања и спуштања нивоа воде у реци, која се налази у њиховој близини. Тако објашњавамо и скупљање воде у бунарима и излажење изворске воде.

У случају да се у спојеним судовима налазе различите течности са разним густинама, ниво течности у судовима неће бити једнак. Нека су у спојеним судовима (слика 2.2.4) две течности различите густине које се не мешају, на пример, вода и жива. Висине стубова течности h_1 и h_2 наћи ћемо из услова равнотеже притиска у течности кроз исти флуид. Исти атмосферски

притисак p_0 делује у оба крака цеви, те се може написати услов равнотеже притисака

$$\rho_1 g h_1 + p_0 = \rho_2 g h_2 + p_0,$$

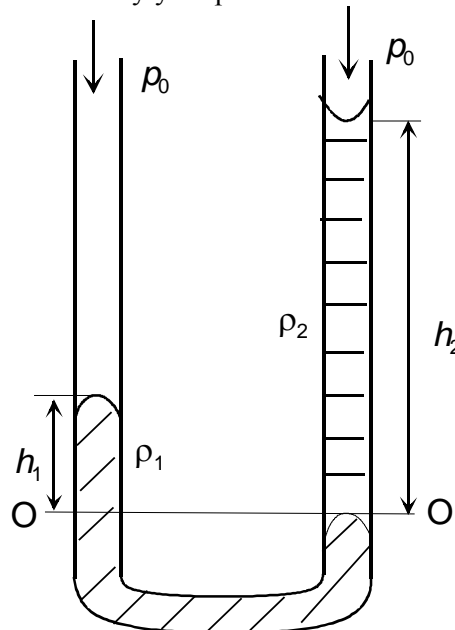
одакле је

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1}.$$

Висине стубова течности стоје у обрнутом односу њихових густина. Овакав однос се користи за одређивање непознате густине неке течности упоређивањем са течношћу познате густине. Величине h_1 и h_2 се једноставно мере, те са познатом густином ρ_2 произлази

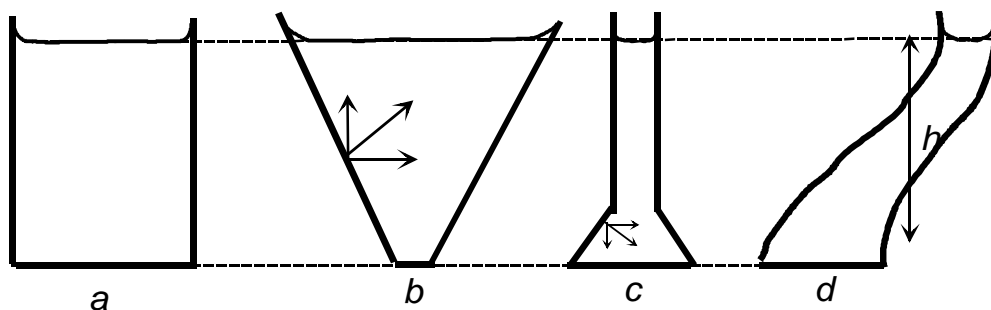
$$\rho_1 = \rho_2 \frac{h_2}{h_1},$$

па се на тај начин одређује непозната густина ρ_1 . Овакав метод, наравно, може се применити само ако су употребљене течности које се не мешају.



Слика 2.2.4

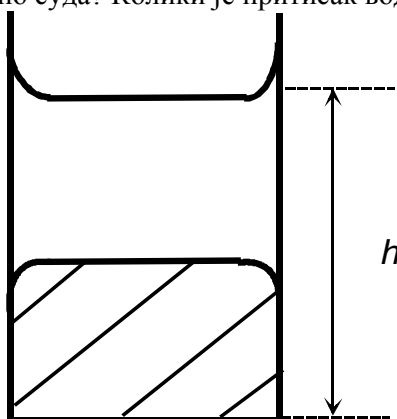
Притисак зависи само од висине вертикалног стуба, односно од дубине. Услед тога ће притисак при дну суда бити исти у судовима различитих облика само ако је вертикална висина од дна до површине течности иста у свим судовима (слика 2.2.5).



Слика 2.2.5

Ако су површине дна судова једнаке, онда ће течност у свим судовима деловати на дно суда истом силом, без обзира што су количине течности у судовима различите. Сила којом течност делује на дно суда једнака је тежини течности у цилиндричном суду. Одавде следи да у судовима (c) и (d) течност делује на дно већом силом него што је тежина течности у суду. На први поглед оваква појава је парадоксална, те се зато назива хидростатички парадокс. Међутим, одмах се може видети, у случају (b), да је вертикална компонента силе, којом зид делује на течност, усмерена навише, те прима један део тежине воде. Тада је сила на дно суда мања од тежине течности у суду. У случају (c) вертикална компонента је усмерена наниже, те је сила на дно суда већа од тежине течности у суду. Према томе, ради се само о расподели сила, док суд као целина неће показивати већу тежину од оне колико износи тежина течности у суду.

Пример: У цилиндричан суд наливене су количине живе и воде једнаких запремина (слика 2.2.6). Висина течности у суду је $h = 30\text{cm}$. Колики је притисак течности на дно суда? Колики је притисак воде на живу?



Слика 2.2.6

Решење: Притисак на дно суда је

$$p_2 = \rho_1 g \frac{h}{2} + \rho_2 g \frac{h}{2} = 21,5 \text{ kPa}.$$

Притисак воде на живу је

$$p_1 = \rho_1 g \frac{h}{2} = 1,47 \text{ kPa}.$$

Пример: Силом, интензитета $F = 1 \text{ kN}$, делује се на клип којим се сабија вертикални водени стуб, висине $h = 2 \text{ m}$ и површине попречног пресека $S = 16 \text{ cm}^2$. Колики притисак делује на дно суда? За колико се смањи висина воденог стуба услед компресије? Запремински модул еластичности воде износи $E_V = 2,1 \text{ GPa}$.

Решење: Притисак на дно суда је

$$p = p_1 + \rho gh = \frac{F}{S} + \rho gh = 0,65 \text{ MPa}.$$

Према Хуковом закону за запреминску деформацију је

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{E_V} \frac{F}{S},$$

односно

$$\Delta V = \frac{1}{E_V} \frac{VF}{S},$$

где је $\Delta V = \Delta h S$, а $V = h S$, па је смањење висине воденог стуба

$$\Delta h = \frac{Fh}{SE_V} = 0,6 \text{ mm}.$$

Пример Цистерну, полупречника $R = 1 \text{ m}$ и дужине $l = 5 \text{ m}$, испуњава вода до њене половине. При ком убрзању ће вода истицати кроз отвор на врху чеоног дела цистерне?

Решење Резултујућа сила $\vec{F} = m\vec{g} + (-m\vec{a})$ мора да буде нормална на слободну површину течности, јер код течности нема тангенцијалних сила (слика 2.2.7). Из троугла ABC је $\text{tg } \alpha = \frac{2x}{l}$, док је из векторског

троугла сила ACD исто тако $\text{tg } \alpha = \frac{a}{g}$, па је

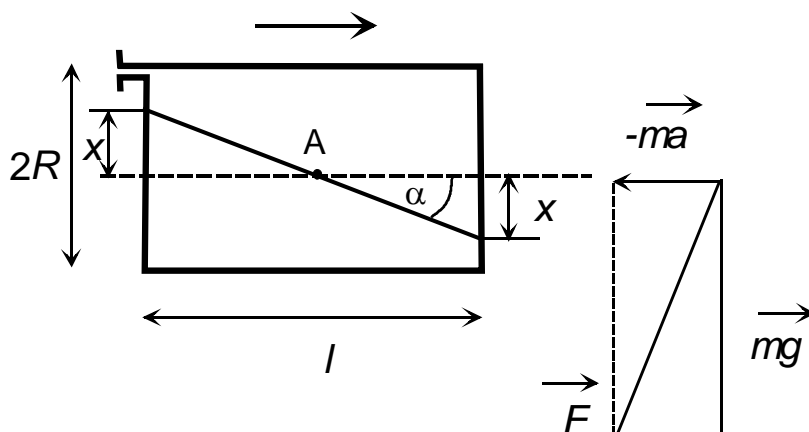
$$\frac{2x}{l} = \frac{a}{g},$$

одакле добијамо

$$a = g \frac{2x}{l}.$$

За гранични случај, када вода почне да истиче кроз отвор на врху, биће $x = R$, па је тада минимално убрзање цистерне

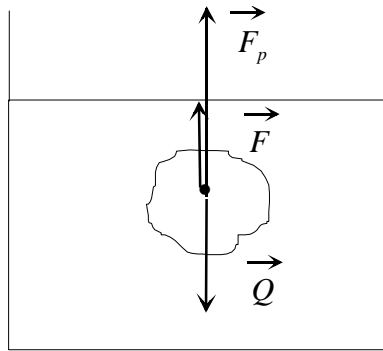
$$a_{\min} = g \frac{2R}{l} = 3,27 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



Слика 2.2.7

2.3 Потисак и Архимедов закон

Ако се тело запремине V потопи у суд са течношћу, ниво течности се подиже за висину која одговара запремини потопљеног тела. Тело у течности ће бити подвргнуто притиску са свих страна. Бочни притисци се поништавају јер су супротног смера, а истог интензитета. Резултујући притисак је због тога условљен разликом горњег и доњег притиска. Овај резултујући притисак, који је једнак тежини истиснутог флуида, назива се потисак. Према томе, свако тело уроњено у неки флуид трпи потисак, тј. губи привидно од своје тежине онолико колико је тежак њиме истиснут флуид (Архимедов закон). Приметимо да је потисак независан од дубине потапања тела у флуид, под условом да густина флуида и запремина тела остану исти.



Слика 2.3.1

Резултујућа сила \vec{F} (види слику 2.3.1), која дејствује на тело потопљено у флуид, према оном што је речено, једнака је разлици Земљине теже \vec{P} и силе потиска \vec{F}_p :

$$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{Q} + \vec{F}_p, \quad (2.3.1)$$

односно у скаларном облику:

$$F = ma = Q - F_p. \quad (2.3.2)$$

На основу дефиниције густине, можемо даље писати:

$$F = ma = \rho Vg - \rho' Vg = (\rho - \rho') Vg, \quad (2.3.3)$$

где је ρ густина тела, а ρ' густина флуида.

Из релације (2.3.3) можемо извући следеће закључке:

1. Ако су густине тела и флуида једнаке, тело лебди у флуиду:

$$F = 0 \wedge a = 0. \quad (2.3.4)$$

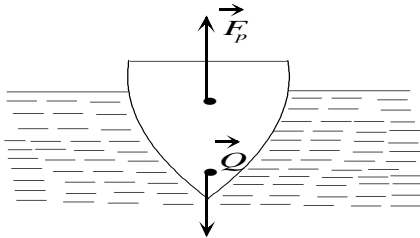
2. Густина флуида је већа од густине тела, $\rho' > \rho$, па је сила потиска већа од силе Земљине теже и тело испливава (или плива).

3. Тело има већу густину од густине флуида, $\rho' < \rho$, па је сила теже већа од силе потиска, услед чега је резултанта усмерена надоле и тело тоне.

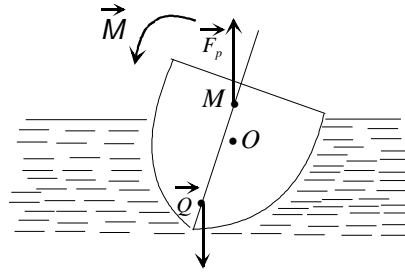
Ако густина тела (чамац, подморница, лопта) није хомогена, онда се при овим разматрањима узима њихова средња густина.

Пловни објекти морају имати средњу густину мању од густине воде. Код њих је само један део уроњен, док је други део изнад слободне површине воде. Битно је још да су усправни и у стабилној равнотежи. Сви ови услови ће бити остварени ако правац силе потиска пролази кроз тежиште усправног брода и да спрег сила, који образују сила трења и сила потиска кад се брод нагне, има такав смер да тежи да исправи брод (види слику 2.3.2).

Тачка M , у којој правац силе потиска сече осу пливања¹, назива се метацентар. Када је метацентар изнад тежишта, брод је у стабилној равнотежи, ако је испод тежишта, брод је у стању лабилне равнотреже и он ће се преврнути при најмањем поремећају равнотеже.



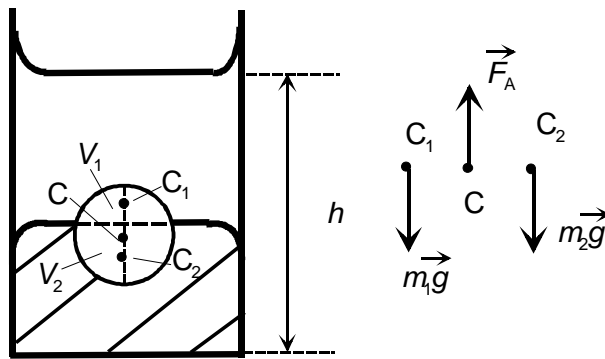
Слика 2.3.2



Слика 2.3.3

Пример: Кугла, начињена од хомогене супстанције густине ρ , плива између две течности које се не мешају. Густина горње течности је ρ_1 , а доње ρ_2 . Колики део кугле је потопљен у горњу, а колики у доњу течност?

Решење: Ако су V_1 и V_2 запремине делова кугле који су потопљени у горњој и доњој течности, онда је укупна запремина кугле (слика 2.3.4):



Слика 2.3.4

$$V = V_1 + V_2. \tag{2.3.5}$$

¹ тежишна линија брода када је он у усправном положају

Интензитет силе теже која делује на горњи део кугле је $m_1g = \rho V_1g$, а на доњи $m_2g = \rho V_2g$, док је интензитет Архимедове силе која делује на куглу $\rho_1 V_1g + \rho_2 V_2g$. Како су ове силе у равнотежи, то је

$$\rho V_1g + \rho V_2g = \rho_1 V_1g + \rho_2 V_2g. \quad (2.3.6)$$

На основу релација (2.3.5) и (2.3.6) добијамо

$$V_1 = V \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1},$$

и

$$V_2 = V \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}.$$

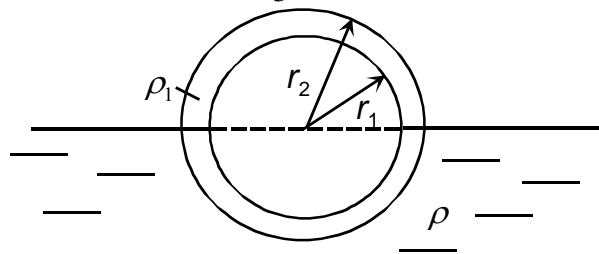
Пример: Шупља метална лопта (слика 2.3.5), унутрашњег полупречника $r_1 = 9\text{ cm}$ и спољашњег полупречника $r_2 = 10\text{ cm}$, плива на течности густине $\rho = 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, при чему је половина лопте изнад течности.

- а) Колика је густина супстанције од које је начињена лопта?
 б) Колика би требало да буде густина течности да би лопта у њој лебдела?

Решење:

- а) Запремина металног дела лопте је

$$V = \frac{4}{3} \pi (r_2^3 - r_1^3) \quad (2.3.7)$$



Слика 2.3.5

Како сила теже, која делује на лопти и Архимедова сила морају бити у равнотежи, то следи

$$\rho_1 g V = \rho g \frac{V_1}{2}, \quad (2.3.8)$$

где је

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi r_2^3,$$

запремина лопте. На основу релације (2.3.8) имамо:

$$\rho_1 = \frac{\rho}{2} \frac{1}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} = 1476 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

б. При лебдењу лопте је $\rho_1 g V = \rho_x g V_1$, одакле је

$$\rho_x = \rho_1 \frac{V}{V_1} = \frac{\rho}{2} = 400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

2.4 Аеростатички притисак и потисак у гасовима

Треба имати у виду да све што је споменуто за хидростатички притисак важи и за гасове. Притисак, који гасови врше својом тежином, зовемо аеростатичким притиском. Овај притисак расте са дубином и на дну суда једнак је тежини вертикалног стуба гаса. Уколико је неки слој виши, утолико аеростатички притисак у њему опадне за тежину гасног стуба, чија је висина једнака висинској разлици између двеју тачака.

Притисак кроз гасове преноси се једнако у свим правцима као и кроз течности, дакле, преноси се по Паскаловом закону.

Пошто се спољашњи притисак кроз гасове преноси по Паскаловом закону, разумљиво је да у суду, у коме се налази затворен неки гас, постоји притисак услед његове тежине, па отуд постоји и притисак на дно, на бокове и навише као и на све стране. Код малих количина гаса аеростатички притисак је незнатан због мале тежине гаса, па се стога може занемарити у односу на његов напон. Међутим, код великих количина гаса аеростатички притисак је већи од напона гаса.

Потисак се јавља и у гасовима. Архимедов закон за гасове ћемо дефинисати на следећи начин: Свако тело опкољено ваздухом или било којим гасом постаје за онолико лакше колико је тешка њиме истиснута запремина ваздуха или тога гаса.

Због потиска се подижу у ваздуху мехури сапунице, које добијамо, кад дувамо кроз цевчицу замочену у сапуњаву воду, јер их испуни ваздух из плућа који је топлији и лакши од спољашњег ваздуха (види слике 2.4.1. и 2.4.2).



Слика 2.4.1

На принципу деловања потиска у ваздуху засновани су ваздушни балони или аеростати (грч. аер = ваздух; статос = стојећи). То су лопте од платна превученог каучуком., испуњене неким специфички лакшим гасом од ваздуха (слика 2.4.3), обично водоником. Одозго, преко лопте је пребачена мрежа ужета о којима виси корпа (гондола) за смештај људи и терета.

Ако је тежина мреже, гондоле и терета у њој Q , а тежина гаса у балону σV , где је V запремина балона а σ специфична тежина гаса у њему, онда ће целокупна тежина балона бити $Q + \sigma V$. Ако је специфична тежина ваздуха σ_1 , онда потисак, који трпи балон, износи $\sigma_1 V$. Према томе, ако је $Q + \sigma V < \sigma_1 V$, балон ће се подизати силом

$$F = \sigma_1 V - (Q + \sigma V),$$

или

$$F = V(\sigma_1 - \sigma) - Q.$$

Дакле, F је величина погонске силе балона.

Како балон при подизању долази у све ређе слојеве ваздуха, тј. у слојеве у којима је специфична тежина ваздуха све мања, може наступити случај да потисак постане једнак целокупној тежини балона, дакле да је

$$F = 0 = V(\sigma_1 - \sigma) - Q$$

или

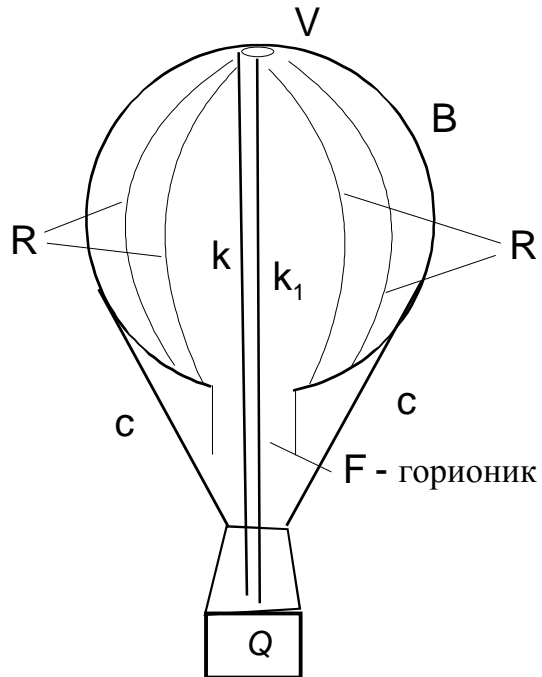
$$V(\sigma_1 - \sigma) = Q.$$

Тада се балон неће подизати него ће лебдити у ваздуху, јер је потисак једнак тежини балона. Ако је потребно да се, ипак, балон још подиже, посада избацује из гондоле терет (обично песак), који се увек понесе у цаковима. Кад је потребно да се балон спусти, посада помоћу конопца k_1 отвори вентил V . Тада из балона изађе одређена количина водоника, а уместо њега уђе спољашњи ваздух, због чега балон постане тежи, и спусти се наниже. За нагло испуштање гаса може се одрешити платно код помоћу конопца k_1 . Балон је доле код F отворен, и туда може увек изаћи вишак гаса, ако је унутрашњи притисак гаса већи од спољашњег атмосферског притиска, па тако балон неће прснути.

Описан балон на слици 2.4.3 се зове слободан балон. Овакав балон се креће увек у правцу како ветар дува. Међутим, тежња је била да се сагради балон дирижабл (види слику 2.4.4), тј. балон којим човек може да управља по својој вољи.

Први такав балон саградио је Француз Жифар 1851. Тај балон је имао дугуласт облик, а кретао се помоћу вуче елисе, коју је обртала парна машина смештена у гондоли, док му је правац управљан крмом.

На том принципу, Цепелин је конструисао 1900. г. дирижабл за преношење путника и робе. Тај балон имао је чврст костур од алуминијумских цеви, а био је превучен платном. У његовој унутрашњости било је 16 балонета испуњених водоником, а бензински мотори смештени у две гондоле обртали су елисе. Овакви ваздушни бродови су дугуљастог облика, а зову се цепелини (слика 2.4.5).



Слика 2.4.3



Слика 2.4.4



Слика 2.4.5

2.5 Површински напон

Постоји битна разлика између случаја када је молекула течности у унутрашњости течности и када се налази на површини течности. Резултанта сила које делују на молекулу унутар течности је једнака нули. Али резултанта сила које делују на молекулу на површини течности није једнака нули. Пошто је концентрација гаса изнад течности много мања од концентрације молекула унутар течности, то значи да ће резултанта сила бити усмерена према унутрашњости течности.

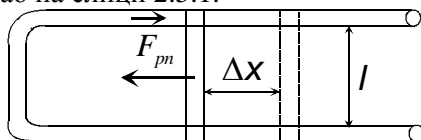
Молекули у површинском слоју имају већу потенцијалну енергију него они из унутрашњости. Пошто увек постоји спонтана тежња ка минимуму енергије, то значи да ће се слободна површина увек смањивати на минималну вредност (кап воде тежи увек да буде сферног облика, због минимума површине). Да би се повећала слободна површина течности мора се извршити рад. Колики ће тај рад бити зависи од природе течности, што карактерише коефицијент површинског напона. Коефицијент површинског напона је по дефиницији једнак односу рада и одговарајуће промене (повећање) површине:

$$\gamma = \frac{A}{\Delta S}. \quad (2.5.1)$$

Повећању слободне површине сеprotиве очигледно неке силе. односно површина течности се понаша као еластична опна. Појава, да се течности опиру повећању своје слободне површине, назива се **површински напон**.

Постоји много примера где се појављује површински напон. Мехур од сапунице, игла, која се стави на папир па затим на површину воде, неће потонути.

О силама површинског напона можемо сазнати из следећег огледа. Узме се рам од жице као на слици 2.5.1.



Слика 2.5.1

Ако је l дужина покретног дела рама при његовом померању за Δx , површина опне се смањи за $\Delta S = 2 \cdot l \cdot \Delta x$. Опна је танак слој течности који има две површине (због тога фактор 2). Рад који је при томе извршен је:

$$A = \gamma \cdot \Delta S = 2 \cdot \gamma \cdot l \cdot \Delta x. \quad (2.5.2)$$

Пошто је $A = F_{pn} \cdot \Delta x$, следи $F_{pn} = 2 \cdot \gamma l$, што представља силе којима обе површине опне делују на страну. Сила којом једна страна опне делује износи: $F = \gamma \cdot l$, одакле можемо добити и други израз за коефицијент површинског напона:

$$\gamma = \frac{F}{l}. \quad (2.5.3)$$

Из релације (2.5.1) закључујемо да је јединица за коефицијент површинског напона $[\gamma] = \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$ а из релације (2.5.3) $[\gamma] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$ односно преко основних

јединица SI система је $\frac{\text{kg}}{\text{s}^2} = \text{kg s}^{-2}$.

Димензија за коефицијент површинског напона износи:

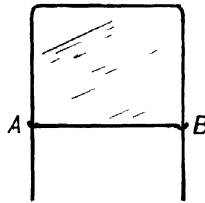
$$\dim \gamma = \frac{\dim F}{\dim l} = \text{MT}^{-1}. \quad (2.5.4)$$

Експериментално је установљено да коефицијент површинског напона зависи од природе течности и температуре течности (обрнуто сразмерно).

Пример: На вертикалном жичаном раму, са покретним делом AB (слика 2.5.2) формирана је опна од сапунице.

а) Колики треба да је пречник бакарне жице AB да би она била у равнотежи?

б) Колика је дужина жице AB ако је познато да се при њеном померању за 1cm изврши рад 0,045mJ? Густина бакра је $8600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.



Слика 2.5.2

Решење:

а) Жица AB је у равнотежи када је сила површинског напона једнака сили земљине теже:

$$2\gamma = mg,$$

тј.

$$2\gamma = \rho S g l.$$

Следи:

$$2\gamma = \rho S g = \rho \frac{\pi d^2}{4}.$$

Одатле је

$$d = 2 \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho \pi g}} = 1 \text{ mm}.$$

б) Рад је једнак промени површинске енергије течности:

$$A = 2\gamma \Delta S = 2\gamma x.$$

Одатле је

$$l = \frac{A}{2\gamma x} = 5,6 \text{ cm}.$$

Пример: Из бирете чији отвор има унутрашњи пречник 1,6 mm истиче алкохол у капима. Маса 100 капи је 1,02 g . Наћи коефицијент површинског напона алкохола.

Решење: Кап се одваја од бирете када се сила земљине теже која на њу делује изједначи са силом површинског напона:

$$mg = \gamma \pi d .$$

Одатле се може одредити маса једне капи:

Ако је маса 100 капи једнака m' , онда је

$$\frac{m'}{100} = \frac{\gamma \pi d}{g} .$$

Следи:

$$\gamma = \frac{m'g}{100\pi d} = 0,02 \frac{\text{N}}{\text{m}} .$$

Пример: У посуду запремине 6 cm³ падају капи воде из вертикалне цевчице унутрашњег пречника 1 mm. Колико капи треба да падне у посуду да би је напунило

Решење: Маса једне капи добија се из услова

$$mg = \gamma \pi d .$$

Следи:

$$m = \frac{\gamma \pi d}{g} .$$

Запремина једне капи је

$$V_0 = \frac{m}{\rho} = \frac{\gamma \pi d}{\rho g} .$$

Да би се напунила запремина V , у суд треба да упадне $n = \frac{V}{V_0}$ капи.

Дакле,

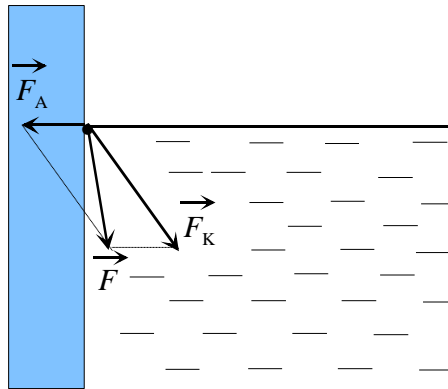
$$n = \frac{V \rho g}{\gamma \pi d} = 272 .$$

2.6 Појаве на граници чврстих и течних тела. Капиларне појаве

Облик слободне површине течности зависи од силе површинског напона и међумолекулских сила између граничне површине течности и зидова суда

(чврстог тела). Сила Земљине теже такође има знатног утицаја на формирање слободне површине. Привлачне силе које владају између молекула исте врсте називају се силе кохезије \vec{F}_k (нпр. привлачне силе између молекула течности). Силе које владају између молекула различите врсте (нпр. између молекула течности и зидова суда) називају се силама адхезије. У зависности које силе преовлађују кажемо да тело квази односно не квази зидове суда.

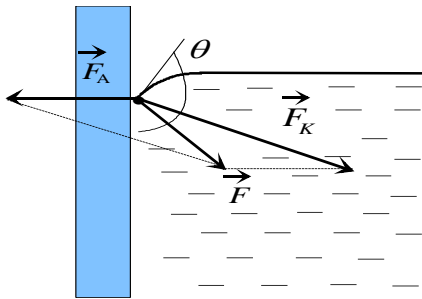
Посматрајмо молекул M на површини течности који је у додиру са зидом суда (види слику 2.6.1). Опишимо око тог молекула замишљену сферу молекулског дејства. Сви молекули течности унутар те сфере привлаче молекул M . Резултујућа сила кохезије \vec{F}_K је тада усмерена ка унутрашњости течности. Молекули чврстог тела (зидова суда) са своје стране привлаче молекул M неком резултујућом силом \vec{F}_A (сила адхезије). Резултанта ових двеју сила:



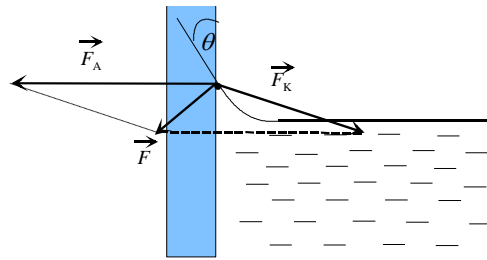
Слика 2.6.1

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_K \quad (2.6.1)$$

ће бити усмерена према зиду суда (напоље) или према унутрашњости течности. У сваком случају он је увек нормална на слободну површину течности када је течност у равнотежи. Када је резултанта \vec{F} усмерена ка унутрашњости течности, као на слици 2.6.2, течност на квази зидове суда. Супротно, кажемо да течност квази зидове суда када је резултанта усмерена напоље (види слику 2.6.3).



Слика 2.6.2



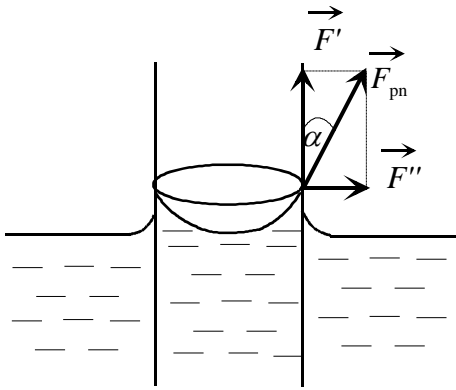
Слика 2.6.3

Угао θ између тангенте на површину течности и површине чврстог тела назива се угао квашења. Када је угао квашења $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, кажемо да течност кваси површину чврстог тела. При томе је за $\theta = 0$ реч о потпуном квашењу.

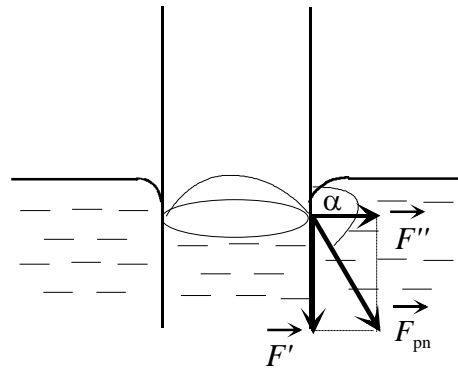
Једна иста течност нека тела кваси док друга не кваси. Тако вода, нпр., кваси стакло а не кваси парафин, док жива не кваси стакло а кваси метале итд.

Ефекат квашења односно неквашења је нарочито изражен код капилара². течност се у њима не понаша према законима спојених судова. Било да течност кваси или не зидове капиларе, њена слободна површина је закривљена. Површина течности се може упоредити са еластичном затегнутом мембраном, која тежи да смањи своју слободну површину. Када је површина испупчена, мембрана врши додатни (позитивни) притисак на унутрашње слојеве течности у односу на притисак када је површина равна (види слике 2.6.4 и 2.6.5). Сила површинског напона \vec{F}_{pn} делује дуж тангенте у тачки додирателности течности и капиларе. Компонента \vec{F}'' не производи директан ефекат на течност, док компонента \vec{F}' производи додатни притисак који подиже ниво течности у случају да течност кваси зидове капиларе (слика 2.6.4), или спушта ниво течности у капилари у случају течности које не квасе зидове капиларе (слика 2.6.5).

² капилара (од латинске речи capillus - длака) је цевчица чији је пречник мањи или једнак 1 mm



Слика 2.6.4



Слика 2.6.5

Сила површинског напона код капиларе делује дуж обима:

$$F' = 2r\pi\gamma, \tag{2.6.2}$$

односно:

$$F_{pn} = F' \cos\alpha, \tag{2.6.3}$$

па додатни притисак износи:

$$p_d = \frac{F'}{S} = \frac{2r\pi\gamma \cos\alpha}{r^2\pi} = \frac{2\gamma}{r} \cos\alpha. \tag{2.6.4}$$

Ниво течности се подиже (спушта) све док не дође до изједначавања притисака p_d и хидростатички притисак:

$$\rho gh = \frac{2\gamma}{r} \cos\alpha. \tag{2.6.5}$$

Из релације (2.6.5) можемо одредити висину до које се течност подиже (спушта):

$$h = \frac{2\gamma}{\rho gr} \cos\alpha. \tag{2.6.6}$$

У случају потпуног квашења $\alpha = 0^\circ$:

$$h = \frac{2\gamma}{\rho gr}, \tag{2.6.7}$$

односно у случају када течност потпуно не кваси зидове капиларе, $\alpha = 180^\circ$:

$$h = -\frac{2\gamma}{\rho gr}. \tag{2.6.8}$$

Овај минус треба схватити управо како је напред објашњено, у једном случају се ниво течности подиже, а у другом се спушта.

Капиларне појаве се често срећу у природи, техници и свакодневном животу. Оне имају врло велики значај у разним процесима. У ширем смислу,

под капиларним појавама се подразумевају све појаве које су узроковане површинским напоном. Порозни материјали, који се састоје од великог броја капилара, услед капиларног ефекта, могу се потпуно наквасити, иако су само једним делом, потопљени у течност. Ово су појаве које се често срећу код дрвета, фитиља, сунђера, порозног грађевинског материјала (што доводи до влаге у зидовима) итд. Капиларни ефекат је посебно битан у пољопривреди. Вода се из дубљих слојева земље, путем капилара, доводи на површину и ту испарава, па се на тај начин "губи" влага. Да би се ово спречило, разним начинима обраде површинског слоја разара се његова капиларност (окопавањем нпр. биљке путем капилара транспортују хранљиви раствор од корена према лишћу).

Технолошки процес одвајања руде од шљаке, познат под именом флотација, заснован је на појави квашења и неквашења. Руда се самеле заједно са јаловином и потопа у течност која кваси руду, а не кваси шљаку. Кроз течност се пропушта ваздух чији се мехурићи групишу на зрнцима јаловине, јер их течност не кваси. На тај начин, зрнца јаловине (шљаке) буду извучена на површину. Зрнца руде, коју течност кваси, падају на дно. Одстрањивањем са површине течности јаловине која плива, остаје на дну пречишћена руда.

Пример: У воду је спуштена, на врло малу дубину, стаклена цевчица унутрашњег пречника 1 mm. Наћи масу воде која ће ући у цевчицу. Квашење је потпуно.

Решење: На воду у калилари делују две силе: сила површинског напона (навише) и сила земљине теже (наниже). Како вода мирује, те две силе су истих интензитета:

$$mg = \gamma \pi d ,$$

Следи:

$$m = \frac{\gamma \pi d}{g} = 0,02 \text{ g} .$$

Пример: У капиларној цевчици полупречника r вода се попела до висине h (слика 2.6.6)? Наћи угао квашења и притисак у цевчици на дубини $\frac{h}{2}$.

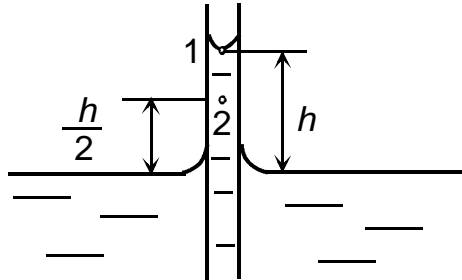
Атмосферски притисак је p_a .

Решење: Из

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho r g} ,$$

следи

$$\cos \theta = \frac{\rho r g h}{2\gamma}.$$



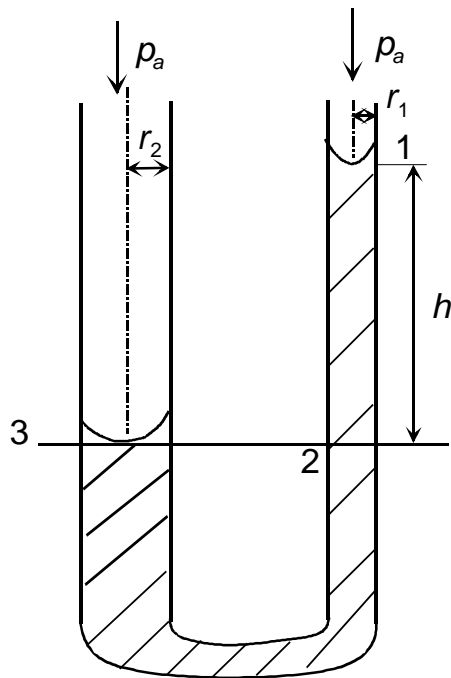
Слика 2.6.6

Притисак на површини воде једнак је атмосферском, па је толики притисак и у цевчици на истом хоризонталном нивоу. Притисак у тачки 2 (слика 2.6.6) је

$$p_2 = p_a - \rho g \frac{h}{2}.$$

Пример: У U - цеви, чији краци имају полупречнике $0,2 \text{ mm}$ и 1 mm , налази се течност густине $800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ (слика 2.6.7). Разлика нивоа течности у крацима цеви 23 mm . Наћи коефицијент површинског напона течности. Квашење је потпуно.

Решење:



Слика 2.6.7

Притисак у тачки 1 у течности је

$$p_1 = p_a - \frac{2\gamma}{r_1}.$$

Притисак у тачки 2 је

$$p_2 = p_1 + \rho gh = p_a - \frac{2\gamma}{r_1} + \rho gh.$$

Притисак у тачки 3 је

$$p_3 = p_a - \frac{2\gamma}{r_2}.$$

Како су тачке 2 и 3 на истом хоризонталном нивоу, притисци у њима су једнаки, па следи

$$p_a - \frac{2\gamma}{r_1} + \rho gh = p_a - \frac{2\gamma}{r_2}.$$

Одавде је

$$\rho gh = 2\gamma \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

тј.

$$\gamma = \frac{\rho g h r_1 r_2}{2(r_2 - r_1)} = 0,02 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

3. Кинематика флуида

Динамика флуида проучава кретање течности и гасова. Проблем кретања флуида знатно је сложенији од проблема кретања чврстог (крутог) тела. Делићи флуида крећу се једни у односу на друге, па је кретање течности праћено променом облика, а кретање гасова и променом запремине.

Један од могућих приступа проучавању кинематике флуида је праћење кретања појединих делића током времена. За сваки делић тада би требало поставити основни закон динамике и решити одговарајућу једначину што је врло гломазно и компликовано: различити делићи се различито крећу, а број делића је огроман (и најсавременији рачунари не би могли да реше толико једначина). Једноставније је посматрати особине флуида у разним тачкама простора. Другим речима, уместо праћења путање сваког делића флуида, може бити утврђена расподела брзина, убрзања и густине (или притиска) у разним тачкама струје флуида у зависности од времена.

Како је кретање флуида у општем случају веома сложен феномен, ми ћемо учинити извесне претпоставке како бисмо проблем поједноставили:

- занемарићемо унутрашње трење у флуиду – **идеални флуид**;
- задржаћемо се на **стационарном струјању** (односно струјању код кога се расподела брзина у разним тачкама струје флуида током времена не мења);
- сматраћемо да су течности **нестисљиве** (тј. имају исту густину у сваком делу простора кроз који теку); при стационарном струјању занемарљиве су и промене густине гаса, па се често у кинематици и гасови сматрају нестисљивим.
- Уз све то, бавићемо се само тзв. **ламинарним** струјањем: то је протицање флуида при којем суседни слојеви клизе један у односу на други. Код оваквог струјања путања сваког делића флуида је глатка линија и не секу се путање разних делића. Ламинарно струјање могуће је при релативно малим брзинама. При великим брзинама струјање је **турбулентно** - карактерише се постојањем низа вртлога у струји флуида. Настајање вртлога је компликован феномен и турбулентно струјање ћемо разматрати у малом обиму у поглављу о унутрашњем трењу у течности.

У механици система материјалних тачака, кинематика представља грану у којој се проучавају геометријски односи при кретању тих тачака. Слично томе се у кинематици флуида проучава геометрија кретања флуидних делића. Посматра се, дакле, промена узајамних положаја флуидних делића и флуида као целине не тражећи узрок, тј. не уводе се у рачун

силе које делују на флуид. Постоји битна разлика међу променама које могу наступити при кретању делића круте материје и флуидних делића јер се флуидни делић не креће само транслаторно, и да притом ротира, као делић круте материје, него може мењати свој положај, облик и своју запремину, укратко, може се *деформисати*. Проучавање деформације делића спада, такође, у област кинематике флуида.

На делиће флуида делују следеће силе: *спољашње* или *површинске силе* од којих за техничке проблеме долази у обзир једино Земљина тежа; *сите притиска* као унутрашње силе настале због разлике притисака у разним тачкама флуидног простора; вискозне силе које су последица деловања унутрашњег трења флуидних делића; еластичне силе које се јављају, углавном, у гасова (због њихове стишљивости) кад се пође од одређеног равнотежног стања под одређеним почетним притиском и *инерцијалне силе*, које се јављају због убрзаног кретања флуидног система.

На сваки реалан флуид делују све ове силе, али је утицај сила на струјање разнолик и зависи од флуида као и од врсте проблема који се проучава. Природно је било да се проблеми упросте, и зато се занемаривао утицај појединих сила. Такав је историјски пут којим је прошла механика флуида. Најпростије струјање добија се занемаривањем вискозних и еластичних сила, односно претпостављањем да је флуид невискозан и нестишљив. Зато ће се почети проучавањем струјања таквог флуида. Иако његова својства знатно одступају од реалног флуида ипак се често постижу решења врло блиска стварности, тако да је овај пут у многим случајевима изванредно користан.

При струјању гасова великим брзинама (реда брзине звука) стишљивост је битан фактор па се тад флуид сматра невискозном али стишљивом средином. За последњих пола века, а у вези с развојем ваздухопловства, ова грана механике флуида знатно је напредовала.

Ако је флуид такав да се његова стишљивост сме занемарити али не и вискозност, онда се флуид обрађује као вискозни и нестишљиви флуид. По својствима је он врло сродан реалној течности, те његово проучавање има велик значај за практичну примену. Својства таквог флуида много су сложенија него својства невискозног флуида, али се ипак и у овој области доста постигло у последње време.

Вискозни стишљиви флуид је најважнији за стварно струјање. Међутим, кретања таквог флуида су толико компликована да је досад само мали број проблема могао да се реши.

Напоменимо на крају да постоје два основна начина за проучавање струјања флуида.

Први начин је дао Лагранж (Giuseppe Lodovico Lagrangia), а састоји се у томе да се сваки делић прати на путу кроз простор, онако како се то ради у механици материјалне тачке.

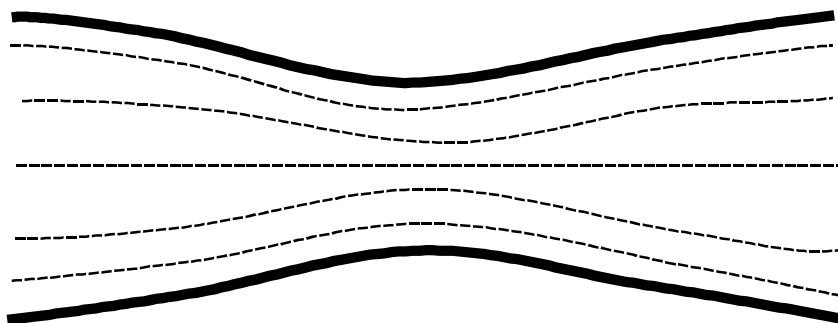
Други начин потиче од Ојлера (Leonard Paul Ojler); по њему се уочи тачка у простору па се у њој одређују брзине, притисци и друге величине. Ако се успе да се за све тачке простора одреде ове величине, и у сваком тренутку, онда ће струјање бити потпуно познато.

Лагранжев начин се често примењује при вршењу огледа, али је за теоријску анализу непогодан изузимајући ограничен број специјалних проблема. Даља анализа ових метода ће се наставити у оквиру механике флуида.

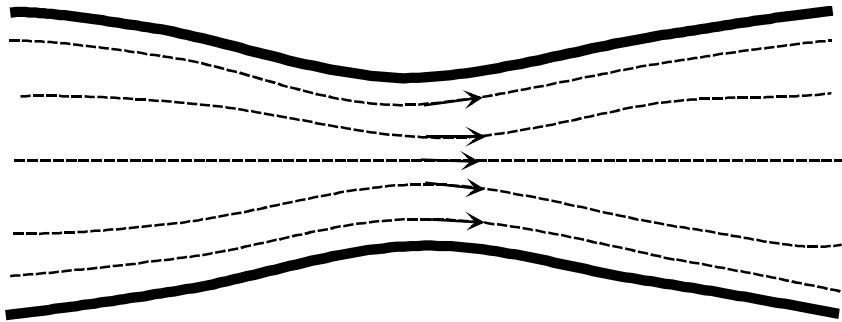
3.1 Карактеристике струјања флуида

Стационарно струјање флуида је такво кретање код кога се брзина у произвољној тачки не мења током времена. То не значи да је брзина иста у свим тачкама простора, већ да сви делићи флуида који пролазе кроз исту тачку у тој тачки имају исту брзину; у разним тачкама струје флуида вредност те брзине не мора бити иста.

Расподела брзина у течности може се експериментално посматрати: у течност се убаца неки обојени прах чија је густина блиска густини течности: делићи праха тада се крећу исто као делићи течности који их окружују и та путања се може посматрати и снимати фотоапаратом. На фотографији снимљеној са дужом експозицијом виде се кратке цртице - то су путање које су прешле честице праха током снимања (слика 3.1.1а). Правац и дужина цртице зависе од брзине делића флуида, па једна оваква фотографија показује расподелу брзина у струји течности. Може се направити серија оваквих фотографија да би се утврдило да ли се и како мења расподела брзина током времена. У случају стационарног струјања све фотографије су исте: расподела брзина је константна.



Слика 3.1.1

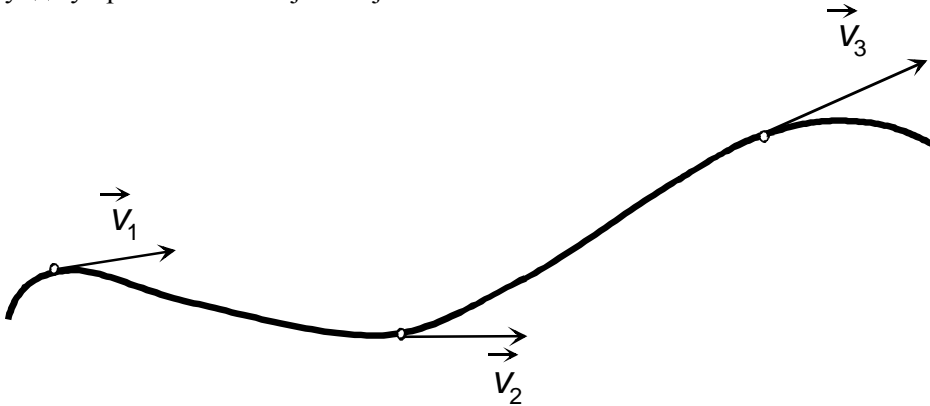


Слика 3.1.2

Повезивањем цртица на снимку добијају се линије; на њих се ставе стрелице у смеру протикања течности (слика 3.1.1 и 3.1.2) и тако се добију струјне **линије** - њима се графички приказује струјање флуида.

Струјна линија је усмерена линија код које тангента у свакој тачки има правац брзине којом делић флуида пролази кроз ту тачку.

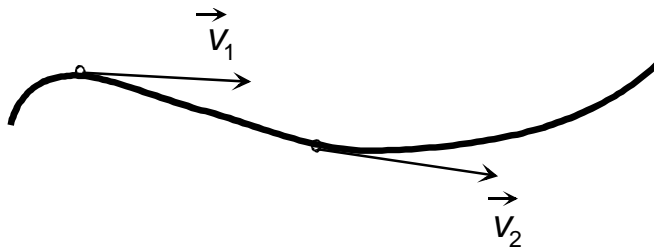
На слици 3.1.3 је приказана једна струјна линија и брзине делића флуида у три тачке на тој линији.



Слика 3.1.3

Из дате дефиниције следи да се струјне линије међусобно не секу (у супротном, брзина флуида у пресечној тачки не би била једнозначна).

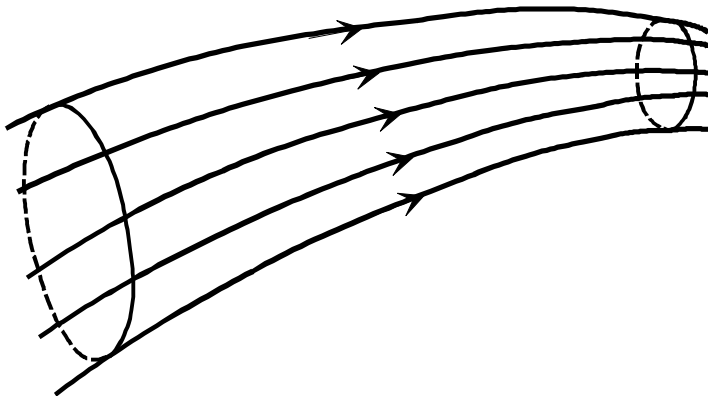
Ако је струјање стационарно, струјна линија представља путању по којој се креће делић флуида.



Слика 3.1.4

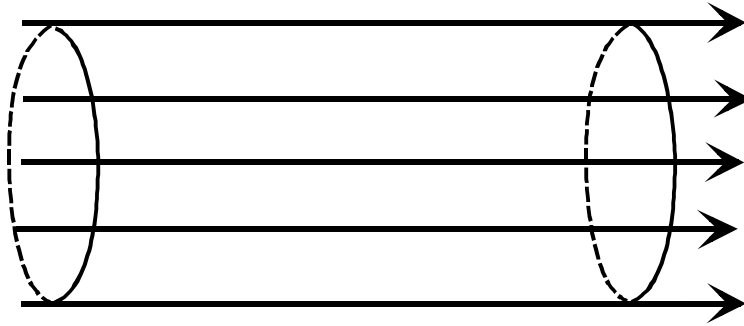
Код нестационарног струјања струјна линија није путања делића флуида: ако је линија на слици 3.1.4 струјна линија која одговара неком тренутку t , онда делић флуида у том тренутку пролази кроз тачку A брзином v_1 , а неки други делић у истом тренутку кроз тачку B пролази брзином v_2 . Пошто се расподела брзина мења, у неком наредном тренутку први делић не мора ни стићи до тачке B , а ако стигне може проћи кроз њу брзином различитом од v_2 - дакле, дата линија није путања првог делића (нити било ког делића флуида).

Више струјних линија чини струјну цев, или сноп струјних линија, довољно узан да се може сматрати да је у свакој тачки попречног пресека иста брзина флуида, зове се струјна цев (слика 3.1.5). Струјна цев је непробојна за делиће флуида, они не могу ни улазити ни излазити кроз зидове цеви: зидове чине струјне линије, а брзине делића флуида су тангентне на њих.



Слика 3.1.5

Најједноставнија је хомогена струјна цев (слика 3.1.6): она има сталан попречни пресек, тј. брзине свих делића у струји флуида су у истом правцу и имају исти интензитет.



Слика 3.1.6

3.2 Проток флуида

Кроз попречни пресек цеви може у јединици времена протећи већа или мања количина флуида. С тим у вези дефинишу се величине које се зову **масени и запремински проток**.

Масени проток је бројно једнак маси флуида који у јединици времена прође кроз попречни пресек (пресек који је нормалан на правац кретања течности) струјне цеви. Дакле, ако у току временског интервала Δt кроз попречни пресек цеви прође флуид масе Δm , масени проток је:

$$q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t}.$$

Очигледно је да је јединица за масени проток $[q_m] = \frac{[\Delta m]}{[\Delta t]} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$.

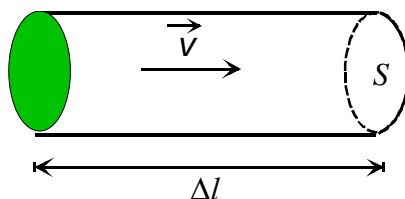
Слично се дефинише запремински проток: Запремински проток бројно је једнак запремини флуида који у јединици времена прође кроз попречни пресек цеви.

$$q_v = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Јединица за запремински проток је $[q_v] = \frac{[\Delta V]}{[\Delta t]} = 1 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$.

Јасно је да је проток флуида већи ако је већа брзина струјања и ако је већи попречни пресек цеви. Формула која повезује ове величине може се извести на следећи начин: посматрајмо неки попречни пресек хомогене струјне цеви (осенчен на слици 3.2.1). Ако је брзина струјања флуида v , за време Δt кроз дати попречни пресек проћи ће флуид који се налази унутар цилиндра дужине $v\Delta t$. Ако је ρ густина флуида, масени проток ће бити:

$$q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = \frac{\rho S v \Delta t}{\Delta t} = \rho S v$$



Слика 3.2.1

Очигледно је да ће, по аналогији са претходним случајем, запремински проток бити

$$q_V = Sv.$$

Ове релације за масени и запремински проток важе и за хомогену и за нехомогену струјну цев.

Пример: Вода струји брзином 1 m/s кроз цев полупречника 2 cm. Колики је запремински проток и колико литара воде прође кроз попречни пресек цеви за 3 min?

Решење: Запремински проток добијамо по дефиницији:

$$q_V = \frac{V}{t} = Sv = 12,56 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

Запремину ћемо лако добити

$$V = q_V t = Svt = 2,26 \text{ m}^3.$$

Пример: Кроз цев полупречника 3 cm вода се улива у базен. Коликом брзином струји вода кроз цев, ако се за пола сата у базен улије 50 m³ воде?

Решење:

$$v = \frac{V}{St} = \frac{V}{r^2 \pi t} = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Пример: Вода истиче из цеви унутрашњег пречника $d = 5 \text{ cm}$ брзином $v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ у правоугаони базен дужине $l = 10 \text{ m}$ ширине $a = 5 \text{ m}$ и дубине $h = 2 \text{ m}$. За које време ће се базен напунити ако је запремински проток константан?

Решење: Из

$$q_V = Sv = \frac{\pi d^2}{4} v,$$

и

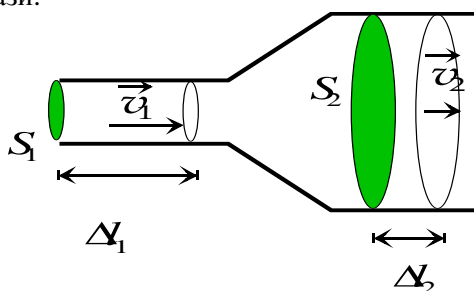
$$q_v = \frac{V}{t} = \frac{lah}{t},$$

следи

$$t = \frac{4lah}{\pi d^2 v} = 7,1 \text{ h}.$$

3.3 Закон континуитета

При стационарном струјању у истим временским интервалима кроз различите попречне пресеке струјне цеви прође иста маса флуида. Ако не би било тако, онда би се повећавала или смањивала маса флуида између два попречна пресека S_1 и S_2 (види слику 3.3.1) - то је немогуће јер кроз зидове струјне цеви флуид не пролази.



Слика 3.3.1

Масени проток флуида кроз било који попречни пресек струјне цеви је исти. Значи:

$$\rho S v = \text{const.}$$

Дакле, последња формула представља тзв. **једначину континуитета** (односно једначину непрекидности). Ако је флуид нестишљив, његова густина је свуда иста, па се једначина континуитета своди на облик:

$$S \cdot v = \text{const.}, \quad (3.3.1)$$

односно

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \quad (3.3.1)$$

или

$$v = \frac{\text{const.}}{S}. \quad (3.3.3)$$

Из ове једначине следи: Брзина струјања флуида већа је у ужем делу струјне цеви, односно тамо где су струјне линије гушће и обрнуто. Познато је то и из

многих примера: Дунав знатно спорије тече кроз Панонску равницу него кроз Ђердапску клисуру; течност истиче из шприца за ињекције много брже него што се гура клип; ветар брже дува кроз уски пролаз између зграда него у широком отвореном простору .

Пример: Вода струји кроз хоризонталну цев променљивог попречног пресека. Брзина воде у ширем делу цеви је 20cm/s. Наћи брзину воде у ужем делу ако је пречник тог дела 1,5 пута мањи од пречника ширег дела цеви.

има капилара у људском телу.

Решење: Брзина се добија из једначине континуитета

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

односно

$$\frac{\pi d_1^2}{4} v_1 = \frac{\pi d_2^2}{4} v_2$$

Следи:

$$v_2 = \frac{d_1^2}{d_2^2} v_1 = 45 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Пример: Површина попречног пресека аорте је 3 cm^2 , а крв кроз њу струји брзином $30 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Кроз капиларе се крв креће брзином $0,5 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$. Сматрајући да

свака капилара има исти попречни пресек $3 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^2$, израчунати колико има капилара у људском телу.

Решење: Проток крви кроз аорту једнак је укупном протоку кроз све капиларе:

$$S_1 v_1 = n S_2 v_2,$$

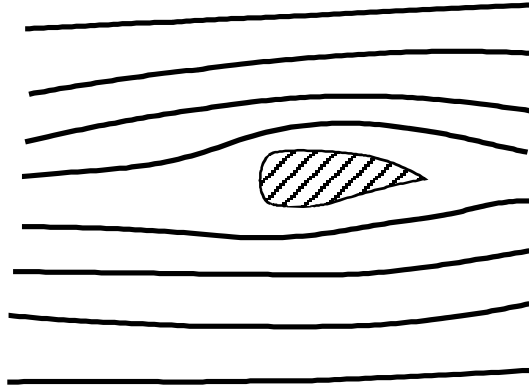
где је n број капилара. Следи:

$$n = 6 \cdot 10^9.$$

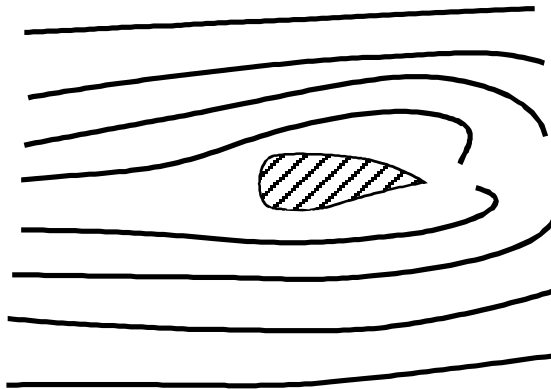
3.4 Ламинарно струјање идеалног флуида

Разликују се два основна типа струјања флуида (имамо у виду да занемарујемо вискозност): **ламинарно** и **турбулентно** струјање. Ако је струјање такво да слојеви флуида клизе један поред другог, онда је то ламинарно кретање. Карактеристично за овакво кретање је да се свака честица флуида креће по глаткој трајекторији, при чему се ове трајекторије не секу (слика 3.4.1). Када брзина флуида пређе одређену границу, која зависи, као што ће се касније видети, од низа параметара, струјање постаје турбулентно. Овакво кретање карактерише појава вртлога (слика 3.4.2), при чему се јавља значајно унутрашње трење које се назива **вискозност**. Вискозност се јавља и код

ламинарног кретања, али је знатно мања него код турбулентног. Ламинарно кретање је лако разликовати од турбулентног ако се у течност која се креће убаце капи неке лако уочљиве боје.



Слика 3.4.1



Слика 3.4.2

За ламинарно и турбулентно струјање постоји неколико важних карактеристика. Прва је да ли се флуид може разматрати као стишљив или као нестишљив материјал. Мада не постоји материјал који би био апсолутно нестишљив, струјање многих течности је такво да је промена густине код њих веома мала. На пример, при повећању притиска од 10^5 до 10^7 Pa, густина воде се повећа за само 0,5%. Гас се такође може сматрати нестишљивим, под условом да је струјање такво да разлика притисака није сувише велика. Када се стишљивост занемари, разматрање појава у флуиду се значајно поједностављује.

Код сваког флуида је присутна вискозност, чија вредност зависи од врсте флуида. Флуиди код којих се могу занемарити вискозност и стишљивост називају се **идеални флуиди**.

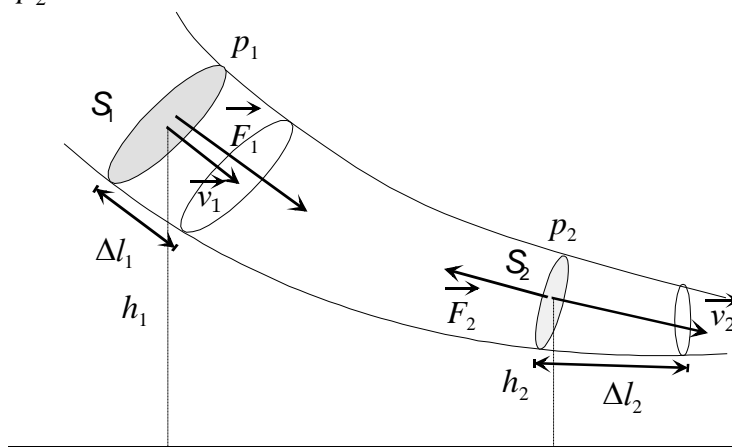
Струјање флуида може бити **стационарно** и **променљиво**. Код стационарног струјања брзина струјања флуида у било којој тачки простора је константна у току времена, али то не значи да је она иста у свим тачкама простора. Ако се брзина струјања у датој тачки простора мења у току времена, струјање је променљиво.

4. Динамика флуида

4.1 Бернулијева једначина

Код идеалне течности механичка енергија се не трансформише у друге облике енергије него остаје константна, тј. одржава се. Закон одржања енергије код идеалне течности за стационарно стање представља Бернулијева (Bernoulli Daniel, швајцарски математичар и физичар) једначина. Она чини основу заједно са једначином континуитета целокупне хидродинамике флуида, па је због тога неопходно да је детаљније размотримо.

Нека се струјна цев идеалне течности сужава у правцу тока (види слику 4.1.1). Уочимо два попречна пресека S_1 и S_2 . Течност ће се у ужем делу цеви, кроз пресек S_1 , кретати са већом брзином, тј. кретаће се убрзано. Ово убрзање је изазвано деловањем неке силе која потиче од течности из ширег дела струјне цеви. Очигледно је да се та сила може јавити само услед разлике притисака у различитим деловима течности. Ови притисци су за одговарајуће попречне пресеке p_1 и p_2 .



Слика 4.1.1

Издвојићемо из тока неку масу течности Δm , која протекне кроз пресек S_1 , за неко време Δt . За исто време, иста маса течности ће протећи и кроз пресек S_2 . Нека су h_1 и h_2 висине на којима се налазе пресеци S_1 и S_2 . Укупну енергију течности масе m , у тим пресецима, обележимо са E_1 и E_2 . Према закону одржања, промена енергије је једнака раду спољашњих сила које померају течност масе m , тј. :

$$\Delta E = E_2 - E_1 = A. \quad (4.1.1)$$

Укупна механичка енергија у пресеку S_1 је:

$$E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1, \quad (4.1.2)$$

а у пресеку S_2 износи:

$$E_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2. \quad (4.1.3)$$

Рад спољашњих сила је једнак раду силе притиска:

$$A = (p_1 - p_2)V, \quad (4.1.4)$$

где је V запремина делића течности масе m .

Заменом ових вредности за механичку енергију и рад спољашњих сила у релацију (4.1.1) добијамо:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 + p_1V = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 + p_2V. \quad (4.1.5)$$

Делењем леве и десне стране једначине (4.1.5) са запремином и имајући у виду дефиницију густине $\rho = \frac{m}{V}$, добијамо:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2 + p_2. \quad (4.1.6)$$

Очигледно да ова једнакост важи за било који пресек цеви, па можемо писати:

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + p = const} \quad (4.1.7)$$

Ово је Бернулијева једначина. Сва три члана на левој страни имају димензије притиска, значи можемо рећи:

Збир динамичког (хидродинамичког), висинског (хидростатичког) и статичког притиска при стационарном протицању идеалног флуида дуж струјне цеви остаје сталан.

Пример: Струјном цеви протиче вода (густине 1000 kg/m^3). На једном попречном пресеку, чији центар се налази на висини 2m изнад хоризонта, брзина протицања је 2 m/s , а притисак који на њему влада $1,4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Колика је брзина протицања течности на другом попречном пресеку који се налази на висини 1m изнад хоризонта а на коме влада притисак $1,2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$? За убрзање силе Земљине теже узети 10 m/s^2 .

Решење: Бернулијева једначина за ма која два пресека има облик:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2 + p_2$$

одакле је:

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1 - \rho g h_2 - p_2$$

односно

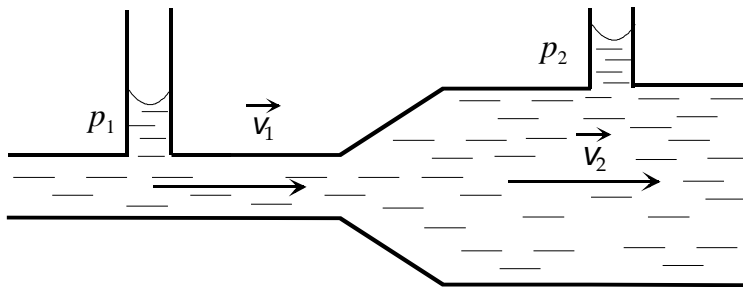
$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2g(h_1 - h_2) + \frac{2}{\rho}(p_1 - p_2)} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

4.2 Примена Бернулијеве једначине

Бернулијева једначина, иако је изведена за идеалне флуиде, може се применити на реалне флуиде код којих стишљивост и унутрашње трење нису велики. Тако се њеном применом на хоризонталну цев ($h_1 = h_2$) добија:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 \quad (4.2.1)$$

Из ове једначине и једначине континуитета лако се види да је у хоризонталној цеви са различитим попречним пресецима, брзина већа на сужењима. Такође произлази закључак да је притисак течности већи на ширим местима. Ово се може демонстрирати преко нивоа течности у манометарским цевчицама, постављеним на разним местима хоризонталне цеви (види слику 4.2.1).



Слика 4.2.1

Услед смањеног притиска на суженим деловима цеви струја флуида испољава унисно дејство. Овај ефекат се користи код многих уређаја, као што су , на пример, разни распршивачи, водени шмрк итд.

Пример: Нафта густине $800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ протиче кроз хоризонталну цев различитог попречног пресека. На ужем делу цеви чија је површина дупло мања, а на коме влада три пута мањи статички притисак него на ширем, брзина протицања је за $14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ већа. Колики је статички притисак на ужем делу?

Решење: Пошто је цев хоризонтална, Бернулијева једначина се упрошћава и постаје:

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + 3p_1,$$

одакле следи:

$$p_1 = \frac{1}{4} \rho (v_1^2 - v_2^2). \quad (4.2.2)$$

За протицање важи још и једначина континуитета:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

Ако у њу унесемо услове задатка, добићемо:

$$S_1 (v_2 + \Delta v) = 2S_1 v_2,$$

добијамо даље

$$v_2 + \Delta v = 2v_2,$$

односно

$$v_2 = \Delta v,$$

и

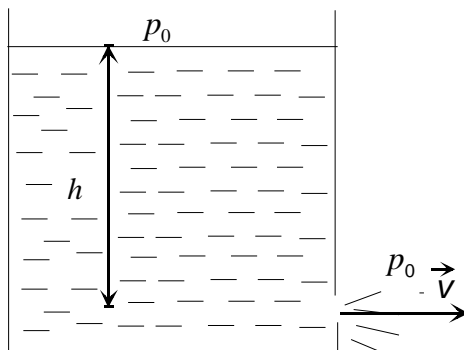
$$v_1 = 2\Delta v.$$

Коначно, уврштавајући добијене вредности за брзине у релацију (4.2.2), надазимо да је:

$$p_1 = \frac{1}{4} \rho (4\Delta v^2 - \Delta v^2) = \frac{3}{4} \rho \Delta v^2 = 1,176 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

4.3 Торичелијева теорема

Наведимо још неколико примера где се примењује Бернулијева једначина - Торичелијева (Toricelli Evangelista, италијански физичар и математичар) теорема.



Слика 4.3.1

Помоћу Бернулијеве једначине можемо одредити брзину истицања течности из суда. На дубини h , испод нивоа течности у суду (види слику 4.3.1), налази се отвор кроз који истиче течност брзином v . Брзина спуштања нивоа течности у суду је занемарљиво мала у односу на брзину истицања кроз отвор, па се уз занемарљиву грешку може узети да је једнака нули. Применом Бернулијеве једначине се добија:

$$p_0 + \rho gh = p_0 + \frac{1}{2} \rho v^2, \quad (4.3.1)$$

односно једноставно добијамо:

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (4.3.2)$$

Ово је позната Торичелијева теорема која гласи: Брзина истицања течности из широког суда је једнака брзини коју добија тело кад слободно пада са исте висине.

Код реалних течности пресек млаза је увек мањи од пресека отвора, због његове контракције. Однос пресека млаза S_m и отвора S дат је изразом:

$$S_m = kS, \quad (4.3.3)$$

где је k коефицијент контракције млаза. На овај начин се за проток флуида може написати:

$$q_V = S_m \cdot v = kS\sqrt{2gh}. \quad (4.3.4)$$

Коефицијент контракције k највише зависи од вискозности флуида и облика отвора.

Пример: Пушчано танае пробије дно чамца, где почне да улази вода. Којом брзином утиче вода ако је дно чамца на 60 cm испод површине воде?

Решење: Према Торичелијевој теорему је:

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Одавде је:

$$v = 3,43 \frac{m}{s}.$$

Пример: На којој дубини треба да се налази мали отвор у посуди напуњеној течношћу да би на њему брзина истицања била дупло већа него кроз отвор који се налази на $0,5 \text{ m}$ испод површине течности?

Решење: Брзине истицања течности на овим отворима износе:

$$v_1 = \sqrt{2gh_1},$$

$$v_2 = \sqrt{2gh_2}.$$

Дељењем добијамо

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}},$$

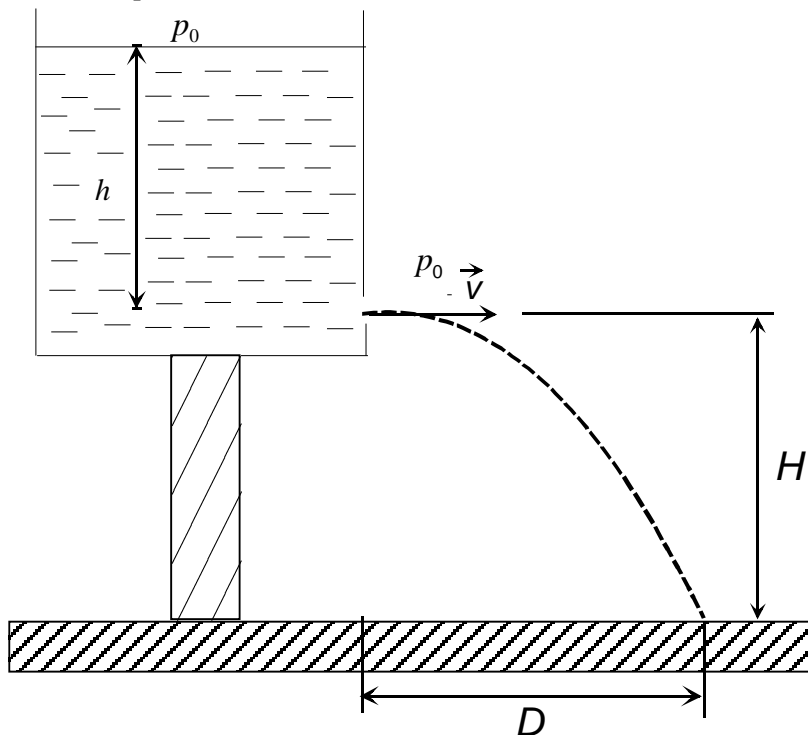
односно

$$\frac{2v_1}{v_1} = \frac{\sqrt{h_2}}{\sqrt{h_1}},$$

и на крају

$$h_2 = 4h_1 = 2 \text{ m.}$$

Пример: У резервоару с водом налази се мали отвор на 1,2 m испод слободне површине. На ком растојању ће млаз погодити хоризонталну раван која је 4,8 m испод отвора?



Слика 4.3.2

Решење: Сваки делић млаза (слика 4.3.2) изводи хоризонталан хитац. Тражено растојање D износи:

$$D = vt,$$

где је t време падања капљице. Време рачунамо из:

$$H = \frac{1}{2} g t^2,$$

одакле је:

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}},$$

и

$$D = v \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Пошто је:

$$v = \sqrt{2gh},$$

биће:

$$D = \sqrt{2gh} \sqrt{\frac{2H}{g}} = 2\sqrt{hH} = 4,8 \text{ m}.$$

4.4 Вентуријева цев

Ова цев служи за одређивање брзине протока флуида. Брзина флуида v_2 је знатно већа на пресеку S_2 од брзине v_1 на пресеку S_1 (види слику 4.4.1). Применом Бернулијеве једначине дуж струјне линије која пролази кроз осу цеви ће бити:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2, \quad (4.4.1)$$

одакле добијамо да је разлика статичких притисака:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2). \quad (4.4.2)$$

Имајући у виду једначину континуитета (релација 3.3.2) добијамо:

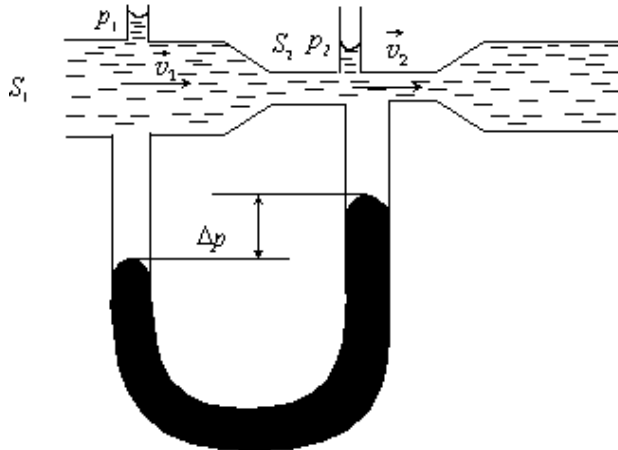
$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right). \quad (4.4.3)$$

Одавде можемо добити релацију за брзину флуида на пресеку S_1 :

$$v_1 = k \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}, \quad (4.4.4)$$

где је константа k дата изразом:

$$k = \sqrt{\frac{2}{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1}}. \quad (4.4.5)$$



Слика 4.4.1

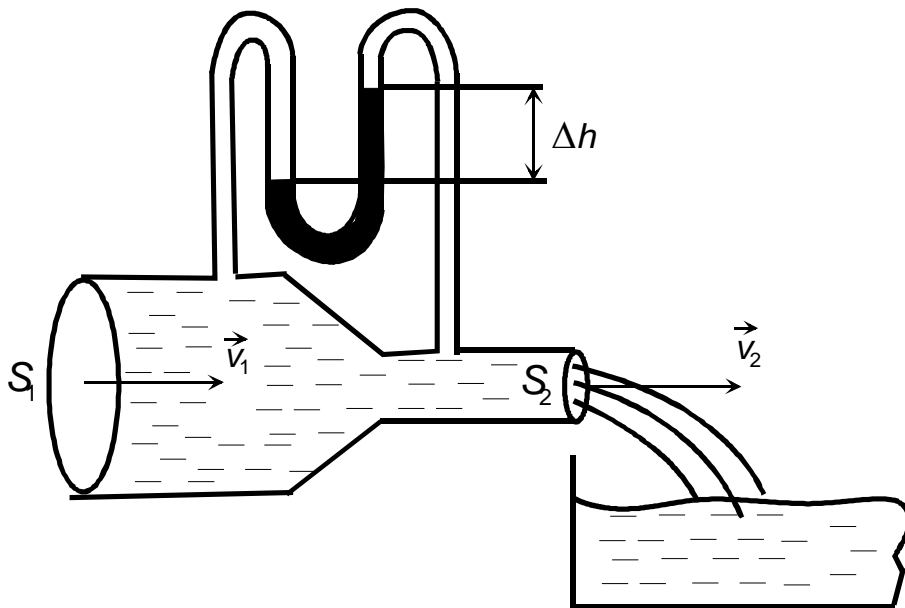
Када смо одредили брзину флуида можемо одредити и проток флуида:

$$Q = S_1 \cdot v_1 = S_1 \cdot k \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}} \quad (4.4.6)$$

Вредност за Δp се читава на манометру, или се читава висинска разлика а затим израчуна притисак:

$$\Delta p = \rho g \Delta h \quad (4.4.7)$$

Пример: Из хоризонталне цеви приказане на слици 4.4.2 (Вентуријева цев) после 10 min истекне 600 kg воде. Површина попречног пресека излазног дела цеви мања је 3 пута од површине попречног пресека њеног ширег дела. Колика је површина попречног пресека ужег дела цеви ако се зна да је у U -цеви жива, а висинска разлика њених нивоа 10 cm? Густина воде је $\rho_1 = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, а живе $\rho_2 = 13600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.



Слика 4.4.2

Решење За прогицање воде краз цев важе једначина континуитета и Бернулијева једначина:

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2,$$

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2.$$

Пошто је цев хоризонтална, чланови који одговарају хидростатичким притисцима поништавају се, тако да Бернулијева једначина постаје (ρ_1 густина воде):

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho_1 v_2^2,$$

одакле је:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho_1 v_2^2 - \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2.$$

Како је:

$$v_1 = \frac{S_2}{S_1} \cdot v_2,$$

следи

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho_1 v_2^2 - \frac{1}{2} \rho_1 \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 v_2^2,$$

односно

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho_1 v_2^2 \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right].$$

С друге стране, можемо писати (ρ_2 густина живе):

$$p_1 - p_2 = \rho_2 g \Delta h - \rho_1 g \Delta h$$

Изједначавајући десне стране у последње две једначине, добијамо:

$$(\rho_2 - \rho_1) g \Delta h = \frac{1}{2} \rho_1 v_2^2 \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right],$$

за брзину v_2 добијамо:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(\rho_2 - \rho_1) g \Delta h}{\rho_1 \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right]}}.$$

С друге стране, истекла маса воде је:

$$m = \rho_1 S_2 v_2 t,$$

одакле је:

$$v_2 = \frac{m}{\rho_1 S_2 t}.$$

Кад се то унесе у горњу једначину, и има увиду да је $S_2 = \frac{1}{3} S_1$, дабија се

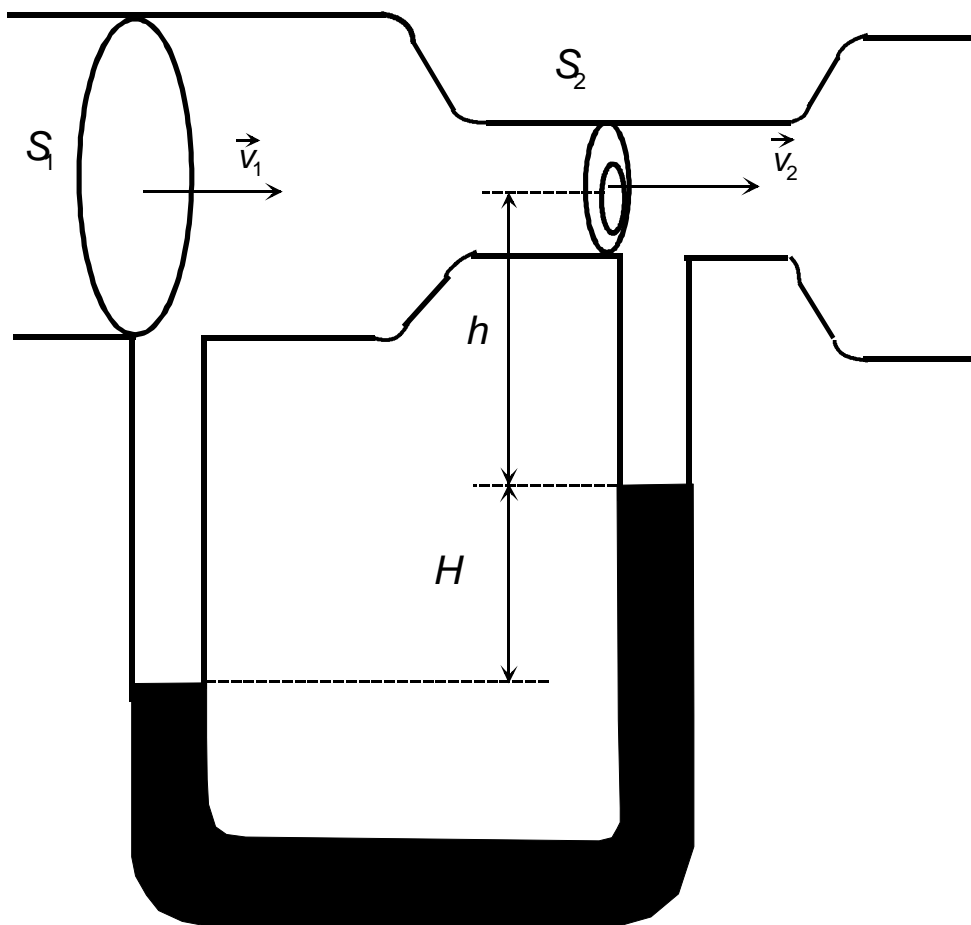
$$\frac{m^2}{\rho_1^2 S_2^2 t^2} = \frac{2(\rho_2 - \rho_1) g \Delta h}{\rho_1 \left[1 - \frac{1}{9} \right]},$$

односно, после уношења бројних вредности добија се:

$$S_2 = \frac{2m}{3\rho_1 t} \sqrt{\frac{\rho_1}{(\rho_2 - \rho_1) g \Delta h}} = 19 \text{ cm}^2.$$

Пример: За мерење брзине и протока флуида у цевоводима користи се уређај приказан на слици. Одредити брзину и проток флуида (густине ρ_n) у цевоводу ако је пречник ужег дела цеви (d_2) два пута мањи од пречника (d_1) ширег дела цеви. Манометар, притом, са течномшћу густине ρ_0 , показује висинску разлику H . Специјални случај: кроз цевовод протиче нафта густине

$\rho_n = 800 \frac{kg}{m^3}$, течност у манометру је жива густине $\rho_0 13600 \frac{kg}{m^3}$, а $H = 4cm$ при $d_1 = 0,8m$.



Слика 4.4.3

Решење: Применом Бернулијеве једначине на шири и ужи део цеви добија се:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho_n v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho_n v_2^2,$$

одакле је:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho_n v_2^2 - \frac{1}{2} \rho_n v_1^2,$$

односно

$$2\Delta p = \rho_n (v_2^2 - v_1^2).$$

Једначина конуинуитета за шири и ужи део $S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$, па је:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho_n \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right)}}.$$

Из услова једнакости притисака у манометру:

$$p_1 + (h + H)\rho_n g = h\rho_n g + H\rho_0 g + p_2,$$

следи:

$$\Delta p = (\rho_0 - \rho_n)gH,$$

па је, према томе

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(\rho_0 - \rho_n)gH}{\rho_n \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right)}}.$$

Због $\frac{d_1}{d_2} = 2$ и $\frac{S_1^2}{S_2^2} = 4$ добија се:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(\rho_0 - \rho_n)gH}{3\rho_n}} = \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{\rho_0}{\rho_n} - 1 \right) gH},$$

и

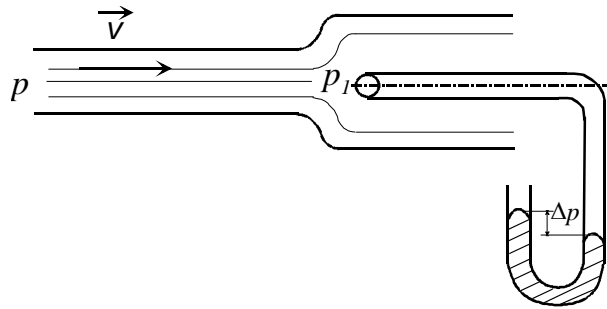
$$Q = \frac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{\rho_0}{\rho_n} - 1 \right) gH}.$$

У специјалном случају је:

$$v_1 = 2,05 \frac{\text{m}}{\text{s}}; \quad Q = 1,03 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

4.5 Питоова цев

Питоова цев се користи за мерење укупног притиска (статичког и динамичког).



Слика 4.5.1

На отвору цеви (види слику 4.5.1), брзина флуида је $v_1 = 0$, а притисак p_1 је већи од p . Разлика притисака $\Delta p = p_1 - p_0$ одређује се манометром. Применом Бернулијеве једначине добија се:

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_1. \quad (4.5.1)$$

Разлика притисака коју показује манометар износи:

$$\Delta p = p_1 - p_0, \quad (4.5.2)$$

и одатле следи:

$$p_1 = \Delta p + p_0. \quad (4.5.3)$$

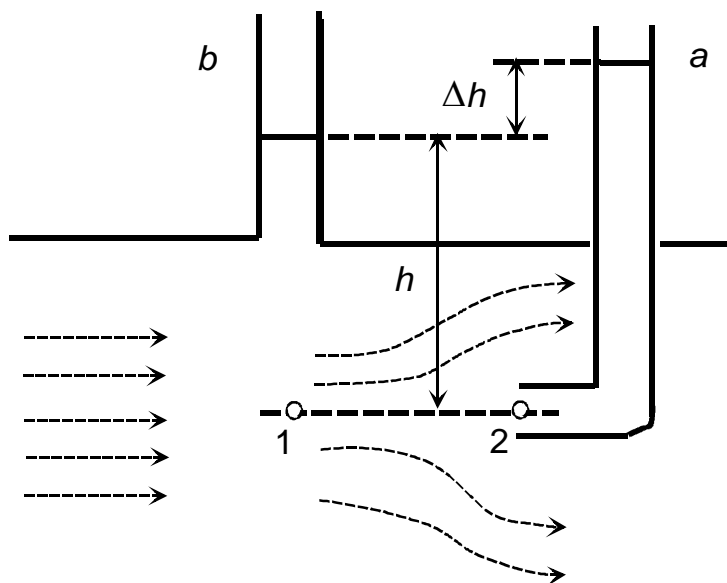
Мерењем притисака Δp и p_0 (атмосферски притисак), из релације (4.5.3) израчунавамо притисак p_1 .

Пример: Помоћу цеви приказане на слици 4.5.2 (део *a* - Питоова цев) мери се, на основу висине стуба течности у њој, укупан притисак у струји течности. Статички притисак се мери помоћу цеви приказане на слици 4.5.2 - *b*. Одредити брзину протицања флуида густине ρ . На пример, керозин има густину $\rho = 820 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $p_1 = 266 \text{ Pa}$, $p_2 = 13,3 \text{ kPa}$.

Решење: У струји течности Питоова цев се напуни течношћу до равнотежног положаја у којем је висина нивоа у вертикалном краку $h + \Delta h$. Испред уроњеног крака се, наиме, налази тачка застоја (2) у којој је брзина струјања $v_2 = 0$, па је укупан притисак у тој тачки:

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2,$$

тј. већи од статичког притиска у тачки (1) где се течност креће брзином v_1 . Брзина протицања течности отуда је:



Слика 4.5.2

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}},$$

па је, на основу задатих вредности за p_1 , p_2 и ρ , брзина керозина:

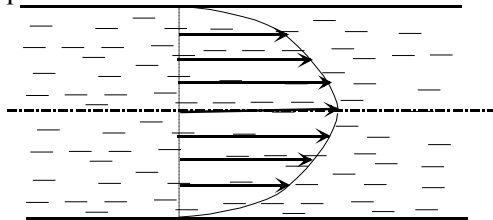
$$v_1 = 5,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

5. Вискозност

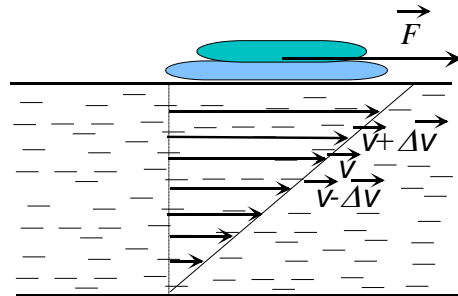
5.1 Увод

Унутрашње трење или вискозност се јавља код реалних флуида као последица међумолекулског дејства. Сви делови течности се не крећу истом брзином по попречном пресеку струјне цеви. Највећу брзину имају дуж осе цеви а најмању уз зидове цеви.

Течност се кроз цев креће у слојевима који клизе један по другоме различитим брзинама. На слици 5.1.1 су приказане брзине „слојева”у струјној цеви, а на слици 5.1.2 у случају кретања неког пловног објекта по површини реке.



Слика 5.1.1



Слика 5.1.2

При протицању течности појављују се силе које се супротстављају кретању једних слојева течности у односу на друге. То су силе унутрашњег трења, односно силе вискозности или вискозне силе.

5.2 Њутнов закон

Уколико је протицање течности ламинарно (уколико слојеви течности клизе један по другом, тј. течност из једног слоја не прелази у други слој, и ако брзине не прелазе неку критичну вредност карактеристичну за сваку течност) отпор протицању течности зависи само од сила вискозног трења.

Од чега зависи интензитет силе вискозног трења најбоље се може закључити ако се посматра плоча од неког материјала, која се креће равномерно дејством неке спољашње силе. Установљено је да ова сила зависи од природе течности (нпр. вода и уље), затим да је директно сразмерна брзини првог слоја уз плочу, односно брзини саме плоче због природе адхезионих сила (нема клизања између чврстог тела и течности), површини плоче и растојању од плоче до дна суда (или растојању између плоча) што се може математички изразити на следећи начин:

$$F_v = \eta \cdot S \frac{\Delta v}{\Delta z} \quad (5.2.1)$$

Једначина (5.2.1) представља Њутнов закон. У тој релацији η представља коефицијент вискозности, који је карактеристика сваке течности. Из те релације можемо утврдити јединицу за динамичку вискозност:

$$\eta = \frac{F_v \cdot \Delta z}{S \cdot \Delta v} \quad (5.2.2)$$

одакле се лако добија да је јединица за коефицијент вискозности :

$$[\eta] = \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \quad (5.2.3)$$

За димензију динамичке вискозности добијамо:

$$\dim \eta = \text{L}^{-1} \text{MT}^{-1} \quad (5.2.4)$$

Пример: По равној подлози вуче се плоча, површине $S = 0,2\text{m}^2$, сталном брзином $v = 0,5\text{m/s}$. Између подлоге и плоче налази се слој уља, дебљине $d = 2\text{mm}$, чија је динамичка вискозност $\eta = 0,102\text{Pas}$. Коликом тангенцијалном силом се делује на плочу? Да ли ће ова сила да буде већа или мања када се уље загреје?

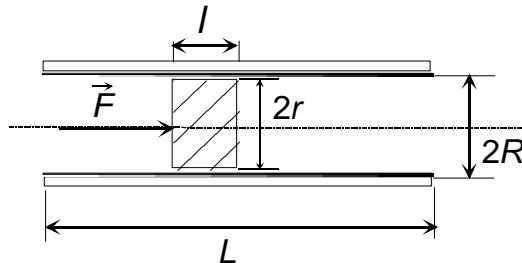
Решење:

$F = \eta S \frac{v}{d} = 5,1\text{N}$. Пошто динамичка вискозност η опада са порастом температуре, то се интензитет силе F смањује при загревању уља.

Пример: У дугој цеви (види слику 5.2.1), унутрашњег полупречника $R = 1\text{cm}$, налази се чеп дужине $l = 4\text{cm}$ и полупречника $r = 0,8\text{cm}$. Између чепа и цеви налази се слој глицерина динамичке вискозности $\eta = 0,85\text{Pas}$.

а) Ако се на чеп делује силом интензитета $F = 2,5\text{N}$, коликом брзином ће се он кретати?

б) Колико времена ће трајати кретање чепа по цеви дужине $L = 2\text{m}$?



Слика 5.2.1

Решење: Да би се чеп кретао равномерно (сталном брзином), потребно је на њега деловати силом F , чији је интензитет једнак интензитету силе унутрашњег трења, одређеног Њутновим законом трења у течности ($F = \eta S \frac{v}{d}$). Наиме, из услова $F = F_r$, налази се да је:

$$v = \frac{Fd}{\eta S} = \frac{F(R-r)}{2\pi l \eta} = 2,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

б) Време кретања чепа дуж цеви је:

$$t = \frac{L}{v} = 0,68 \text{ s}$$

5.3 Кретање тела кроз флуид. Стоксов закон

Под отпором флуида или вискозне средине подразумева се отпор који тај флуид пружа кретању неког тела кроз њега. Отпор флуида је само посебан случај трења у флуиду. Он има врло велики значај у техници, а нарочито при кретању авиона, аутомобила, брода, ракете итд.

Када се тело креће кроз флуид неком брзином, рецимо v , која није сувише велика, јавља се сила отпора \vec{F} , сразмерна брзини кретања:

$$\vec{F} = -k\vec{v}, \quad (5.3.1)$$

где је k константа сразмерности, а знак "-" означава да је сила супротног смера од смера брзине.

Стокс је експериментално утврдио да је коефицијет сразмерности за сферно тело, које се креће кроз вискозну средину:

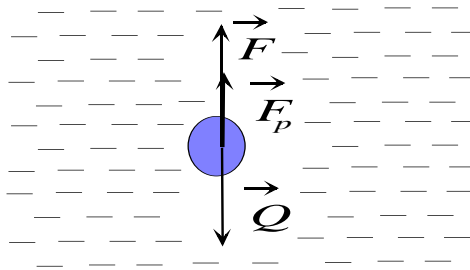
$$k = 6\pi\eta r, \quad (5.3.2)$$

где је r полупречник сферног тела. У том случају вискозна сила, која делује на сферно тело има интензитет:

$$F = 6\pi\eta r v. \quad (5.3.3)$$

Ова релација представља Стоксов (George Gabriel Stokes) закон, који изражава линеарну зависност силе отпора флуида од његове вискозности, полупречника сферног тела које се креће кроз флуид и релативне брзине кретања тела, у односу на флуид.

Коришћењем Стоксовог закона можемо одредити динамичку вискозност η .



Слика 5.3.1

На куглицу која слободно пада кроз течност делују три силе (види слику 5.3.1): сила отпора средине \vec{F} , сила потиска \vec{F}_p и сила Земљине теже \vec{Q} . Једначина кретања куглице има облик:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_p + \vec{Q}, \quad (5.3.4)$$

односно, у скаларном облику:

$$ma = Q - F - F_p. \quad (5.3.5)$$

Интензитет вискозне силе се повећава (због зависности од брзине) све док не дође до једнакости силе земљине теже са вискозном силом и силом потиска. Даље ће се куглица кретати равномерно:

$$0 = Q - F - F_p, \quad (5.3.6)$$

односно:

$$F = Q - F_p. \quad (5.3.7)$$

Силу Земљине теже можемо записати у облику:

$$Q = m_t g = \rho_t V g = \frac{4}{3} \rho_t r^3 \pi g, \quad (5.3.8)$$

где је ρ_t густина тела. Силу потиска ћемо изразити на следећи начин:

$$F_p = m_\phi g = \rho_\phi V g = \frac{4}{3} \rho_\phi r^3 \pi g, \quad (5.3.9)$$

где је ρ_ϕ густина флуида. Напоменимо да по Архимедовом закону узимамо запремину потопљеног дела куглице, у овом случају целу запремину.

Замењујући добијене изразе за вискозну силу, силу Земљине теже и силу потиска у релацију (5.3.7), добијамо:

$$6\pi\eta r v = \frac{4}{3} r^3 \pi (\rho_t - \rho_\phi) g. \quad (5.3.10)$$

Потражићемо израз за коефицијент вискозности:

$$\eta = \frac{2}{9} \frac{r^2 (\rho_t - \rho_\phi) g}{v}. \quad (5.3.11)$$

Мерењем полупречника куглице, густине тела и флуида и брзине кретања куглице, можемо одредити коефицијент вискозности. Из релације (5.3.11) запажамо да је брзина падања сферног тела сразмерна квадрату његовог полупречника. Због тога мале капи споро падају и то је искористио Миликен у свом експерименту за одређивање најмање количине електрицитета. Тако се такође могу објаснити дуго задржавање облака у атмосфери иако водене капи имају густину скоро хиљаду пута већу од ваздуха. Ако бисмо уврстили бројне вредности у релацију (5.3.11): густина ваздуха $\rho_f = 1,29 \text{ kg/m}^3$, густина тела $\rho_t = 1000 \text{ kg/m}^3$, динамичка вискозност за ваздух на 0°C $\eta = 171 \cdot 10^{-7} \text{ Ns/m}$ и полупречник капљице 10^{-6} m , добијамо за брзину капљице $v = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$, или 11 метара на дан.

Пример: Ако је динамичка вискозност ваздуха $\eta = 13,4 \mu\text{Pas}$, израчунати пречник кишне капи која пада сталном брзином $v = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Решење Пошто је убрзање капљице $a = 0$, то значи да су у равнотежи све силе које на њу делују: сила теже и отпорна (Стоксова) сила, чији су интензитети mg и $6\pi\eta rv$, па је

$$mg = 6\pi\eta rv.$$

Како је маса капљице $m\rho V = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$, према претходној релацији њен је полупречник

$$r = 3\sqrt{\frac{\eta v}{2\rho g}} = 55,4 \mu\text{m},$$

односно, пречник је

$$d = 0,11 \mu\text{m}.$$

Пример: Дрвена лоптица спонтано испливава ка слободној површини воде сталном брзином $v = 0,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Вискозност воде је $\eta = 0,8 \text{ mPas}$, густина воде

$\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, а густина дрвета $\rho_1 = 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Колики је полупречник лоптице?

Решење: Пошто се лоптица креће равномерно, то су у равнотежи све силе које на њу делују: сила теже, Стоксова и Архимедова сила:

$$\rho_1 g V + 6\pi\eta rv = \rho g V,$$

где је $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ запремина лоптице, ρ густина воде, па је на основу претходне релације, полупречник лоптице:

$$r = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2\eta v}{g(\rho - \rho_1)}} = 0,12 \text{ cm}.$$

Пример: У суд са глицерином, вискозности $\eta = 0,83 \text{ Pas}$, пусте се истовремено две металне куглице, пречника $d_1 = 1 \text{ mm}$ и $d_2 = 2 \text{ mm}$, које падају сталним брзинама. Куглице су начињене од истог метала, густине $\rho = 6000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, док је густина глицерина $\rho_0 = 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

а) Која куглица ће прва пасти на дно суда?

б) После колико времена ће пасти и друга куглица? Висина напуњеног дела суда глицерином је $h = 40 \text{ cm}$.

Решење:

а) Куглица се креће сталном брзином надоле, што значи да је уравнотежена сила теже са Соксовом и Архимедовом силом, па је

$$\rho g V + 6\pi\eta r v = \rho_0 g V.$$

Запремина куглице је $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, где је $r = \frac{d}{2}$, па су према претходној релацији брзине падања куглица:

$$v_1 = \frac{2}{9} \frac{r_1^2 g}{\eta} (\rho - \rho_0),$$

односно

$$v_2 = \frac{2}{9} \frac{r_2^2 g}{\eta} (\rho - \rho_0).$$

Може се написати

$$v_1 = C r_1^2; \quad v_2 = C r_2^2,$$

где је

$$C = \frac{2}{9} \frac{g}{\eta} (\rho - \rho_0).$$

Време падања прве куглице ће бити

$$t_1 = \frac{h}{v_1} = \frac{h}{C r_1^2},$$

и друге

$$t_2 = \frac{h}{v_2} = \frac{h}{Cr_2^2}.$$

Пошто је $r_1 < r_2$ следи $t_1 > t_2$, што значи да ће већа куглица пасти прва на дно суда.

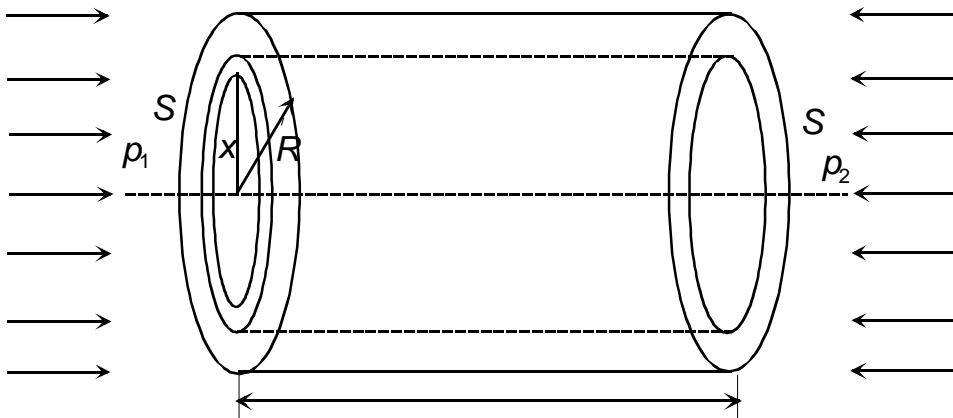
б) После времена

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{h}{C} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) = \frac{4h}{C} \left(\frac{1}{d_1^2} - \frac{1}{d_2^2} \right) = 80,8 \text{ s}$$

ће пасти мања куглица.

5.4 Поазејев закон

Релација (5.2.1) представља општи облик Њутоновог закона вискозности, који се може применити на разне случајеве. Приказаћемо овде само један карактеристичан случај примене овог закона за течност која се креће у хоризонталној цеви кружног пресека, види слику 5.4.1.



Слика 5.4.1

Да би се течност кретала кроз цев стационарним кретањем, мора да постоји сила која савлађује унутрашње трење. Цев је хоризонтална, те гравитација не утиче на кретање течности. У таквом случају кретање се може вршити само ако постоји разлика притисака на крајевима цеви. Нека на крајевима цеви владају притисци p_1 и p_2 тако да је $p_1 > p_2$. Разумљиво је да се течност креће, од већег притиска ка мањем. У оваквој цеви слојеви течности су концентрични цилиндри. Дебљину слојева ћемо мерити од осе цеви. Према томе, за цилиндричну површину полупречника x површина слоја

S ће бити $2x\pi l$, где је l дужина цеви. Тако је сила трења F , према Њутоновом закону (5.2.1) дата изразом у диференцијалном облику:

$$F = \eta 2x\pi l \frac{dv}{dx}. \quad (5.4.1)$$

Силу F савлађује сила притиска F_p , која покреће течност у цилиндру полупречника x . Ова сила ће бити

$$F_p = x^2 \pi (p_1 - p_2). \quad (5.4.2)$$

Како ове две силе стоји у равнотежи, можемо их изједначити, па добијамо:

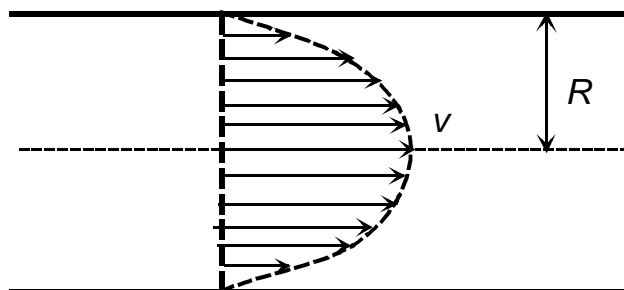
$$x^2 \pi (p_1 - p_2) + \eta 2\pi x l \frac{dv}{dx} = 0, \quad (5.4.3)$$

одакле је:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} x. \quad (5.4.4)$$

Интеграцијом ове једначине, а с обзиром да је за $x = R$ брзина $v = 0$, добија се:

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - x^2). \quad (5.4.5)$$

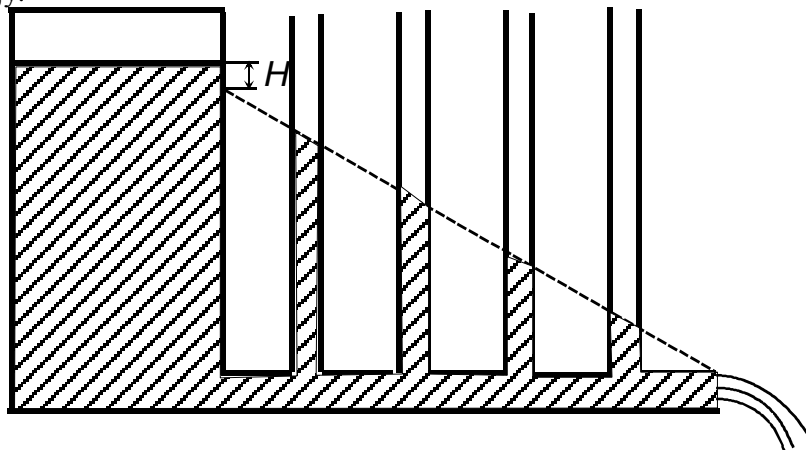


Слика 5.4.2

Одавде се види да је брзина течности у цеви максимална дуж осе цеви ($x=0$) а опада по квадратној функцији удаљења од осе цеви (слика 5.4.2). И код других случајева може се на сличан начин установити да је брзина течности највећа у оној струјници (струјној линији) која је највише удаљена од зида цеви. Познато је из искуства да је брзина реке највећа тамо где је дубина реке највећа. (Ово се односи на брзину реке у једном њеном попречном пресеку и не треба мешати са брзином реке дуж њеног тока, где је, према једначини континуитета, брзина реке највећа тамо где је попречни пресек тока најмањи.)

Према изразу (5.4.5) види се да је разлика притисака пропорционална дужини цеви. Другим речима, у хоризонталној цеви константног пречника притисак опада линеарно са дужином цеви. Овај став се може показати и на

хоризонталној цеви са манометрима кроз коју истиче течност из суда (слика 5.4.3). Притисци у цеви су сразмерни висинама стубова течности у манометрима ($p = \rho gh$), па се може видети да притисак опада линеарно дуж цеви. Линија притиска не долази до површине течности у суду, већ испод ње за висину H . Ово долази отуда што течност у суду мирује, док у цеви добија знатну брзину. Разлика висине H , односно одговарајућа потенцијална енергија, троши се на добијање брзине у цеви, односно прелази у кинетичку енергију.



Слика 5.4.3

Опадање притиска дуж цеви може се посматрати и са гледишта енергије. Течност има константну брзину дуж цеви, те се њена кинетичка енергија не може мењати дуж цеви. Пошто је кретање течности у хоризонталном правцу, течност не добива никакав рад од гравитационог поља. Међутим, да би се течност кретала, мора се савлађивати сила трења и тиме вршити рад. Према описаним условима овај рад може да се врши само на рачун енергије притиска, те он мора опадати.

Даљом интеграцијом израза (5.4.5) добија се

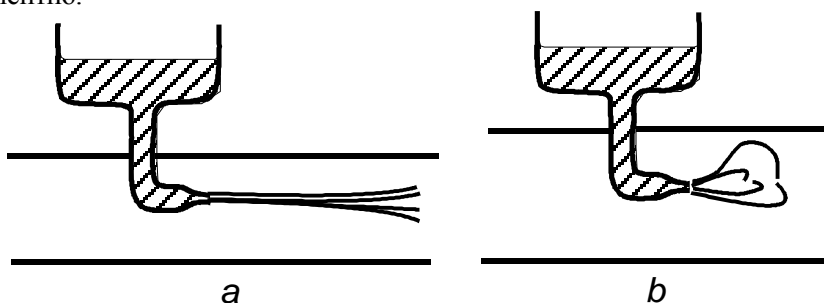
$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi R^4}{8\eta l} (p_1 - p_2), \quad (5.4.6)$$

где је $\frac{dV}{dt}$ проток флуида, односно протекла запремина флуида у јединици времена. Ово је *Поазејев* (Jean Louis Marie Poiseuille) закон, који показује да је интензитет тока флуида у цеви (проток) при датој разлици притисака сразмеран четвртој степену полупречника R . Из ове једначине може се одредити коефицијент вискозности η ако се измере остале величине. При датој разлици притисака и полупречнику цеви интензитет тока је обрнуто

пропорционалан коефицијенту вискозности. Ова релација даје врло повољну могућност да се упореде вискозности двеју течности ако се пусти да под истим околностима протекну кроз исту цев једнаке количине ових течности. Коефицијенти вискозности су онда пропорционални временима трајања протицања. На тај начин се лако добија *релативна вискозност* у односу на воду. Овде је посматрана вискозност у макроскопском погледу под истим условима и за течности и за гасове. Са гледишта кинетичке и молекулске теорије, вискозност течности се битно разликује од вискозности гасова. Вискозност течности се заснива на молекулским силама, вискозност гасова је условљена термичким кретањем молекула гаса.

5.5 Турбулентно кретање и Рејнолдсов број

Сва досадашња излагања о вискозности односила су се на ламинарно кретање. Међутим, при већим брзинама струјања флуида јавља се мешање струјница, при чему не постоји више кретање по слојевима, већ се слојеви међусобно мешају формирајући веома сложене облике који су махом неправилни и не могу се лако посматрати. Такво струјање се назива *турбулентно струјање*. До које ће границе постојати ламинарно струјање и када ће наступити турбулентно кретање зависи од врло много околности, које се једноставном теоријом не могу предвидети. Углавном се турбулентно струјање јавља при већим брзинама, али граница брзине зависи и од пречника млаза, облика суда и обраде површине суда кроз који струји течност. У неким околностима и мали потреси или безначајни узроци могу да изазову прелаз ламинарног кретања у турбулентно.

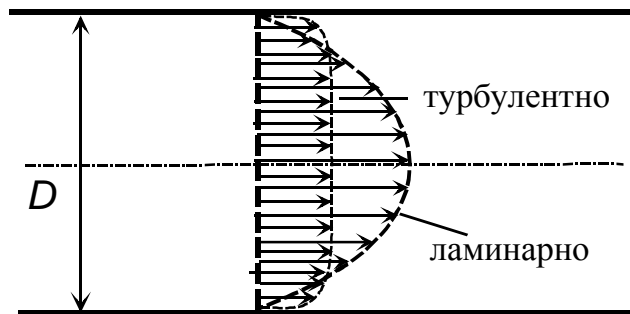


Слика 5.5.1

Прелаз ламинарног струјања у турбулентно може се једноставно посматрати на следећем примеру (слика 5.5.1). Нека кроз хоризонталну стаклену цев протиче безбојна течност, рецимо вода. Помоћу левка и врло танке цеви се у унутрашњост тока воде убацује нека обојена течност. Ако је брзина кретања воде мала у цеви ће се видети „влакно“ односно струјница од обојене течности. Обојена течност ће се врло слабо мешати са водом (слика

5.5.1а) што одговара ламинарном кретању. При повећању брзине кретања воде у цеви иста слика ће се задржати све до једне брзине када ће нагло настати мешање обојене течности по целом пресеку цеви (слика 5.5.1б). Ово је знак да је наступило турбулентно кретање. Пажљивим посматрањем може се установити да су сада струјнице сложеног вртложног облика. То значи да је у течности наступило вртложење или турбуленција од чега и потиче назив турбулентно кретање.

Такође се може установити да се при турбулентном кретању јавља другачији распоред брзина у пресеку цеви који је представљен на слици 5.5.2. Док је код ламинарног кретања расподела брзина имала параболични облик (слика 5.5.2) овде је брзина скоро по целом пресеку иста а нагло опада тек у близини зидова цеви. Код ламинарног кретања је унутрашње трење пропорционално брзини флуида. Код турбулентног кретања ова зависност је знатно сложенија а углавном сразмерна квадрату брзине флуида.



Слика 5.5.2

Анализа турбулентног кретања је у теоријском погледу веома сложена па се обично прибегава емпиријски установљеним законитостима. Овде ћемо због тога изнети само неке најважније ставове установљене углавном експерименталним путем.

Тако се може изрећи општи став да се унутрашње трење у великој мери повећава при преласку од ламинарног на турбулентно кретање. Други важан став односи се на критеријум преласка ламинарног кретања у турбулентно. Као што је речено турбулентно кретање се јавља при већим брзинама али се поставља питање при којој брзини ће ламинарно кретање прећи у турбулентно. Та брзина се обично назива *критичном брзином*. Разна испитивања и анализе показују да та брзина зависи од више фактора. На првом месту појава турбулентног кретања зависи од коефицијента вискозности η , димензије млаза коју ћемо као општу геометријску величину обележити као дужину l , а исто тако од густине флуида ρ . Ове величине су прецизно и једнозначно дефинисане па се са њима може и једноставно оперисати. Међутим на појаву турбуленције имају утицаја и други

фактори као што су: обрада површине суда, облик млаза, примесе страних тела, разне неправилности и др. Ови фактори се не могу једноставно одредити већ се само на основу емпиријских опажања могу начинити приближне градације. Према првим једнозначним факторима постављен је тзв. *Рејнолдсов критеријум* или *Рејнолдсов (Osborne Reynolds) број*:

$$R_e = \frac{\rho v l}{\eta} = \frac{v l}{\nu} \quad (5.5.1)$$

Посебно за најважнији случај кретања флуида кроз цев за геометријску величину l сматра се пречник цеви D па се може написати

$$R_e = \frac{\rho v D}{\eta} = \frac{v D}{\nu} \quad (5.5.2)$$

где је v брзина кретања флуида а ν кинематичка вискозност. Остали поменути фактори нису овим обухваћени па Рејнолдсов број R_e према обрасцима (5.5.1) и (5.5.2) даје само приближни критеријум.

Наводимо само неке примере за кретање флуида кроз цев. Ако је $R_e < 2000$ (у *SI* систему) скоро увек се јавља ламинарно кретање. За $R_e > 3000$ кретање је скоро увек турбулентно. У границама од 2000 до 3000 кретање може бити и турбулентно и ламинарно што зависи од поменутих сложених фактора чије се градације установљују емпиријским путем и обично изражавају помоћу таблица. Из израза (5.5.1) и (5.5.2) добија се критична брзина за воду када протиче кроз цев пречника 1cm а при температури од 20°C

$$v_k = 20 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \quad (5.5.3)$$

При овоме је искоришћена доња граница Рејнолдсовог броја од 2000. Кад би под истим околностима протикао ваздух критична брзина би била око

$$v_k = 1850 \frac{\text{cm}}{\text{s}}, \text{ тј. око } 100 \text{ пута већа.}$$

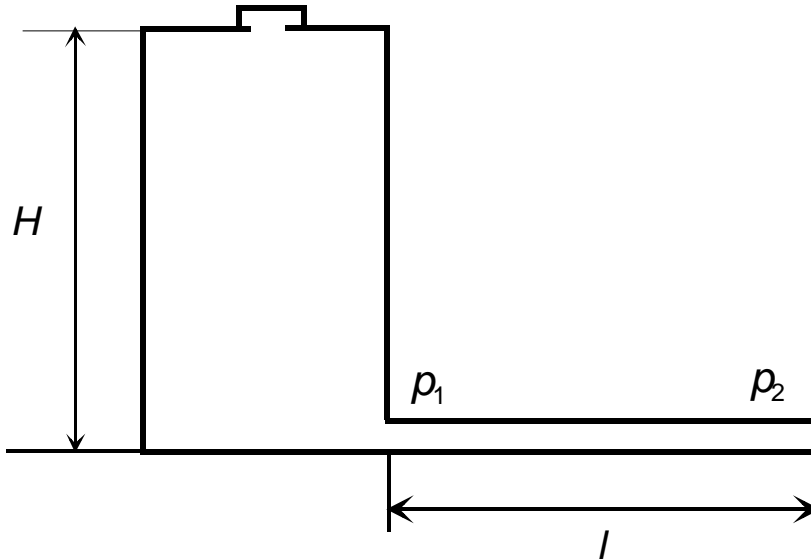
Рад сила трења при кретању флуида прелази у топлоту па се сматра као нежељени губитак. Пошто су силе трења код трубулентног кретања знатно веће онда су и ови губици већи. Зато је у циљу смањења губитака подесније одржавати ламинарно кретање. Међутим ово је условљено мањим брзинама које често у пракси нису подесне па је некад повољније одржавање турбулентног кретања.

Пример: Цистерна, висине $H = 10\text{m}$, напуњена је уљем (слика 5.5.3). На дну ове цистерне налази се отвор на који је постављена цев дужине $l = 2\text{m}$ и полупречника $R = 1\text{cm}$. Колика је:

а) највећа брзина истицања уља кроз цев?

б) проток уља?

Коефицијент вискозности уља је $\eta = 0,5 \text{ Pas}$, а његова густина $\rho = 900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$



Слика 5.5.3

Решење:

а) Највећа брзина истицања је:

$$v_m = \frac{\Delta p R^2}{4\eta l},$$

где је разлика притисака на крајевима цеви

$$\Delta p = \rho g H,$$

па је

$$v_m = \frac{\rho g H R^2}{4\eta l} = 2,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

б) Проток износи

$$Q = \frac{\Delta p \pi R^4}{8\eta l} = \frac{\rho g H \pi R^4}{8\eta l} = \frac{\pi R^2 v_m}{2} = 0,345 \frac{\text{L}}{\text{s}},$$

односно

$$Q' = \rho Q = 0,312 \frac{\text{kg}}{\text{s}}.$$

Пример: Метална цев, дужине $l = 20\text{m}$ и полупречника $R = 20\text{cm}$, спојена је на јавну водоводну мрежу, у којој је притисак воде $p_1 = 3\text{mbar}$. Вода на другом крају истиче слободно. Атмосферски притисак је $p_a = 1010\text{mbar}$, а вискозност воде $\eta = 0,8\text{mPas}$. Колики је проток воде кроз цев?

Решење:

$$Q = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi R^4}{8\eta l} (p_1 - p_a) = 0,6 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

Пример: Да би се одредила вискозност алкохола, мери се маса истеклог алкохола кроз хоризонталну капиларну цев, дужине $l = 12\text{cm}$ и пречника $d = 1\text{mm}$, под дејством притиска стуба алкохола висине $d = 1,5\text{m}$. За време $\Delta t = 100\text{s}$ истекне количина алкохола чија је маса $\Delta m = 200\text{g}$. Колика је вискозност алкохола према овим подацима ако је његова густина $\rho = 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$?

Решење:

$$\eta = \frac{\pi \rho^2 d^4 g h}{12 \mathcal{R} \frac{\Delta m}{\Delta t}} = 1\text{mPas}$$

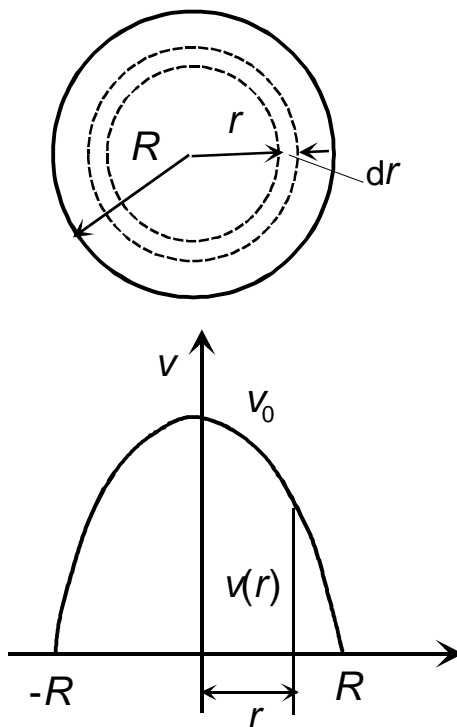
Пример: Кроз цев, дужине l и полупречника R , протиче течност густине ρ и вискозности η . Брзина протицања течности одређена је релацијом:

$$v = v_0 \frac{R^2 - r^2}{R^2},$$

где је v_0 брзина течности на средини цеви, а r полупречник уоченог цилиндричног слоја течности.

- Колики је проток течности кроз цев?
- Колика је кинетичка енергија течности у цеви?
- Колика је сила трења између цеви и течности?
- Колика је разлика притисака на крајевима цеви?

Решење:



Слика 5.5.4

а) Проток течности кроз елементарну попречну површину dS је
 $dQ = v dS$

а пошто је

$$dS = 2\pi r dr,$$

имамо

$$Q = 2v_0 \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2} \right) dr = \frac{1}{2} \pi v_0 R^2 \quad (5.5.4)$$

б) Кинетичка енергија једног слоја течности, масе dm , чија је брзина v , је

$$dE_k = \frac{1}{2} v^2 dm$$

а како је

$$dm = \rho dV = \rho 2\pi r dl,$$

то је

$$E_k = \frac{\pi \rho l v_0^2}{R^4} \int_0^R (R^4 - 2R^2 r^2 + r^4) dr = \frac{1}{6} \pi \rho l v_0^2 R^2.$$

в) Према Њутновом закону унутрашњег трења је

$$F_{tr} = -\eta S \frac{dv}{dr},$$

тј.

$$F_{tr} = -2\pi R l \eta \frac{d \left[v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right]}{dr},$$

или

$$F_{tr} = 4\pi R \eta l v_0 \frac{r}{R^2}.$$

Сила трења која делује на зид цеви добија се заменом за $r = R$, па је

$$F_{tr} = 4\pi \eta l v_0.$$

д) Према Поазјеовом закону је

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8l \eta},$$

а како је према релацији (5.5.4)

$$Q = \frac{1}{2} \pi v_0 R^2,$$

добија се да је

$$\Delta p = \frac{4v_0 l \eta}{R^2}.$$

6. Основе молекулско кинетичке теорија гасова и термодинамике

6.1 Молекулско кинетичка теорија. Брзина молекула

Супстанција се састоји од молекула и атома. Сматра се да је молекул најмањи делић супстанције који поседује све њене особине. Молекули се састоје од атома. Атом је најмањи делић хемијског елемента који испољава његове хемијске особине. У случају једноатомских молекула, нпр. молекули инертних гасова, појам атома и молекула је истоветан.

Количина супстанције је једна од седам основних физичких величина у *SI* систему јединица. Њена јединица је mol. Количина супстанције се може дефинисати на следећи начин:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A} \quad (6.1.1)$$

где је m маса молекула, M моларна маса, N број молекула и

$$N_A = 6,023 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$$

је Авогадров број, тј. број молекула у једном молу.

Маса једног молекула износи:

$$m_0 = \frac{M}{N_A} \quad (6.1.2)$$

а маса гаса:

$$m = Nm_0 \quad (6.1.3)$$

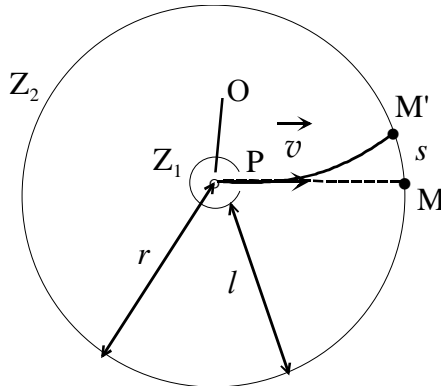
Дефинишимо још концентрацију молекула:

$$n_0 = \frac{N}{V} \quad (6.1.4)$$

Можемо рећи да концентрација n_0 представља број молекула N у јединици запремине V .

Молекули врше непрекидно хаотично кретање. Они при том стално мењају брзине и по правцу и по интензитету. У овом случају не би имало смисла одредити брзину молекула у одређеном тренутку времена, него се одређују средње брзине молекула. Ото Штерн (Stern Otto, немачки физичар) је вршио експерименте и мерио брзине молекула помоћу уређаја шематски приказаног на слици 6.1.1. Апаратура се састоји од два коаксијална цилиндра Z_1 и Z_2 унутар којих је висок вакуум. У центру цилиндара се налази посребрена жица од волфрама која се усија да би молекули сребра испаравали.

Атоми пролазе кроз прорез P на мањем цилиндру и крећу се праволинијски до већег цилиндра где ударају у унутрашњи зид цилиндра. Ако би цилиндри мировали сви атоми би стизали у тачку M . Ако оба цилиндра ротирају истом угаоном брзином ω , молекули би уместо у тачку M требало да падају у тачку M' . Експерименти су показали да атоми не падају само у тачку M' него и у околину те тачке. То се може протумачити различитим брзинама кретања молекула.



Слика 6.1.1

Узмимо да је атом прешао пут l ($l \approx r$) брзином v за време:

$$\Delta t = \frac{l}{v}. \quad (6.1.5)$$

За то време се цилиндри обрну за угао:

$$\Delta \varphi = \omega \cdot \Delta t. \quad (6.1.6)$$

Удаљеност тачке M од M' износи:

$$s = \Delta \varphi \cdot r \approx \Delta \varphi \cdot l. \quad (6.1.7)$$

Из ових релација добијамо:

$$s = \Delta \varphi \cdot l = \omega \cdot \Delta t \cdot l = \omega \frac{l^2}{v}. \quad (6.1.8)$$

Из релације (6.1.8) можемо добити релацију за брзину атома:

$$v = \frac{\omega \cdot l^2}{s} \quad (6.1.9)$$

Мерећи угаону брзину ротације цилиндара, растојање између цилиндара и растојање између тачака M и M' , које је очигледно променљиво, одређујемо брзине атома сребра. Постоје места где атоми највише падају и узимајући ту вредност за s добијамо највероватнију брзину. Израз за највероватнију брзину има облик:

$$v_{nv} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m_0}}, \quad (6.1.10)$$

очигледно да средња брзина зависи од температуре T и масе молекула. Овде смо увели још Болцманову константу:

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}. \quad (6.1.11)$$

Највероватнију брзину можемо написати на следећи начин:

$$v_{nv} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}, \quad (6.1.12)$$

где смо увели **универзалну гасну константу**:

$$R = N_A \cdot k_B = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}. \quad (6.1.13)$$

Такође је уведена и средња аритметичка брзина:

$$v_S = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_N}{N}, \quad (6.1.14)$$

односно:

$$v_S = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_0}}. \quad (6.1.15)$$

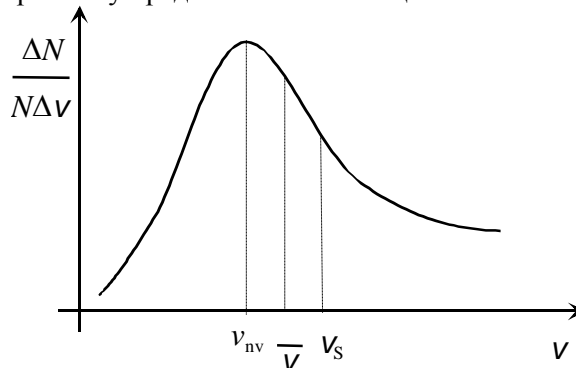
Веома је важна и средња квадратна брзина:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_N^2}{N}}, \quad (6.1.16)$$

односно:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_0}}. \quad (6.1.17)$$

Све три средње брзине су представљене на слици 6.1.2.



Слика 6.1.2

Пример: При повећању температуре неког гаса познате моларне масе M за ΔT , његова средња квадратна брзина повећа се за Δv . Колика му је температура?

Решење: На температури T имамо:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}, \tag{6.1.18}$$

а ако температуру увећамо за ΔT добијамо:

$$\bar{v} + \Delta\bar{v} = \sqrt{\frac{3R(T + \Delta T)}{M}}, \tag{6.1.19}$$

односно комбинујући релације (6.1.18) и (6.1.19) добијамо:

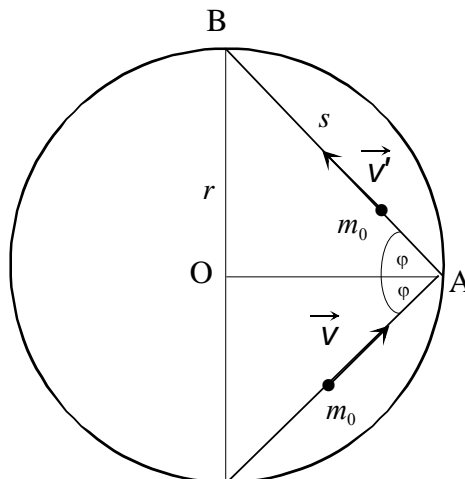
$$\Delta\bar{v} = \sqrt{\frac{3R(T + \Delta T)}{M}} - \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

односно

$$T = \frac{(3R\Delta T - M\Delta\bar{v}^2)^2}{12RM\Delta\bar{v}^2}.$$

6.2 Модел идеалног гаса и основна релација МКТ

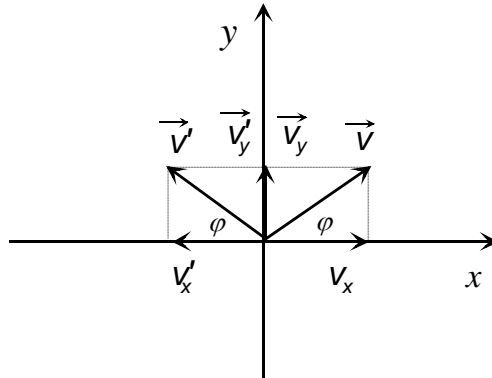
Према моделу идеалног гаса молекуле замишљамо као еластичне куглице занемарљиве запремине. Судару међу молекулима и са зидовима суда су апсолутно еластични. При тим сударима долази до размене импулса међу молекулима.



Слика 6.2.1

Узмимо да се гас налази у суду сферног облика полупречника r (види слику 6.2.1). Приликом удара молекула у зид суда долази до промене количине кретања (импулса):

$$\Delta K_x = -m_0 v_x - m_0 v_x = -2m_0 v_x. \quad (6.2.1)$$



Слика 6.2.2

Са слике 6.2.2 је очигледно:

$$\cos \varphi = \frac{v_x}{v} \Rightarrow v_x = v \cos \varphi, \quad (6.2.2)$$

односно, за промену импулса добијамо:

$$\Delta K_x = -2m_0 v \cdot \cos \varphi. \quad (6.2.3)$$

То је импулс који предаје зид честици. Импулс који предаје честица зиду је:

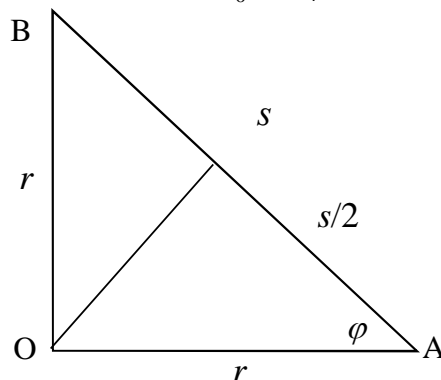
$$\Delta K_x = 2m_0 v \cdot \cos \varphi. \quad (6.2.4)$$

Даље ћемо уочити да су пројекције импулса по осама једнаке:

$$\Delta K_x = \Delta p; \Delta K_y = 0, \quad (6.2.5)$$

и даље ћемо анализирати само промену импулса по x оси:

$$\Delta K = 2m_0 v \cos \varphi. \quad (6.2.6)$$



Слика 6.2.3

На слици 6.2.3 је нацртан троугао OAB са слике 6.2.1. Очигледно добијамо:

$$\cos\varphi = \frac{2}{r} = \frac{s}{2r} \Rightarrow s = 2r \cos\varphi. \quad (6.2.7)$$

Време потребно да молекула пређе пут s износи:

$$\Delta t = \frac{s}{v} = \frac{2r \cos\varphi}{v}. \quad (6.2.8)$$

Број судара у јединици времена једног молекула (честице)

$$Z = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{\frac{2r \cos\varphi}{v}} = \frac{v}{2r \cos\varphi}, \quad (6.2.9)$$

односно време је једнако:

$$\Delta t = \frac{2r \cos\varphi}{v}. \quad (6.2.10)$$

Пођимо од другог Њутновог закона:

$$F = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \Delta K \frac{1}{\Delta t}. \quad (6.2.11)$$

Уврштавањем (6.2.6) и (6.2.10) у (6.2.11) добијамо:

$$F = 2m_0 v \cos\varphi \frac{v}{2r \cos\varphi}. \quad (6.2.12)$$

Након сређивања добијамо:

$$F = \frac{m_0 v^2}{r}. \quad (6.2.13)$$

Узимајући N молекула добијамо:

$$\bar{F} = \frac{m_0 (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_N^2)}{r}. \quad (6.2.14)$$

Множећи и делећи десну страну једнакости (6.2.14) са N добијамо:

$$\bar{F} = N \frac{m_0}{r} \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_N^2}{N} = N \frac{m_0 \bar{v}^2}{r}. \quad (6.2.15)$$

Притисак молекула на зид суда можемо представити на следећи начин:

$$p = \frac{\bar{F}}{S} = N \frac{m_0 \bar{v}^2}{r} \frac{1}{4\pi r^2}. \quad (6.2.16)$$

Сређивањем израза (6.2.16) добијамо:

$$p = \frac{1}{3} N m_0 \bar{v}^2 \frac{1}{\frac{4}{3} r^3 \pi} = \frac{1}{3} m_0 \bar{v}^2 \frac{N}{V}. \quad (6.2.17)$$

Односно коначно добијамо имајући у виду да је $n_0 = \frac{N}{V}$:

$$p = \frac{1}{3} n_0 m_0 \bar{v}^2. \quad (6.2.18)$$

Једначина (6.2.18) представља **основну релацију молекулско кинетичке теорије.**

Пример: Колики је притисак азота у затвореном суду ако је средња квадратна брзина молекула азота 500m/s? Густина азота је 1,35kg/m³.

Решење:

$$\begin{aligned} n_0 &= \frac{N}{V}, \\ n_0 m_0 &= \frac{N}{V} m_0 = \frac{m}{V} = \rho, \\ p &= \frac{1}{3} m_0 n_0 \bar{v}^2 = \frac{1}{3} \rho \bar{v}^2, \\ p &= 0,11 \cdot 10^6 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

6.3 Једначина гасног стања

Полазимо од основне релације молекулско кинетичке теорије.

$$p = \frac{1}{3} n_0 m_0 \bar{v}^2. \quad (6.3.1)$$

Помножићемо и поделити десну страну једначине (6.3.1) са 2.

$$p = \frac{1}{3} n_0 m_0 \bar{v}^2 \frac{2}{2} = \frac{2}{3} n_0 \frac{m_0 \bar{v}^2}{2} = \frac{2}{3} n_0 \bar{E}_{k0}, \quad (6.3.2)$$

где смо увели кинетичку енергију једне честице:

$$\bar{E}_{k0} = \frac{m_0 \bar{v}^2}{2}. \quad (6.3.3)$$

Имамо у виду да је концентрација $n_0 = \frac{N}{V}$ добијамо:

$$p = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \bar{E}_{k0}. \quad (6.3.4)$$

Да бисмо добили израз за једначину гасног стања анализираћемо како се може написати израз за средњу кинетичку енергију молекула. Поћићемо од израза за средњу квадратну брзину:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_0}}. \quad (6.3.5)$$

Квадрирањем израза (6.3.5) и множећи добијени израз са $\frac{m_0}{2}$ добијамо:

$$\frac{m_0 \bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} k_B T. \quad (6.3.6)$$

Израз (6.3.6) представља средњу кинетичку енергију једног молекула. Ако тај израз уврстимо у израз (6.3.4), добијамо:

$$p = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \frac{3}{2} k_B T. \quad (6.3.7)$$

Скраћивањем добијамо један од облика **једначине гасног стања** идеалног гаса:

$$pV = Nk_B T. \quad (6.3.8)$$

У изразу (6.3.8) се појављују следеће величине:

p - притисак - јединица Ра

V - запремина - јединица m^3

N - број молекула - бездимензиона величина

k_B - Болцманова константа

T - апсолутна или термодинамичка температура - јединица К ($T = t + 273,16$)

Релацију (6.3.8) ћемо сада написати у дугом облику. Ако имамо у виду да је количина супстанције $n = \frac{N}{N_A}$, односно $N = nN_A$ добијамо:

$$pV = nN_A k_B T, \quad (6.3.9)$$

односно:

$$\boxed{pV = nRT}. \quad (6.3.10)$$

Једначина (6.3.10) је уобичајени израз за **једначину гасног стања**.

Пример: Колико се молекула гаса налази у балону запремине $V=60l$, при температури $T=300K$, ако се гас налази под притиском $p=5 \cdot 10^3 Pa$?

Решење:

$$p = \frac{2}{3} n_0 \frac{1}{2} m_0 \bar{v}^2 = \frac{2}{3} n_0 E_{ko} = \frac{2}{3} n_0 \frac{3}{2} k_B T,$$

$$p = n_0 k_B T,$$

$$n_0 = \frac{p}{kT}; n_0 = \frac{N}{V},$$

$$\frac{N}{V} = \frac{p}{kT},$$

$$N = \frac{pV}{kT} = 7,2 \cdot 10^{22}.$$

Пример: Израчунати притисак 3,2kg кисеоника који се налази у боци запремине 2m^3 на температури 300K. ($M = 32 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$, $R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{molK}}$)

Решење:

$$pV = nRT$$

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

$$p = \frac{mRT}{MV} = 1,25 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

6.4 Бојл Мариотов закон

Бојл (Robert Boyle) и Мариот (Edme Mariotte) су установили да се притисак и запремина понашају обрнуто пропорционално при изотермском процесу (изо - исти, термо - температура), процесу при коме температура остаје стално иста. Бојл-Мариотов закон ћемо добити из једначине гасног стања (релација (6.3.10) имајући у виду да је при изотермском процесу $T = \text{const.}$. Десна страна једначине је константна и следи:

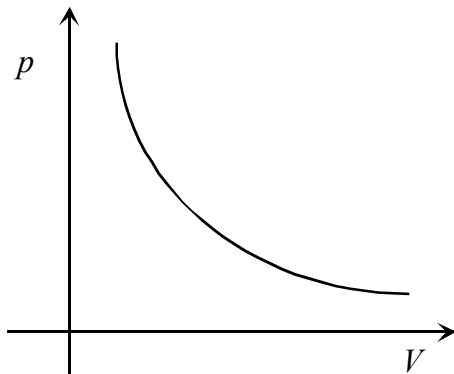
$$pV = \text{const.} \quad (6.4.1)$$

односно:

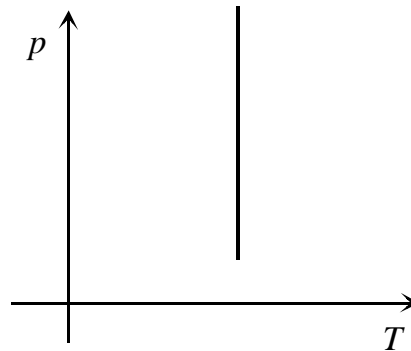
$$p = \frac{\text{const.}}{V} \quad (6.4.2)$$

Видимо да су притисак и запремина обрнуто сразмерне величине.

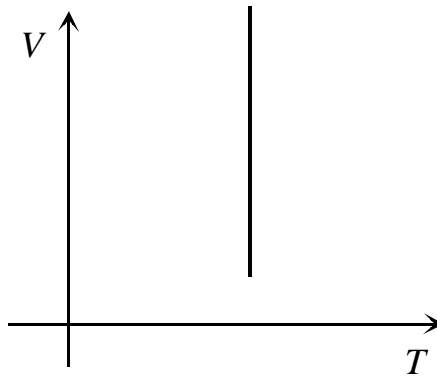
Графички приказ овог закона је дат на сликама 6.4.1 - 6.4.3. У $p - V$ дијаграму криве које се добијају се називају изотерме.



Слика 6.4.1



Слика 6.4.2



Слика 6.4.3

Пример: Идеалан гас на температури 300К и притиску 10^5 Па испуњава запремину од 1m^3 .

а.) Одредити притисак гаса при повећању запремине гаса за 9m^3 ако температура гаса остаје константна?

б.) Одредити број молова гаса.

Решење:

а)

$$\begin{aligned} p_1 V_1 &= p_2 V_2, \\ V_2 &= V_1 + \Delta V, \\ p_1 V_1 &= p_2 (V_1 + \Delta V), \\ p_2 &= p_1 \frac{V_1}{V_1 + \Delta V} = 10^4 \text{ Па}. \end{aligned}$$

б)

$$p_1 V_1 = nRT,$$

$$n = \frac{p_1 V_1}{RT} = 40 \text{ mol.}$$

6.5 Геј Лисаков закон

При изобарском процесу, $p = \text{const}$ ћемо добити Геј-Лисаков (Joseph Louis Gay-Lussac) закон. Пођимо од једначине гасног стања (6.3.10) за температуре $T_0 = 273\text{K}$ и $T = t + 273\text{K}$:

$$pV_0 = Nk_B T_0, \quad (6.5.1)$$

односно:

$$pV = Nk_B T. \quad (6.5.2)$$

Поделимо једначину (6.5.1) са (6.5.2):

$$\frac{V_0}{V} = \frac{T_0}{T}, \quad (6.5.3)$$

односно

$$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0}, \quad (6.5.4)$$

или

$$\boxed{\frac{V}{T} = \text{const}} \quad (6.5.5)$$

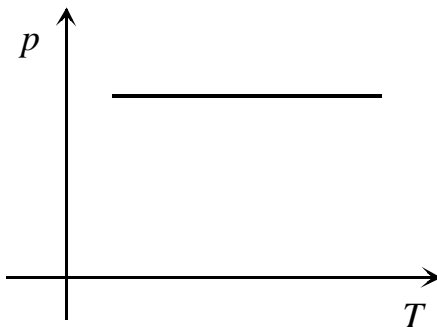
односно:

$$\boxed{V = \text{const} \cdot T}. \quad (6.5.6)$$

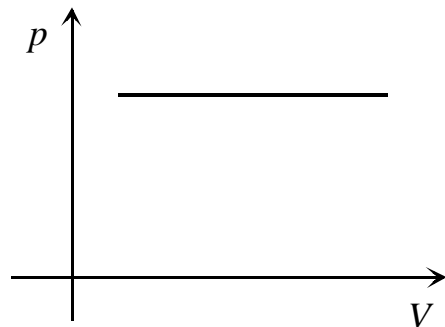
Геј-Лисаков закон речима можемо изразити:

Однос запремине и притиска је сталан при изобарском процесу.

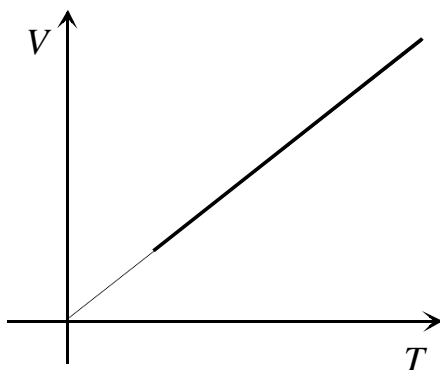
Види се да је запремина директно пропорционална температури. Графички приказ Геј-Лисаковог закона је дат на сликама 6.5.1-6.5.3.



Слика 6.5.1



Слика 6.5.2



Слика 6.5.3

Навешћемо још један користан облик Геј-Лисаковог закона. Поћи ћемо од познатог израза:

$$V = V_0 \frac{T}{T_0}. \quad (6.5.7)$$

Ако имамо у виду изразе за температуру добијамо:

$$V = V_0 \frac{t + 273}{273} = V_0 \left(\frac{t}{273} + 1 \right), \quad (6.5.8)$$

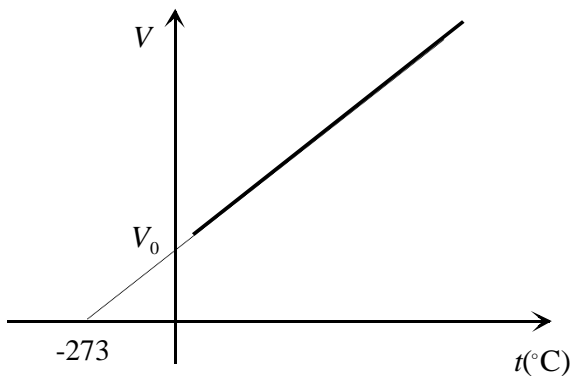
односно:

$$V = V_0 (1 + \gamma t), \quad (6.5.9)$$

где смо увели температурски коефицијент запреминског ширења:

$$\gamma = \frac{1}{273} \text{ K}^{-1}. \quad (6.5.10)$$

У V - t дијаграму зависност запремине од притиска је дата на слици 6.5.4.



Слика 6.5.4

Очигледно је да за $V=0$ добијамо $t=-273$ °С. Овде је битно нагласити да је апсолутна нула недостижна и да је због тога део праве на слици испрекидан. За $t=0$ °С добијамо $V=V_0$.

Пример: Запремина гаса на 300К износи $V_1=0,25\text{m}^3$. Колика ће му бити запремина V_2 при непромењеном притиску на температури 330К?

Решење:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

$$V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1} = 0,275\text{m}^3$$

6.6 Шарлов закон

При изохорском процесу, $V = \text{const.}$ ћемо добити Шарлов (Charles Jacques, француски физичар) закон. Полазимо слично као и у случају Геј-Лисаковог закона:

$$pV_0 = Nk_B T_0, \quad (6.6.1)$$

односно

$$pV = Nk_B T. \quad (6.6.2)$$

Поделимо једначине:

$$\frac{p_0}{p} = \frac{T_0}{T}, \quad (6.6.3)$$

односно:

$$\frac{p}{T} = \frac{p_0}{T_0}, \quad (6.6.4)$$

или

$$\boxed{\frac{p}{T} = \text{const.}}, \quad (6.6.5)$$

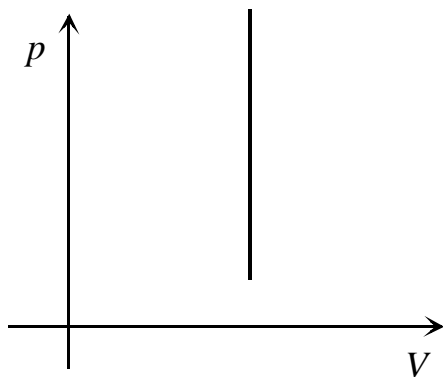
односно

$$\boxed{p = \text{const.} \cdot T}. \quad (6.6.6)$$

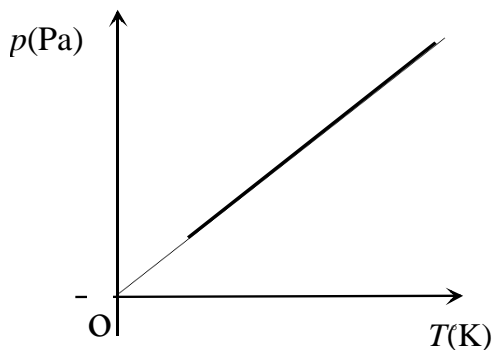
Шарлов закон гласи:

Однос притиска и температуре је сталан при изохорском процесу.

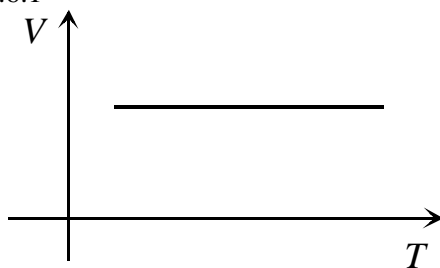
Графички приказ Шарловог закона је приказан на сликама 6.6.1-6.6.3.



Слика 6.6.1



Слика 6.6.2



Слика 6.6.3

Да бисмо добили зависност притиска од температуре у Цезијусовој скали пишемо:

$$p = p_0 \frac{T}{T_0}, \tag{6.6.7}$$

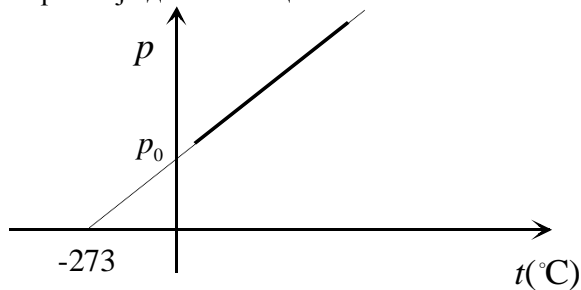
односно:

$$p = p_0 \frac{t + 273}{273} = p_0 \left(\frac{t}{273} + 1 \right), \tag{6.6.8}$$

или, имајући у виду температурски коефицијент:

$$p = p_0 (1 + \gamma t). \tag{6.6.9}$$

Графички приказ је дат на слици 6.6.4.



Слика 6.6.4

За $p = 0$ добијамо $t = -273$ °С, док за $t = 0$ °С добијамо $p = p_0$.

Пример: Притисак гаса на 7 °С износи $1,4 \cdot 10^5$ Па. Колики је притисак истог гаса на 14 °С ако је запремина гаса непромењена?

Решење:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2},$$

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 1,435 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Пример: Манометар у боци с гасом показује притисак $1,8 \cdot 10^5$ Па. Хлађењем гаса за 40 К притисак се смањи на $1,4 \cdot 10^5$ Па. Израчунати почетну и крајњу температуру гаса.

Решење:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2},$$

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_1 - \Delta T},$$

$$(T_1 - \Delta T)p_1 = T_1 p_2,$$

$$T_1 p_1 - \Delta T p_1 = T_1 p_2,$$

$$T_1 p_1 - T_1 p_2 = \Delta T p_1,$$

$$T_1 = \frac{\Delta T p_1}{p_1 - p_2} = 180 \text{ К},$$

$$T_2 = T_1 - \Delta T = 140 \text{ К}.$$

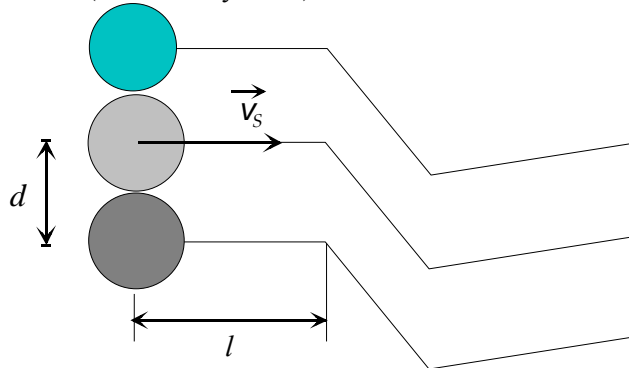
6.7 Средња дужина слободног пута молекула

Молекули гаса се хаотично крећу и при томе се стално међусобно сударају. Растојање између два узастопна судара истог молекула назива се дужина слободног пута молекула. Дужина слободног пута је различита али, због великог броја молекула у гасу, може се говорити о средњој дужини слободног пута.

Обележимо средњу дужину слободног пута са $\bar{\lambda}$. Ова дужина мора бити једнака дужини средњег пута који молекул пређе у јединици времена (средња брзина v_S), подељеној са средњим бројем судара \bar{Z} , тј. :

$$\bar{\lambda} = \frac{v_S}{\bar{Z}}. \quad (6.7.1)$$

Упрошћеним разматрањем ћемо доћи до средњег броја судара. Замислимо молекулу као куглицу полупречника r , која се креће праволинијски, и да се судара са другим молекулима. У јединици времена, он ће се сударити са свим молекулима, чији су центри на мањем или једнаком растојању од $2r$, у односу на његово средиште (види слику 6.7.1).



Слика 6.7.1

Средњи број судара је:

$$\bar{Z} = \frac{N}{\Delta t}. \quad (6.7.2)$$

Из дефиниције концентрације:

$$n_0 = \frac{N}{V}, \quad (6.7.3)$$

добивамо да је број молекула у посматраном цилиндру:

$$N = n_0 V = n_0 4r^2 \pi l = n_0 4r^2 \pi v_S \Delta t. \quad (6.7.4)$$

односно, за средњи број судара добијамо:

$$\bar{Z} = 4r^2 \pi v_S n_0. \quad (6.7.5)$$

Прецизнијим рачуном се добија да израз треба помножити са $\sqrt{2}$, па је тачније:

$$\bar{Z} = \sqrt{2} 4r^2 \pi v_S n_0. \quad (6.7.6)$$

Заменом вредности за средњи број судара \bar{Z} у једначину (6.7.1), добија се средња дужина слободног пута молекула:

$$\bar{\lambda} = \frac{v_S}{\sqrt{2} 4r^2 \pi v_S n_0} = \frac{1}{\sqrt{2} 4r^2 \pi n_0}. \quad (6.7.7)$$

Средња дужина слободног пута је обрнуто пропорционална концентрацији молекула, коју можемо изразити из (6.3.8):

$$n_0 = \frac{p}{k_B T}. \quad (6.7.8)$$

Заменом у (6.7.7) добијамо:

$$\bar{\lambda} = \frac{k_B T}{4\sqrt{2}r^2 \pi p}. \quad (6.7.9)$$

С обзиром на $d = 2r$, можемо даље писати:

$$\bar{\lambda} = \frac{k_B T}{4\sqrt{2}d^2 \pi p}. \quad (6.7.10)$$

Средња дужина слободног пута је обрнуто сразмерна притиску гаса. Ако је температура константна, онда средња дужина слободног пута расте са разређењем гаса, па се горња једначина може написати у облику:

$$\bar{\lambda} \cdot p = \text{const} \quad (6.7.11)$$

Средња дужина слободног пута служи као критеријум за степен разређености гасова (вакуума).

Пример: Колика је средња дужина слободне путање атома хелијума ако је размак између њих, у просеку, 4 nm?

Решење:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \frac{1}{n_0 \sigma}, \\ n_0 &= \frac{N}{V} = \frac{N}{l \sigma} = \frac{N}{l \pi d^2}, \\ \bar{\lambda} &= \frac{1}{\frac{N}{l \pi d^2} \pi d^2} = \frac{l}{N}, \\ n &= \frac{m}{M} = \frac{6,64 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{4 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} = 1,66 \cdot 10^{-27}, \\ N &= n N_A = 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 10^{-4}, \\ \bar{\lambda} &= \frac{4 \cdot 10^{-9}}{10^{-4}} = 4 \cdot 10^{-5} = 0,4 \mu\text{m}. \end{aligned}$$

Пример: Средња дужина слободне путање молекула ваздуха при нормалним условима износи 62,1 nm. Одредити средњу дужину слободне путање

молекула ваздуха у веома високом вакууму (1,33 нПа). Температуру у оба случаја сматрати једнаком.

Решење:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}n_0\sigma} = \frac{kT}{\sqrt{2}p\sigma},$$

$$\frac{\bar{\lambda}_u}{\bar{\lambda}_n} = \frac{\frac{kT}{\sqrt{2}p_u\sigma}}{\frac{kT}{\sqrt{2}p_n\sigma}} = \frac{p_0}{p_u} = \frac{101 \cdot \text{kPa}}{1,33 \text{nPa}} = 75,9 \cdot 10^6,$$

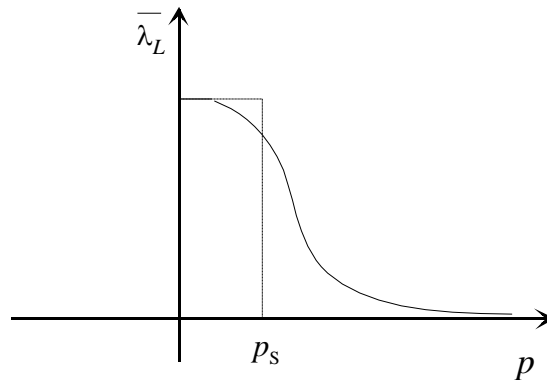
$$\bar{\lambda}_u = \bar{\lambda}_n \cdot 75,9 \cdot 10^6 = 4,7 \text{m}.$$

6.8 Добијање ниских притисака

Под ниским притиском, или како се обично каже вакуумом, подразумева се стање гаса при коме он има мању густину од његове густине при нормалним условима ($\sim 100 \text{kPa}$ и 0°C). Вакуум се нарочито користи у лабораторијама, где поједини инструменти и уређаји практично не могу функционисати без њега (електронски микроскопи, акцелератори, сепаратори изотопа и др.). У техници такође има широку примену, нарочито при изради сијалица, електронских цеви, телекинескопа, ренгенских цеви итд. У ствари, ниједан од поменутих уређаја и инструмената не би могао да ради уколико не би био под високим вакуумом. Због овако широке примене упознаћемо се са критеријумима, начином добијања и мерења вакуума.

Већ смо закључили да се средња дужина слободног пута молекула јако мења са притиском ($\bar{\lambda} \sim 1/p$). Ако се вакуумира неки суд чије су линеарне димензије L , онда средњи слободни пут молекула расте у суду према кривој представљеној на слици 6.8.1.

Најпре се средњи слободни пут молекула гаса у суду повећава и показује хиперболичну зависност од притиска. Међутим, при неком притиску p_c он достиже вредност линеарних димензија суда L ($\bar{\lambda} = L$). Даљим смањењем притиска практично више нема судара између молекула унутар суда. Молекули лете од једног до другог зида и само се са њима сударају. У зависности од величине средњег слободног пута и димензија суда, разликујемо високи, средњи и ниски вакуум.



Слика 6.8.1

Високи вакуум називамо стање гаса при коме је средњи слободни пут његових молекула велики у односу на линеарне димензије суда ($\bar{\lambda} > L$).

Под средњим вакуумом се подразумева стање гаса при коме је средњи слободни пут његових молекула реда величине линеарних димензија суда ($\bar{\lambda} \sim L$).

Ниски вакуум је стање при коме је средњи слободни пут молекула гаса мањи од **линеарних** димензија суда ($\bar{\lambda} < L$), али је већи него када се гас налази при нормалним условима. Очигледно је да при овако усвојеним критеријумима граница настајања високог вакуума нема свугде исту вредност притиска.

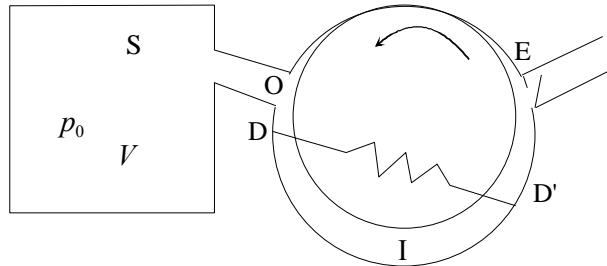
6.9 Методе добијања ниских притисака

Уређаји који служе за добијање ниских притисака називају се вакуум пумпе. Постоји више типова вакуум пумпи. Оне се, према намени и начину рада могу поделити на механичке и дифузионе. Помоћу механичких пумпи постиже се вакуум од 10^{-2} Pa, док се са дифузионим пумпама може остварити вакуум и до 10^{-6} Pa. Као пример размотрићемо принцип рада механичке вакуум пумпе.

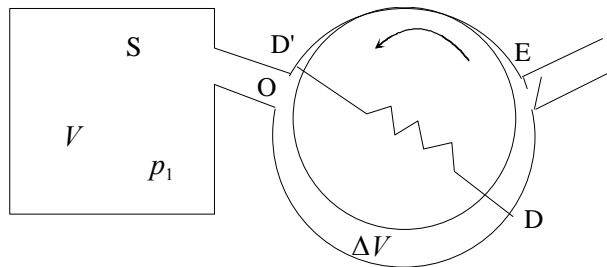
- **Механичка вакуум пумпа**

Механичка вакуум пумпа се састоји од ексцентричног цилиндра са лопатицама, који ротира у цилиндричној шупљини масивног тела (види слику 6.9.1). Лопатице D су уметнуте у прорез ексцентричног цилиндра и повезане са опругом која их својим дејством притиска уз зидове шупљине. Обртањем ексцентричног цилиндра од стране електромотора у назначеном смеру (слика а), лопатица D се удаљава од отвора O, за који је везан суд који се испумпава. Удаљавањем лопатице, повећава се простор запремине V , и гас из суда прелази у њега све док лопатица D' не прегради простор запремине V од

отвора O . Даљим обртањем, лопатица D' истискује гас из простора I кроз вентил E . Овај се процес при ротацији даље понавља.



Слика 6.9.1



Слика 6.9.2

Означимо запремину суда, који се испумпава, са V и првобитни притисак са p_0 . Када почне испумпавање, лопатица D повећава запремину V за ΔV . Ова вредност одговара простору запремине V , услед чега се првобитни притисак према Бојл Мариотовом закону смањује на неку вредност p_1 , тј:

$$p_0 V = p_1 (V + \Delta V), \quad (6.9.1)$$

тако да добијемо нову вредност притиска:

$$p_1 = p_0 \frac{V}{V + \Delta V}. \quad (6.9.2)$$

После другог обрта имамо:

$$p_2 = p_1 \frac{V}{V + \Delta V} = p_0 \left(\frac{V}{V + \Delta V} \right)^2, \quad (6.9.3)$$

а после n -тог добијемо:

$$p_n = p_0 \left(\frac{V}{V + \Delta V} \right)^n. \quad (6.9.4)$$

Ако се пумпа обрће констнтном брзином, тако да је број обртаја у $1s$ -v, онда је укупан број обртаја лопатице сразмеран времену t , тј.

$$n = \nu t . \quad (6.9.5)$$

На тај начин притисак p_n ћемо даље обележавати са p_t и формула (6.9.4) постаје:

$$p_t = p_0 \left(\frac{V}{V + \Delta V} \right)^{\nu t} . \quad (6.9.6)$$

Релацију (6.9.6) ћемо написати у погоднијем облику, најпре:

$$\frac{p_0}{p_t} = \left(\frac{V + \Delta V}{V} \right)^{\nu t} , \quad (6.9.7)$$

односно:

$$\frac{p_0}{p_t} = \left(1 + \frac{\Delta V}{V} \right)^{\nu t} . \quad (6.9.8)$$

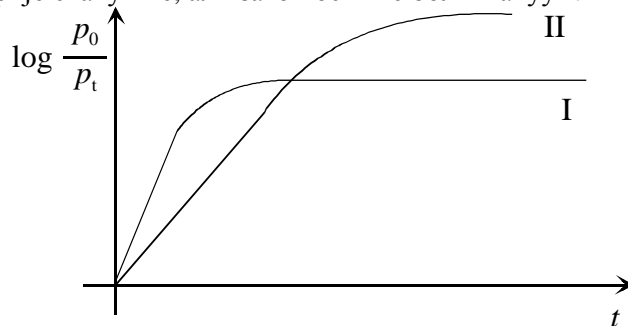
Логаритмовањем релације (6.9.8) добијамо:

$$\log \frac{p_0}{p_t} = \nu t \log \left(1 + \frac{\Delta V}{V} \right) . \quad (6.9.9)$$

Величине ν и $\left(1 + \frac{\Delta V}{V} \right)$ су константе за дату пумпу и суд који се евакуише, па се релација (6.9.9) може написати у облику:

$$\log \frac{p_0}{p_t} = Ct . \quad (6.9.10)$$

На слици 6.9.3 су представљене две радне карактеристике за механичке пумпе. Криве I и II приказују брзину испумпавања и висину вакуума за ове пумпе, када испумпавају исти суд. Крива I се односи на пумпу која брже евакуише (има већи капацитет), али не даје добар вакуум. Пумпа приказана кривом II спорије евакуише, али зато постиже бољи вакуум.



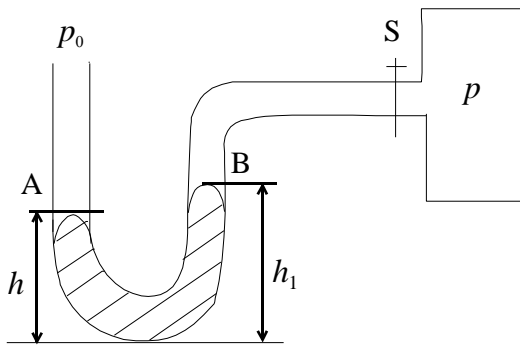
Слика 6.9.3

- **Мерење ниских притисака**

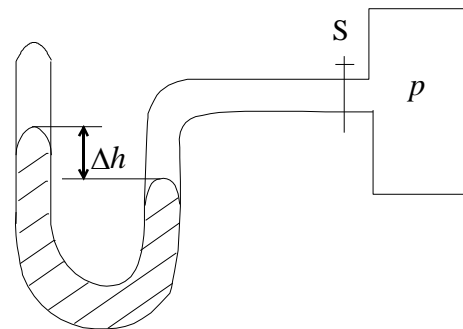
За мерење ниских притисака постоји велики број мерила заснованих на разним ефектима који су условљени променом притиска и имају функционалну зависност од њега. Мерила можемо поделити у три групе:

- а) Манометри са флуидима где спадају
 - отворени живини U манометри
 - затворени живини U манометри
 - компресиони живини манометри.
- б) Деформациони манометри:
 - манометри са спиралом
 - манометри са савитљивом мембраном
- б) Топлотно - проводни мерила притиска:
 - термоотпорни мерила
 - термоелектромоторна мерила

Као пример описаћемо манометре са флуидима - отворени и затворени живини U манометри (види слике 6.9.4 и 6.9.5).



Слика 6.9.4



Слика 6.9.5

Жива се ставља у стаклену цев у облику латиничног слова U . Мерење притиска помоћу ових манометара своди се на мерење разлике нивоа течности у крацима U цеви.

Притисак на ма ком хоризонталном нивоу флуида мора бити константан, тј притисак у левом и десном краку U цеви је исти (види слику 6.9.4):

$$p_0 + \rho gh = p + \rho gh_1 \quad (6.9.11)$$

односно:

$$p_0 - p = \Delta p = \rho g(h_1 - h) = \rho g\Delta h \quad (6.9.12)$$

где је p притисак у десном краку изнад нивоа флуида h_1 . Како су ρ и g константне величине, то се промена притиска може пратити само преко Δh , тј. промене разлике нивоа течности у крацима U цеви.

6.10 Дифузија

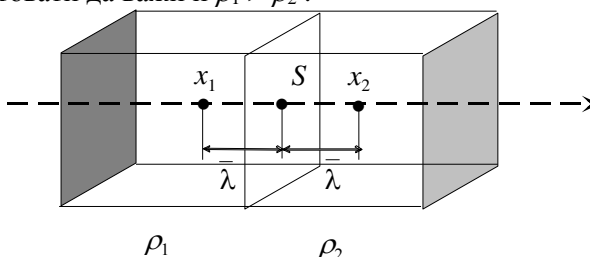
Непрекидно хаотично кретање се одражава у појави дифузије. Процес дифузије представља изједначавање концентрација две супстанције при њиховом мешању једне с другом.

Узмимо пример самодифузије, односно разматраћемо исту супстанцију, али тако да је концентрација молекула различита у разним деловима суда.

На слици 6.10.1 је суд у облику квадрата и узећемо да је у левом делу концентрација молекула већа од концентрације молекула у десном делу суда $n_{01} > n_{02}$. Пошто је концентрација директно пропорционална густини:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{Nm_0}{V} = n_0 m_0 \quad (6.10.1)$$

можемо констатовати да важи и $\rho_1 > \rho_2$.



Слика 6.10.1

Површина S (види слику 6.10.1) дели суд на два једнака дела и кроз површину S пролазе само они молекули који нису удаљенији од средње дужине слободног пута $\bar{\lambda}$.

Због хаотичног кретања молекула сви правци и смерови су равноправни па ће у смеру слева на десно ићи само 1/6 свих молекула, а исто толико сдесна на лево. Укупан број молекула је:

$$N = n_0 V = n_0 S \bar{\lambda} \quad (6.10.2)$$

Са леве стране се налази N_1 молекула :

$$N_1 = n_{01} V = n_{01} S \bar{\lambda} \quad (6.10.3)$$

а са десне стране:

$$N_2 = n_{02} V = n_{02} S \bar{\lambda} \quad (6.10.4)$$

Имајући у виду да ће пролазити само шестина молекула за време Δt ће проћи :

$$\Delta N = \frac{1}{6} S \bar{\lambda} (n_{02} - n_{01}) \quad (6.10.5)$$

С обзиром да важи:

$$m = Nm_0 \Rightarrow \Delta m = \Delta N m_0 \quad (6.10.6)$$

и да је разлика густина дата изразом:

$$\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1 = m_0 n_{02} - m_0 n_{01} \quad (6.10.7)$$

односно разлика маса је дата изразом:

$$\Delta m = -\frac{1}{6} S \bar{\lambda} \Delta\rho \quad (6.10.8)$$

Знак минус се појављује због смањења густине дуж позитивног смера x осе. Даље ћемо, имајући у виду дефиницију градијента густине:

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta x} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{x_2 - x_1} \quad (6.10.9)$$

проширити десну страну једначине (6.10.8) са Δx и Δt :

$$\Delta m = -\frac{1}{6} S \bar{\lambda} \frac{\Delta\rho}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} \Delta t \quad (6.10.10)$$

Са слике је очигледно:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2\bar{\lambda}}{\Delta t} = 2v_s \quad (6.10.11)$$

На тај начин релација (6.10.10) постаје:

$$\Delta m = -\frac{1}{3} \bar{\lambda} v_s \frac{\Delta\rho}{\Delta x} S \Delta t \quad (6.10.12)$$

Фактор:

$$D = \frac{1}{3} \bar{\lambda} v_s \quad (6.10.13)$$

представља коефицијент дифузије, а коначан израз:

$$\Delta m = -D \frac{\Delta\rho}{\Delta x} S \Delta t \quad (6.10.14)$$

представља **Фиков закон дифузије**. На крају ћемо израз (6.10.14) написати у диференцијалном облику:

$$dm = -D \frac{d\rho}{dx} S dt \quad (6.10.15)$$

Пример: Колика је маса азота који, због дифузије, прође кроз површину 100cm^2 за 10s ако је градијент густине (у правцу нормале на површини) $1,26 \frac{\text{kg}}{\text{m}^4}$? Брзина молекула азота је 520 m/s , а средња дужина слободне путање

10^{-7} m .

Решење:

$$\Delta m = -\frac{1}{3} \bar{\lambda} v_s \frac{\Delta \rho}{\Delta x} S \Delta t,$$

$$\Delta m = -2,2 \cdot 10^{-6} \text{ kg}.$$

Пример:

Колики је коефицијент дифузије водоника при задатим условима ако је коефицијент дифузије хелијума, под тим истим условима, $92 \text{ mm}^2/\text{s}$?

Решење:

$$D = \frac{1}{3} \bar{\lambda} v_s = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi} d^2 n_0} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}},$$

$$\frac{D_H}{D_{He}} = \frac{d_{He}^2 \sqrt{M_{He}}}{d_H^2 \sqrt{M_{He}}},$$

$$D_H = D_{He} \left(\frac{d_{He}}{d_H} \right)^2 \sqrt{\frac{M_{He}}{M_H}},$$

$$D_H = 88 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}.$$

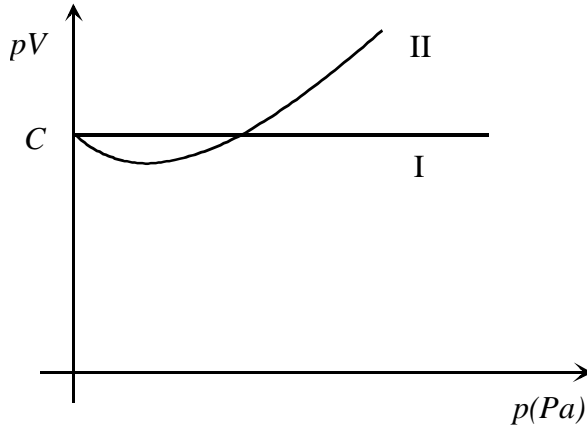
6.11 Реални гасови и течности

Једначина идеалног гасног стања :

$$pV = nRT \quad (6.11.1)$$

изведена је на основу молекулско кинетичке теорије. Молекули гаса су разматрани као материјалне тачке, при чему је било занемарено дејство међумолекулских сила, изузев у тренутку судара. На основу ове једначине, производ pV при непромењеној температури остаје константан, на било ком притиску. Међутим експериментални резултати добијени на кисеонику показују знатно одступање од овог закључка (види слику 6.11.1, идеални гас-I, реални гас-II). Повећањем притиска производ pV се прво смањује и достиже минимум да би, при даљем повећању притиска почео да расте скоро по линеарном закону.

Оваква одступања указују да се закони идеалних гасова не могу применити на реалне гасове, нарочито при високим притисцима и ниским температурама. Отуда се морају увести корекције у једначину идеалног гасног стања да би она одговарала и реалним гасовима. Ове корекције се односе на запремину самих молекула и молекуларне силе, које нису узимане у обзир при анализи идеалних гасова.



Слика 6.11.1

Молекуле можемо сматрати куглицама чији је полупречник реда $r = 10^{-10}$ m. Запремина једног таквог молекула је:

$$V_0 = \frac{4}{3} r^3 \pi = 4 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3 \quad (6.11.2)$$

Укупна запремина свих молекула у m^3 биће једнака запремини једног молекула помноженој са њиховим бројем у m^3 . При нормалном притиску, концентрација молекула је $n_0 = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$, па је запремина молекула у m^3 :

$$V' = NV_0 = n_0 \cdot V \cdot V_0 = 4 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3 \text{Im}^3 \cdot 2,7 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3} \approx 10^{-4} \text{ m}^3 \quad (6.11.3)$$

При нормалном притиску запремина самих молекула износи само 0,01% од запремине гаса (суда у коме се налази гас). Ако се притисак повећа на $5 \cdot 10^8$ Pa, запремина самих молекула заузимаће 50% запремине суда. Очигледно да је геометријска запремина V која преостаје за слободно кретање молекула мања за неку величину коју можемо обележити са b . Нађено је да је ова величина приближно једнака четворострукој запремини свих молекула. Величина b зависи од природе гаса и може се сматрати константном.

Уводећи ову корекцију једначина гасног стања добија облик:

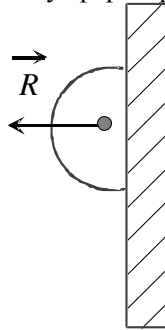
$$p(V - b) = nRT. \quad (6.11.4)$$

Одавде се може закључити да се запремина гаса смањује са повећањем притиска p . Када притисак узмемо да тежи бесконачности, добијамо $V = b$:

$$V - b = \frac{nRT}{p}; p \rightarrow \infty \Rightarrow V - b = 0 \Rightarrow V = b \quad (6.11.5)$$

Друга корекција се односи на притисак, а условљена је дејством међумолекулских сила. Ове силе могу да буду одбојне (репулзивне) и привлачне (атрактивне). На већим растојањима оне испољавају привлачни карактер, а на малим растојањима одбојни карактер.

Уочимо један молекул који се креће кроз гас према зиду суда. Између њега и других молекула, који се налазе у његовој сфери дејства, дејствују привлачне силе. Статистички посматрано уочени молекул је равномерно окружен другим гасним молекулима, па је резултујућа сила њихове интеракције једнака нули. Када се молекул приближи зиду суда на растојање које је једнако или мање од сфере дејства, број молекула у полусфери према гасу је већи од броја молекула у полусфери према зиду (види слику 6.11.2).



Слика 6.11.2

Зато је резултанта привлачних сила уперена према унутрашњости гаса, и уочени молекул смањеном брзином удара у зид суда. Према основној релацији молекулско кинетичке теорије притисак зависи од концентрације молекула и средњег квадрата брзине:

$$p = \frac{1}{3} n_0 m_0 \bar{v}^2 \quad (6.11.6)$$

Услед смањења брзине молекула, притисак на зидове суда p ће бити мањи за неку величину p' . Уносећи ову корекцију у једначину (6.11.4), добија се:

$$(p + p')(V - b) = nRT \quad (6.11.7)$$

Утврђено је да је величина p' једнака:

$$p' = \frac{an^2}{V^2} \quad (6.11.8)$$

где је a константа за дати гас и зависи од његове природе.

Заменом p' у релацију (6.11.7) добијамо коначно:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = nRT \quad (6.11.9)$$

Ово је Ван дер Валсова (Johannes Diderik van der Waals) једначина. Она се много боље слаже са експерименталним резултатима за реалне гасове од једначине за идеалне гасове.

Лако је уочити да ако су испуњени услови:

$$V \gg b, p \gg \frac{a}{V^2} \quad (6.11.10)$$

добијамо једначину стања за идеалне гасове:

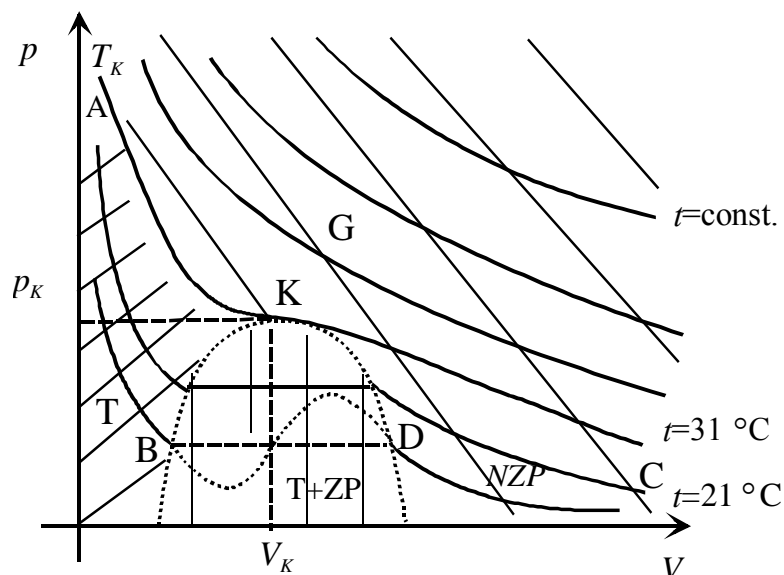
$$pV = nRT \quad (6.11.11)$$

Табела 8.1

Ван дер Ваалсови коефицијенти		
Гас	a (Pa m ³)	b (m ³ /mol)
Хелијум	3.46×10^{-3}	23.71×10^{-6}
Неон	2.12×10^{-2}	17.10×10^{-6}
Водоник	2.45×10^{-2}	26.61×10^{-6}
Угљен диоксид	3.96×10^{-1}	42.69×10^{-6}
Водена пара	5.47×10^{-1}	30.52×10^{-6}

6.12 Експерименталне изотерме и критично стање супстанције

Прве експерименталне радове чији су резултати, између осталог, послужили за проверу Ван дер Валсове једначине извршио је енглески физичар Ендрјус (Н. Ј. Andrews). Изотермском компресијом на угљен диоксиду (CO₂), Ендрјус је добио резултате који су представљени изотермама на слици 6.12.1.



Слика 6.12.1

Ради лакшег описивања експеримента и анализе добијених резултата, уочимо изотерму $t=21\text{ }^{\circ}\text{C}$ и пратимо њен ток.

Нека се у цилиндру са покретним клипом налази гас чије стање одговара тачки С на изотерми. Сабијањем помоћу клипа повећава се притисак гаса, што одговара делу криве CD. У овој области гас се понаша слично идеалном гасу, па се овај део изотерме слаже са Бојл Мариотовим законом ($pV=\text{const}$, NZP - незасићена пара). У тачки D, притисак гаса достиже вредност која одговара притиску његове засићене паре. Даљим смањењем запремине гаса долази до његове кондензације, тако да у цилиндру постоје истовремено две фазе (два агрегатна стања), течна и гасовита (T+ZP - течност и засићена пара). На датој температури притисак засићене паре p_0 има одређену вредност због чега се одржава равнотежно стање. Притисак у овој области остаје константан а повећава се количина кондензоване течности на рачун смањења паре. Овај процес приказан је хоризонталним делом изотерме DB. У тачки В се завршава процес кондензације па је целокупна количина гаса прешла у течно стање. Ако се компресија даље настави, притисак нагло расте, јер је течност практично нестишљива. Овај део процеса представљен је на делу изотерме ВА. Даљим понављањем истог поступка на вишим температурама, добијају се сличне изотерме само што им је хоризонтални део DB све краћи. На температури $31\text{ }^{\circ}\text{C}$, хоризонтални део на изотерми нестаје и у тачки К се појављује превојна тачка. На температурама изнад $31\text{ }^{\circ}\text{C}$, гас се

више не може превести у течно стање, а изотерме се слажу са изотермама за идеалне гасове. ($pV=\text{const}$).

Ван дер Валсова једначина се добро слаже са експерименталним изотермама, изузев у хоризонталном делу DB (неслагање је приказано испрекиданом линијом на кривој DB). Међутим, за ово подручје неслагање није неочекивано, јер се у тој области врши прелаз из гасовитог у течно стање и обрнуто. Изотерма са превојном тачком K назива се критична изотерма. Изнад ње може да постоји само гасовито стање, и ни под каквим условима гас се не може превести у течност.

Температура која одговара тачки K назива се критични притисак, а запремина критична запремина.

На основу кривих представљених на слици можемо извући следеће закључке:

1. Критична температура T_k је највиша температура при којој се гас још може превести у течност.
2. Максимална вредност притиска засићене паре не може бити већа од критичног притиска p_k .
3. Критична запремина V_k је највећа запремина коју дата супстанција може имати у течној фази.

Када се споје све тачке на изотермама у којима почиње кондензација и све тачке где се она завршава, добија се крива чији је максимум у тачки K (испрекидана крива). Ова крива и критична изотерма деле p - V дијаграм на четири области:

1. Област незасићене паре ограничена је критичном изотермом и испрекиданом кривом.
2. Област гаса налази се изнад критичне изотерме.
3. Област у којој су течност и засићена пара у равнотежи налази се испод испрекидане криве.
4. Област течности је ограничена критичном изотермом и испрекиданом кривом лево од критичне тачке K.

7. Термофизика

7.1 Увод

Постоје многе појаве које на први поглед немају никакве везе са механичким кретањем. На пример, загревањем чврсто тело прелази у течност, даљим загревањем прелази у пару, а загревањем паре добијамо високојонизујуће стање које називамо плазма. Овакве појаве се могу објаснити неуређеним, хаотичним кретањем честица од којих се састоји макротело. Такво неуређено кретање се назива **топлотно кретање** и оно одређује унутрашње стање сваког макроскопског тела. Саме појаве се називају **топлотне појаве**, а део физике који се бави проучавањем топлотних појава назива се **термофизика**.

Ради проучавања топлотних појава термофизика користи два приступа: молекулско кинетички метод и термодинамички метод.

Молекулско кинетички приступ се заснива на бази молекулско кинетичке теорије која изводи закључке о својствима тела или систем као целине на основу понашања њихових молекула. У молекулско кинетичкој теорији макроскопска својства тела посматрају се као резултат заједничког деловања молекула изражена преко физичких величина: притиска, температуре, густине, топлотне проводљивости итд. Ове макроскопске величине одређују средње стање огромног скупа честица не водећи рачуна о понашању појединих молекула. Према томе, оне имају смисао средњих вредности физичких величина, које описују кретања делића тела.

Термодинамика изучава својства макроскопских тела, не улазећи у њихову структуру. Она не задире дубље у суштину топлотних процеса, па у ствари више описује него што тумачи појаве. Све појаве се посматрају са енергијског становишта. Овде спада велики број техничких проблема који се односи на трансформацију енергије или добијање рада на рачун топлоте. Цела термодинамика је засновна на два принципа - I и II принцип термодинамике, који су утврђени уопштавањем експерименталних података.

Термодинамика и молекулско кинетичка теорија допуњавају једна другу и узајамно су повезане. Оне прилазе физичким својствима тела са различитих гледишта. Међутим, треба истаћи да молекулско кинетичка теорија потпуније открива суштину топлотних појава и даје им одређен физички смисао.

7.2 Температура. Топлота. Унутрашња енергија

Да бисмо загрејали неко тело морамо му доводити топлоту. Довођењем топлоте неуређено кретање молекула (честица) постаје

интензивније - повећава им се кинетичка енергија. Супротно, при хлађењу тела, топлота се одводи и смањује се кинетичка енергија честица. Одатле се може закључити да **топлота представља енергију која се преноси између посматраног тела и околине путем топлотног кретања молекула**. Топлота је, дакле, вид унутрашње енергије која се испољава само у процесу преношења са једног тела на друго. Топлота није својство, за њу се не може рећи да постоји у телу.

Под унутрашњом енергијом тела (система) подразумева се укупна енергија његових делића, не узимајући при томе у обзир енергију тела као целине условљену дејством спољашњих сила (нпр. енергија условљена гравитационим дејством). Она се према томе састоји од: кинетичке енергије неуређеног кретања молекула, потенцијалне енергије узајамног деловања између молекула, осцилаторне, ротационе и унутрашње молекулске енергије.

Промену унутрашње енергије неког система могуће је остварити на два начина: довођењем количине топлоте или вршењем рада над системом. Отуда, количина топлоте представља меру промене дела унутрашње енергије система (тела), који је условљен хаотичним кретањем молекула, дакле, исто као и рад, што представља меру за промену енергије неког механичког (уређеног) система. Зато количина топлоте и рад имају исте јединице у СИ систему јединица - [J] (џул).

Из искуства знамо да топлота спонтано прелази само са топлијег на хладније тело. Прелаз топлоте врши се све док се унутрашње енергије тела не изједначе, односно док се не постигне топлотна равнотежа. У топлотној равнотежи престаје прелаз топлоте са једног тела на друго, или са једног система на други систем. Овде се под системом подразумева скуп посматраних тела, односно делића ограничених неком затвореном површином која може да мења своју величину и облик, али кроз коју нема размене делића са околином. Тела која не улазе у систем, али која могу на било који начин да утичу на њега, називају се средина или околина. Стање система је дефинисано његовим макроскопским величинама као што су: температура, притисак, густина, запремина итд. Ове макроскопске величине које карактеришу стање система називају се параметри система. Равнотежно стање изолованог система се може дефинисати као стање у коме сви параметри тог система остају довољно дуго константни. Уопште се може рећи за било који изолован систем да сам по себи долази у стање термодинамичке равнотеже после довољно дугог времена.

Прелаз система из једног стања у друго назива се процес. Процес може бити повратан или неповратан. Повратан (реверзибилни) процес је такав процес који тече равноправно у оба смера. Кад такав процес прво протекне у једном смеру, па затим у супротном, систем се враћа у почетно стање, а да при томе не изазива никакве промене у својој средини. Процеси који нису

равноправни у оба смера, или се одвијају само у једном смеру су неповратни (иреверзибилни). Сви топлотни процеси су неповратни, јер се топлота преноси само са топлијег на хладније тело. Обрнут процес се никада не дешава сам по себи. Строго узевши у природи нема повратних процеса, јер се ни једно кретање не врши без трења, нити постоје потпуно еластични судари.

Довођењем количине топлоте телу, оно се загрева, тј. повећава му се температура. Температуру као степен загрејаности тела треба разликовати од количине топлоте која се телу доводи или одводи. Пламен упаљене шибице има високу температуру, али укупна количина топлоте која се ослободи, док она не сагори, релативно је мала. Отуда се температура може дефинисати као макроскопска физичка величина која карактерише интензитет топлотног кретања молекула, односно као “мера” нивоа унутрашње енергије. За оцену степена одступања макроскопског тела од топлотне равнотеже уводи се појам разлике температуре. Под разликом температуре Δt се подразумева величина која одређује разлику датог тела од топлотне равнотеже са другим телом. Познато је да се топлота може изразити на следећи начин:

$$Q = mc\Delta t \quad (7.2.1)$$

где је m маса тела које приме или одаје количину топлоте, c – специфична топлота (специфични топлотни капацитет), о коме ће касније бити више речи.

На основу молекулско кинетичке теорије, сматрајући молекуле идеалног гаса као материјалне тачке, извели смо формулу за средњу кинетичку енергију транслаторног кретања молекула:

$$\bar{E}_{k0} = \frac{3}{2} k_B T \quad (7.2.2)$$

Кинетичка енергија гасова, уопштено говорећи, не састоји се само од транслаторне кинетичке енергије молекула, него се може састојати и од осцилаторне и ротационе кинетичке енергије. Ради израчунавања енергије, које припада свим тим облицима кретања, мора се увести појам о броју степени слободе.

Под бројем степена слободе тела подразумева се број независно променљивих координата, који је неопходно увести ради одређивања његовог положаја у простору. Из механике је познато да се положај материјалне тачке у простору одређује се три независно променљиве координате, рецимо x , y и z . То значи да свако транслаторно кретање има три степена слободе. Према ставу о равномерној расподели енергије, на сваки степен слободе молекула долази иста средња енергија. Отуда на један степен слободе долази енергија:

$$\bar{E}_{k0} = \frac{1}{2} k_B T \quad (7.2.3)$$

Нека се гас састоји од једнаких молекула од којих сваки има i степени слободе, онда на сваки молекул долази просечна енергија:

$$\bar{E}_{k0} = \frac{i}{2} k_B T \quad (7.2.4)$$

Унутрашња енергија идеалног гаса U за N молекула износи:

$$U = N\bar{E}_{k0} = \frac{i}{2} N k_B T = \frac{i}{2} n N_A k_B T = \frac{i}{2} n R T \quad (7.2.5)$$

Промену унутрашње енергије ћемо изразити на следећи начин:

$$\Delta U = \frac{i}{2} n R \Delta T \quad (7.2.6)$$

7.3 Мерење температуре. Термометри

Ради одређивања температуре неког тела може се искористити физиолошки ефекат који температура изазива, тј. наш осећај да ли је тело топло или хладно. Оваква оцена загрејаности неког тела је врло непоуздана. Ставимо на пример једну руку у топлу воду а другу у хладну воду. Ако после тога обе руке ставимо у топлу воду осећај на рукама ће бити сасвим различит. Рука која је претходно била у хладној води осећаће нову средину као топлу, а рука која је претходно била у топлој води осећа је као хладну. Поред тога, разлику између топлог и хладног на основу физиолошког осећаја можемо установити само у релативно уском температурском интервалу. На вишим и доста нижим температурама од температуре нашег тела добија се осећај бола. Течни ваздух (-186°C), исто тако као и врела вода, изазива опекотине вишег степена. Научно мерење температуре треба да буде независно од физиолошких осећаја. Такво мерење је засновано на топлотној (термодинамичкој) равнотежи између тела која су у топлотној контакту.

Да би се измерила температура мора се најпре одредити референтна нула. У том смислу се температура може дефинисати као физичка величина која се јавља као мера одступања датог тела од топлотне равнотеже са другим телом, чије је стање условно узето за нулто. Тада се не мора говорити о температурској разлици него једноставно о температури.

Данас су прихваћене две нулте тачке: равнотежно стање система вода-лед при нормалном притиску (тачка топљења леда) и апсолутна нула. Целзијус (Celsius Anders, шведски физичар и астроном) је тачку топљења леда обележио нулом, а тачку кључања воде са 100. Растојање између нуле и 100 је поделио на сто једнаких делова. Један подеок ове скале је 1°C - један Целзијусов степен. Подеок Целзијусове скале и Келвинове скале је исти тако да важи:

$$\Delta t = \Delta T \quad (7.3.1)$$

и

$$T(\text{K}) = t(^{\circ}\text{C}) + 273,16 \quad (7.3.2)$$

У неким земљама се користе и друге поделе али су оне ван SI система.

Температура се не може мерити непосредно мерити. Мерење температуре се своди на мерење физичких особина које зависе од ње, нпр. електричних, механичких, оптичких, магнетних и др. Инструменти за мерење температуре се називају термометри. Рад термометра је заснован на мерењу величина које зависе од температуре према неком познатом закону. Ниједна од познатих физичких величина се не мења равномерно у широком температурском интервалу. Зато постоји велики број разних термометара, јер сваки од њих мери температуру у одређеном температурском интервалу. Поменућемо гасни термометар, који ради на принципу Шарловог закона. Течни термометри (живин, алкохолни) су најчешће у свакодневној употреби. Заснивају се на принципу ширења течности са повишењем температуре. Деформациони термометри се заснивају на промени линеарних димензија чврстих тела са променом температуре. Термоелементи се заснивају на промени електромоторне силе са променом температуре.

7.4 Први закон термодинамике

Први закон термодинамике представља закон одржања енергије примењен на термодинамичке процесе. Измена унутрашње енергије система, према првом принципу термодинамике, није условљена само извршеним радом, већ и количином топлоте која се систему доводи (или одводи).

Према првом закону, промена унутрашње енергије система ΔU једнака је количини топлоте ΔQ која се систему доводи (или одводи) и раду који околина врши над системом (или систем над околином):

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta A \quad (7.4.1)$$

Први закон се може изразити и на следећи начин: Количина топлоте, која се доводи једном систему, одлази на повећање његове унутрашње енергије и на рад који систем врши над околином, тј.

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A \quad (7.4.2)$$

При овоме је неопходно напоменути да је ΔQ позитивно када систем прима количину топлоте, а негативно када је отпушта. Код рада је обрнут случај, он је позитиван кад систем врши рад, а негативан када се рад врши над системом. Први принцип, односно једначина (7.4.2), се може написати и у диференцијалном облику:

$$dQ = dU + dA \quad (7.4.3)$$

Код кружних процеса систем се после низа стања враћа у првобитно стање. Овакав кружни процес назива се циклус. Унутрашња енергија, по

завршетку циклуса, има првобитну вредност, па је $\oint dU = 0$, и према првом принципу биће:

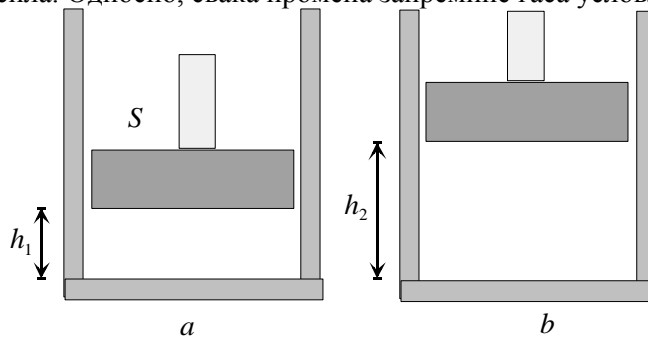
$$\oint dA = \oint dQ \quad (7.4.4)$$

тј. при кружном процесу, рад који систем врши мора да буде једнак количини топлоте коју систем прими, и рад који се врши над системом ($-A$) мора да буде једнак количини топлоте коју систем отпусти ($-Q$). Ово искључује постојање перпетуум мобиле прве врсте, тј. замишљену машину која би периодично радила без утрошка топлоте (енергије) доведене споља. Другим речима, систем не може да изврши потпун циклус, ако га изолујемо од околине.

Први закон термодинамике је један од најопштијих закона у природи. Као закон одржања и претварања енергије, он је у хемији, заједно са законом одржања масе, основа за изражавања хемијских реакција и праћење топлотних ефеката. У биологији представља основу за проучавање животне функције организма. Велик број техничких проблема и топлотних процеса, такође је везан за први закон термодинамике.

7.5 Рад код гасних изопроцеса

Кад гас повећава своју запремину, онда он врши рад насупрот спољашњих сила. Односно, свака промена запремине гаса условљена је радом.



Слика 7.5.1

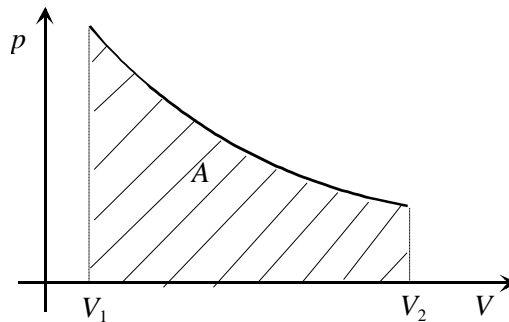
Замислимо да се у цилиндру са идеално покретљивим клипом налази извесна количина гаса (види слику 7.5.1). Нека је првобитна запремина гаса у цилиндру V . Ширењем, гас помери клип за дужину $\Delta h = h_2 - h_1$, па се запремина повећа за $\Delta V = S\Delta h$, где је S површина клипа. Гас при овоме врши рад савлађујући силу, која је усвољена спољашњим притиском $F = pS$. За рад добијамо:

$$A = F\Delta h = pS\Delta h = p\Delta V \quad (7.5.1)$$

Рад при ширењу гаса једнак је производу спољашњег притиска и промене његове запремине. У општем случају, када се запремина мења од неке вредности V_1 до V_2 , рад се рачуна према формули:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (7.5.2)$$

Рад који гас изврши при неком од већ поменутих процеса приказује се у p - V дијаграму површином ограниченом кривом, која карактерише тај процес и координатама. У случају да је у питању крива површина, тада се она мора разделити на мање површине и тада се рад одређује као збир појединачних радова.

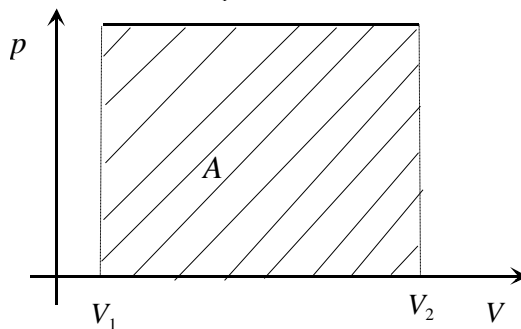


Слика 7.5.2

1) Рад при изобарском процесу

Код изобарског процеса ($p = \text{const.}$, види слику 7.5.3) лако добијамо:

$$A_{12} = p \int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1) \quad (7.5.3)$$

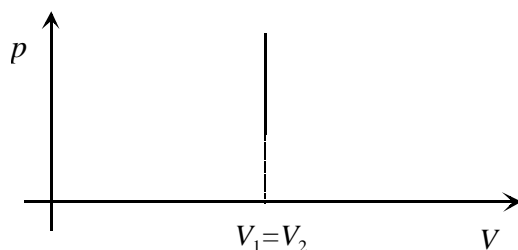


Слика 7.5.3

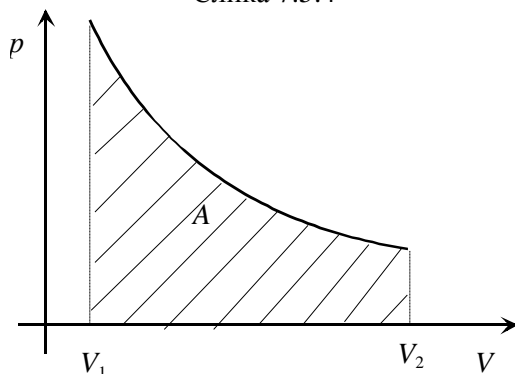
Рад је позитиван ако се гас шири, у супротном је негативан (сабијање гаса).

2) Рад при изохорском процесу

При изохорском процесу ($V=\text{const}$, види слику 7.5.4) је рад једнак нули.



Слика 7.5.4



Слика 7.5.5

3 Рад при изотермском процесу

Код изотермског процеса ($T=\text{const}$, види слику 7.5.5), где се гас шири од V_1 до V_2 , рад је једнак:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (7.5.4)$$

Искористићемо једначину гасног стања за идеалне гасове:

$$p = \frac{nRT}{V} \quad (7.5.5)$$

и уврштавањем у релацију (7.5.4) добијамо:

$$A_{12} = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (7.5.6)$$

7.6 Топлотни капацитет

Из искуства знамо да се нека тела лакше а нека теже загревају. Иста количина топлоте неће повисити температуру разним телима за исту вредност

иако имају исте масе. Овде је битна величина топлотни капацитет. По дефиницији он је бројно једнак количини топлоте коју је потребно да тело прими (отпусти) да би му се температура променила за један степен:

$$C = \frac{Q}{\Delta t} \quad (7.6.1)$$

Јединица за топлотни капацитет је J/K.

Друга величина која је битна у овим анализама је специфични топлотни капацитет. Он је бројно једнак топлоти коју треба довести (одвести) да би се температура тела масе 1kg повисила (снизилa) за 1 степен:

$$c = \frac{Q}{m\Delta t} \quad (7.6.2)$$

Јединица за специфични топлотни капацитет је J/kgK.

Моларни топлотни капацитет је бројно једнак топлоти која се доведе (одведе) супстанци од једног мола да би му се температура повисила (снизилa) за 1K:

$$c_n = \frac{Q}{n\Delta T} \quad (7.6.3)$$

1) Топлотни капацитети при изохорском процесу, $V=\text{const}$
Према дефиницији топлотног капацитета:

$$C_V = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\frac{i}{2}nR\Delta t}{\Delta t} = \frac{i}{2}nR \quad (7.6.4)$$

а специфични топлотни капацитет:

$$c_V = \frac{Q}{m\Delta t} = \frac{\Delta U}{m\Delta t} = \frac{\frac{i}{2}nR\Delta t}{m\Delta t} = \frac{i}{2} \frac{R}{M} \quad (7.6.5)$$

2) Топлотни капацитет и специфични топлотни капацитет при $p=\text{const}$.
Топлотни капацитет ће бити:

$$C_V = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{\Delta U + p\Delta V}{\Delta t} = \frac{\frac{i}{2}nR\Delta t + nR\Delta t}{\Delta t} = \frac{i+2}{2}nR \quad (7.6.6)$$

а специфични топлотни капацитет:

$$c_V = \frac{Q}{m\Delta t} = \frac{\Delta U + p\Delta V}{m\Delta t} = \frac{\frac{i}{2}nR\Delta t + nR\Delta t}{m\Delta t} = \frac{i+2}{2} \frac{R}{M} \quad (7.6.7)$$

Навешћемо још разлику између топлотног капацитет при сталном притиску и при сталној запремини:

$$C_p - C_V = \frac{i+2}{2}R - \frac{i}{2}R = R \quad (7.6.8)$$

и количник:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{\frac{i+2}{2}R}{\frac{i}{2}R} = \frac{i+2}{i} \quad (7.6.9)$$

$$\text{За } i=3 \text{ добијамо } \gamma = \frac{5}{3} = 1,67$$

$$\text{За } i=5 \text{ добијамо } \gamma = \frac{7}{5} = 1,4$$

$$\text{За } i=6 \text{ добијамо } \gamma = \frac{8}{6} = 1,33$$

7.7 Адијабатски процес. Рад при адијабатском процесу

Процес у коме је гас топлотно изолован, тј. нема топлотне размене са околином се назива адијабатски процес. Значи:

$$dQ = 0 \quad (7.7.1)$$

односно из првог принципа термодинамике следи:

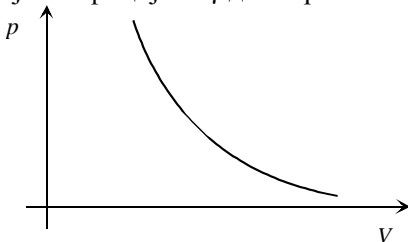
$$dA = -dU \quad (7.7.2)$$

Можемо закључити да ће се гас при адијабатском ширењу гас хладити и обрнуто.

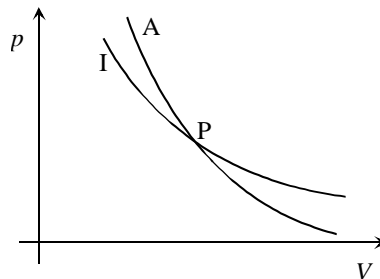
Веза притиска и запремине при адијабатском процесу је дата Поасоновом (Poisson Siméon Denis, француски физичар и математичар) формулом:

$$p \cdot V^\gamma = \text{const} \quad (7.7.3)$$

где је коефицијент γ дат изразом 7.6.9.



Слика 7.7.1



Слика 7.7.2

На слици 7.7.1 је дата адијабата, а на слици 7.7.2 су дате и адијабата (A) и изотерма (I). Може се видети да је адијабата стрмија од изотерме.

Нађимо рад при адијабатском процесу. Полазимо од дефиниције за рад:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV \quad (7.7.4)$$

и имајући у виду једначину гасног стања можемо даље писати:

$$A = nR \int_{V_1}^{V_2} T \frac{dV}{V} \quad (7.7.5)$$

Користећи релације (7.7.3) и једначину можемо Поасонову формулу написати у облику:

$$T \cdot V^{\gamma-1} = \text{const} \quad (7.7.6)$$

Диференцирамо овај израз и добијамо:

$$\frac{dT}{T} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dV}{V} \quad (7.7.7)$$

Уврштавањем ове релације у (7.7.5) добијамо:

$$A = -\frac{nR}{\gamma-1} \int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{nR}{\gamma-1} (T_2 - T_1) \quad (7.7.8)$$

Ако анализирамо рад при изотермском и адијабатском процесу можемо констатовати следеће:

- Ако се пође од тачке Р (види слику 7.7.2) и гас се шири видимо да је рад при изотермском процесу већи од рада при адијабатском процесу.

- Сабијањем гаса од тачке Р рад при изотермском процесу је мањи од рада при адијабатском процесу.

7.8 Повратни и неповратни процеси

Најједноставније је појам реверзибилности и иреверзибилности процеса преузети из механике. Посматрамо куглицу која пада и удара о подлогу. Ако би била апсолутно еластична и ако би отпор ваздуха био занемарљив она би се вратила до исте висине са које је пуштена да пада. При томе се потенцијална енергија претвара у кинетичку енергију и обратно. То би био пример повратног (реверзибилног) процеса. Ако се куглица након удара не би попела до исте висине са које је пуштена (због силе отпора, интеракције са подлогом уз губитак енергије), тада бисмо рекли да се ради о неповратном (иреверзибилном) процесу. Таквих примера има много (клатно, еластична опруга итд.).

За реверзибилни процес би могли да кажемо да је то процес који се понавља на исти начин у оба смера. У термодинамичким процесима је битно

још нагласити да тело (систем) пролази кроз иста међустања не изазивајући при томе никакве промене у околини. Сваки процес који не задовољава те услове се назива иреверзибилни процес.

У термодинамици је важан појам квазистатичког процеса. То би био процес при коме се параметри стања (p, V, T) мењају веома споро, тако да се систем стално налази у стању термодинамичке равнотеже. Квазистатички процеси имају реверзибилни карактер.

Размотримо још неке примере. У непосредном топлотном контакту, топлије тело увек предаје одређену количину топлоте хладнијем телу. Молекули гаса се спонтано распоређују по целој запремини суда а не само у једном делу. Очигледно је из ових примера да је важно својство процеса у молекуларним системима да они имају иреверзибилни карактер.

Неповратност је посебно изражена код термодинамичких процеса. Топлота увек прелази са топлијег на хладније тело, итд.

Закон одржања енергије утврђује могућности претварања различитих облика енергије а при томе не дефинише **смер** тих процеса. Искуство говори да узајамне трансформације енергије нису равноправне. Узмимо на пример кинетичку енергију. Она се при нееластичном судару претвара у унутрашњу енергију. Да бисмо трансформисали унутрашњу енергију у кинетичку енергију, за то су потребне специјалне машине. И тада је немогуће у потпуности трансформисати енергију - долази до расипања енергије.

Показује се да се претварање унутрашње енергије у друге облике енергије врши са мањим губицима што је температура тела виша у односу на околину. Практично је немогуће трансформисати унутрашњу енергију система у други облик енергије ако се његова температура незнатно разликује од температуре околине.

Увешћемо појам ентропије. Ентропија је количина топлоте која долази на јединицу температуре. Обележава се са S :

$$S = \frac{Q}{T} \quad (7.8.1)$$

Ентропија је функција стања система, и обично се мере само промене ентропије:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} \quad (7.8.2)$$

Све реалне процесе прати повећање ентропије:

$$\Delta S > 0 \quad (7.8.3)$$

Реверзибилним процесима би одговарао случај без промене ентропије:

$$\Delta S = 0 \quad (7.8.4)$$

Уопштено можемо рећи да важи:

$$\Delta S \geq 0 \quad (7.8.5)$$

Могли бисмо још дефинисати ентропију као квантитативну меру уређености система. Болцман (Boltzmann Ludwig, аустријски физичар) је повезао ентропију са термодинамичком вероватноћом:

$$S = k_B \ln W \quad (7.8.6)$$

где је W термодинамичка вероватноћа одигравања неког термодинамичког процеса. Ако је стање уређено, тада би било $W=1$, и одатле $S=0$, а што је систем ближи равнотежном стању ентропија се увећава.

7.9 Други принцип термодинамике

Из искуства нам је познато, што смо већ помињали, да топлота спонтано прелази са топлијег на хладније тело. Према првом принципу би био могућ и обрнут процес, под условом да укупна енергија остане неизмењена. Први принцип термодинамике такође дозвољава прелазак кинетичке енергије у унутрашњу и обрнуто. То би значило да се тело које се зауставило услед трења може поново довести у стање кретања.

Смер топлотних процеса одређује **Други принцип термодинамике**. Једна од дефиниција другог принципа термодинамике би била: Топлота спонтано прелази само са тела које има вишу температуру на тело које има нижу температуру, обрнут процес није могућ спонтано.

Огледи су такође показали да није могуће сву количину топлоте, коју систем прими, претворити у рад. На основу овога може се дати још једна дефиниција другог принципа термодинамике: Не постоји термодинамички процес у којем би једини резултат био претварање топлоте у рад, или Немогуће је конструисати препетуум мобиле друге врсте.

Свака топлотна машина осим што врши претварање унутрашње енергије у рад врши још нешто, она мора да део примљене топлоте ода околини.

Према дефиницији ентропије, можемо дати још једну дефиницију другог принципа термодинамике: Препуштен самом себи, затворен и топлотно изолован термодинамички систем прелази из мање вероватног у вероватније стање.

7.10 Топлотни мотори

Свака топлотна машина састоји се из три дела: радног тела, грејача, температуре T_1 и хладњака температуре T_2 . Као хладњак се обично узима атмосфера или водена средина. Као радно тело обично се узима гас. Радно тело прима количину топлоте Q_1 од грејача и затим предаје количину топлоте

Q_2 хладњаку. Ако је извршен пун циклус, треба имати у виду да је $\Delta U = U_2 - U_1 = 0$, па први принцип термодинамике можемо написати у облику:

$$Q_1 = Q_2 + A + Q' \quad (7.10.1)$$

где је са Q' обележена топлота која је изгубљена у циклусу. Корисни рад је одавде:

$$A = Q_1 - Q_2 - Q' \quad (7.10.2)$$

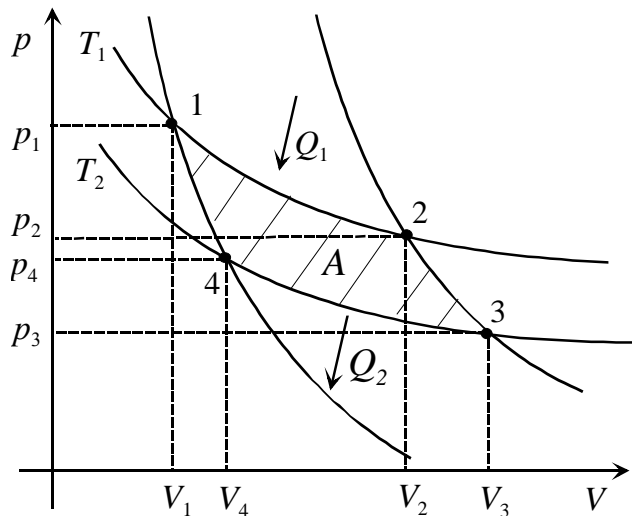
односно, можемо написати:

$$A \leq Q_1 - Q_2 \quad (7.10.3)$$

Знак неједнакости се односи на реалан мотор, а знак једнакости на идеалан мотор.

7.11 Карноов циклус

Карноов (Carnot Nicolas Leonard Sadi, француски физичар) циклус је посебан случај термодинамичког циклуса који врши идеалан гас који се састоји од две изотерме и две адијабате. Теоријско решење овог циклуса је дао Сади Карно 1824. године.



Слика 7.11.1

Изотермски делови циклуса се остварују помоћу два термостата: грејача температуре T_1 који доводи систему количину топлоте Q_1 , и хладњака температуре T_2 коме систем предаје количину топлоте Q_2 .

Узмимо да систем у почетном тренутку има параметре: p_1, T_1 и V_1 . Цилиндар са гасом се доводи у топлотни контакт са грејачем и изотермски се шири до запремине V_2 , где влада притисак p_2 . При томе он изврши рад:

$$A_{1,2} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} > 0 \quad (7.11.1)$$

а пошто је процес изотермски, у овом делу циклуса нема промене унутрашње енергије: $\Delta U=0$, па је рад $A_{1,2}$ једнак количини топлоте коју систем прими од грејача. То је на слици представљено изотермом 1-2. У случају изотермског процеса важи:

$$p_1V_1 = p_2V_2 \quad (7.11.2)$$

У том тренутку систем се одваја од грејача и затим се адијабатски шири до запремине која одговара температури T_2 хладњака. Параметри у овом тренутку су: p_3 , V_3 и T_2 . При адијабатском процесу нема размене топлоте са околином тако да гас врши рад на рачун смањења унутрашње енергије.

$$A_{2,3} = -\Delta U > 0 \quad (7.11.3)$$

У случају адијабатског процеса за дате параметре имамо:

$$\left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1} \quad (7.11.4)$$

Охлађени гас се затим изотермски сабија до запремине V_4 , при чему има притисак p_4 и температуру T_2 . При изотермском сабијању гас је предао хладњаку количину топлоте Q_2 , која је једнака раду који је извршен над гасом ($\Delta U=0$):

$$A_{3,4} = nRT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -Q_2 < 0 \quad (7.11.5)$$

односно, можемо написати:

$$Q_2 = nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} \quad (7.11.6)$$

Према Бојл Мариотовом закону:

$$p_3V_3 = p_4V_4 \quad (7.11.7)$$

У последњем делу циклуса, систем се адијабатски сабија до почетних параметара стања. По Пуасоновом закону:

$$\left(\frac{V_1}{V_4} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1} \quad (7.11.8)$$

Ако имамо увиду да је за затворен циклус $\Delta U=0$, користан рад је једнак разлици количина топлоте које је систем примио од грејача и предао хладњаку:

$$A_k = Q_1 - Q_2 \quad (7.11.9)$$

У p - V дијаграму рад је једнак површини испод криве промене притиска у функцији од запремине. Очигледно је да рад у овом случају представља површину омеђену са две адијабате и две изотерме.

Коефицијент корисног дејства Карноовог циклуса добијамо као однос корисног и уложеног рада:

$$\eta_k = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad (7.11.10)$$

Докажимо да се коефицијент корисног дејства може приказати и на следећи начин:

$$\eta_k = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (7.11.11)$$

Из релација (7.11.4) и (7.11.8) следи:

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1} \quad (7.11.12)$$

одакле непосредно следи релација (7.11.11).

7.12 Преношење топлоте

Под преношењем топлоте се подразумева спонтано преношење дела унутрашње енергије, тј. количине топлоте са једног тела на друго или са једног дела тела на његове друге делове. Према другом закону термодинамике овај спонтани прелаз је могућ само са топлијег на хладније тело. Он се може вршити све док се не успостави топлотна равнотежа између тела или делова једног истог тела. Постоје три различита начина преношења топлоте: провођење (кондукција), струјање (конвекција) и зрачење (радијација).

Провођење топлоте представља директан начин преношења топлоте са топлијег на хладније тело, када су она у контакту. Овај начин је доминантан код чврстих тела, и може се објаснити на основу молекулско кинетичке теорије. На вишој температури молекули имају већу кинетичку енергију. Они, путем судара, предају својим суседима део кинетичке енергије, који се даље преносе са молекула на молекул. На тај начин се врши трансфер енергије, иако се молекули не крећу, они само осцилују око равнотежног положаја.

Конвекција је начин преношења топлоте путем кретања флуида. Струјањем флуида са топлијег на хладније место преносе се и молекули са вишом кинетичком енергијом на место са нижом кинетичком енергијом. на тај начин се повећава средња кинетичка енергија "хладнијих" молекула, тј. хладније место се загрева.

Зрачењем се топлота не преноси директно, већ посредством електромагнетних таласа. Количина топлоте се најпре трансформише у електромагнетни (топлотни) талас, који се као такав преноси до тела. Тело га

апсорбује и поново трансформише у топлоту. За простирање електромагнетних таласа није потребна никаква супстанција, јер се они простиру и кроз вакуум. На овај начин Сунце загрева Земљу.

7.13 Провођење топлоте

Топлотна својства материјала је најједноставније одредити експерименталним путем. Нека се један крај шипки истих димензија одржава на сталној температури, на пример загнуримо их у топлу воду. Ако су шипке направљене од различитог материјала, онда ће оне на другом крају имати различиту температуру, што се може утврдити мерењем. Такође дуж сваке шипке постоји пад температуре, мерећи од топлијег ка хладнијем делу. Ако је температурска разлика по јединици дужине (температурски градијент) релативно мала, онда за такву шипку (материјал) кажемо да је добар проводник. Све што је већи температурски градијент материјал је лошији проводник, тј. бољи је термићки изолатор. Тако су, на пример, метали добри проводници. Код њих доминантну улогу у провођењу топлоте играју слободни електрони.

Експериментално се може показати да је количина топлоте која прође кроз површину S (попречни пресек шипке) и дебљину dx неког материјала у јединици времена пропорционална градијенту температуре $\frac{dT}{dx}$ и тој површини:

$$Q = -\lambda_k S \frac{dT}{dx} \tau \quad (7.13.1)$$

где је λ_k коефицијент пропорционалности који се назива коефицијент термичке проводљивости. Он је бројно једнак количини топлоте која прође кроз материјал површине 1m^2 , дебљине 1m , при температурској разлици од 1K . Знак минус је уведен због негативног градијента температуре.

Уместо количине топлоте Q обично се уводи проток топлоте q :

$$q = \frac{Q}{\tau} \quad (7.13.2)$$

где је τ време. Значи обично записујемо:

$$q = -\lambda_k S \frac{dT}{dx} \quad (7.13.3)$$

Јединица за λ_k у SI систему је $\frac{\text{J}}{\text{msK}}$.

7.14 Струјање

Конвекција је начин преношења топлоте путем кретања, односно струјања флуида. Ово је у природи врло распрострањен процес. Навешћемо неке примере.

Загревањем тла доњи слојеви ваздуха се такође загревају, што доводи до смањења њихове густине (ширење флуида услед загревања), односно специфичне тежине. Услед дества гравитације, топлији (лакши) ваздух струји навише, а хладнији наниже, према тлу. Оваква вертикална струјања се нарочито испољавају у току лета. Ветрови су дакле врста конвекције, где се ваздух у атмосфери преноси са једног дела Земље на други. У океанима и морима су такође позната стална струјања. Овде се топлија вода из области екватора путем површинског кретања преноси у хладније области, одакле се опет хладнија вода као специфички тежа креће по дну океана у супротном смеру. Једно од најпознатијих оваквих струјања је Голфска струја. Расхлађење језера и река се такође врши путем конвекције. Загревање просторија радијатором или грејалицом остварује се путем конвекције. Ваздух загрејан радијатором као специфички лакши иде навише, а хладнији струји наниже и долази са доње стране радијатора. Тако и топла вода, под дејством гравитације као специфички лакша струји из котла (који се налази обично у доњим деловима зграда) у радијаторе, а већ охлађена из радијатора силази у котао. Све се то поспешује пумпом.

7.15 Зрачење

Зрачењем се индиректно преноси топлотна енергија са једног тела на друго. Најпре се топлотна енергија трансформише у електромагнетну, а ова опет у топлотну.

Сва тела зраче, тј. одају своју топлотну енергију путем електромагнетних таласа. Енергија топлотног зрачења тела која се пренесе кроз јединичну површину у јединичном времену сразмерна је четвртој степену њихове температуре, што је дато Штефан-Болцмановим законом:

$$e = \sigma T^4 \quad (7.15.1)$$

где је $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$ Штефан Болцманова константа. Укупна енергија која се израчи се може представити на следећи начин:

$$E = e \cdot S \cdot t \quad (7.15.2)$$

Топлотно електромагнетно зрачење је невидљиво (таласне дужине се крећу у интервалу од $7,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ до $3,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}$). Тело на које пада топлотно зрачење загрева се само ако га оно апсорбује. При томе се повећава енергија честица а тиме и температура тела.

Укупну енергију која падне на тело можемо записати у облику:

$$E = E_a + E_t + E_r \quad (7.15.3)$$

где је E_a део енергије који се апсорбује, E_t део енергије који продре кроз тело (транспоновани део) и E_r део енергије који се рефлектује. Ако читаву релацију поделимо са укупном енергијом, добијамо:

$$1 = A + T + R \quad (7.15.4)$$

где је:

$$A = \frac{E_a}{E} \text{ - апсорпциона моћ}$$

$$T = \frac{E_t}{E} \text{ - моћ пропуштања (транспаренције)}$$

$$R = \frac{E_r}{E} \text{ - рефлексiona моћ}$$

Величине A , T и R су без димензија и могу имати вредост између 0 и 1 (0 и 100%).

Земља добија топлотну енергију од Сунца путем зрачења. Око 10% сунчеве енергије се апсорбује у атмосфери, а око 90% на Земљи. На тај начин Земља, у току једне године, прими енергију у износу око $5,6 \cdot 10^{24} \text{ J}$. Реално се рачуна да сваки центиметар површине Земље кад на њега падају нормално сунчеви зраци апсорбује енергију око $4 \frac{\text{J}}{\text{min}}$.

7.16 Кондензовање гасова и добијање ниских температура

Сви гасови се могу превести у течно стање само ако се охладе испод њихове критичне температуре. Најпознатији уређај који служи за добијање течних гасова је Линдеова (Carl von Linde, немачки инжењер индустријалац и проналазач) машина. Гас се помоћу компресора сабија до високог притиска, око 20 МРа, и путем цеви води до експандера, а на свом путу гас пролази кроз хладњак, да би се охладио и преко експандера се нагло шири у Дјуаров (Dewar James, шкотски хемичар и физичар) суд, који је на ниском притиску. температура гаса се снижава и помоћу измењивача топлоте поново враћа у компресор, и тај процес се врши циклично док се гас не доведе до температуре испод критичне, а затим сабијањем гаса у Дјуаровом суду он се преводи у течност. Водоник и хелијум имају врло ниске критичне температуре ($-80 \text{ }^\circ\text{C}$ и $-258 \text{ }^\circ\text{C}$), па се пре експанзије морају охладити испод ових вредности. Код водоника се ово постиже помоћу течног ваздуха, а код хелијума помоћу течног водоника.

Тачке кључања при спољашњем притиску од 10^5 Pa су:

течни ваздух: $-186\text{ }^{\circ}\text{C}$; течни кисеоник: $-183\text{ }^{\circ}\text{C}$; азот: $-196\text{ }^{\circ}\text{C}$; водоник: $-253\text{ }^{\circ}\text{C}$ и хелијум : $-268\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Поступак претварања гасова у течност је од врло велике важности за науку, технику и медицину. Помоћу њих се хладе материјали и испитују њихова својства на ниским температурама. Тако су откривени многи нови ефекти, као што су суперпроводљивост, супервискозност и др. Створена је и посебна област у физици: физика ниских температура, која се бави проучавањем супстанција и нових ефеката са ниским температурама. Од битног је значаја добијање течног ваздуха. Из њега се издваја азот, кисеоник и инертни гасови. Овим гасовима се пуне челичне боце, које се користе за разне сврхе у техници и механици. Тако се компримовани кисеоник из боце користи за аутогено заваривање, подводно роњење, у ваздухопловству, медицини и др.

7.17 Промене агрегатних стања. Топљење и очвршћавање

Већ смо помињали агрегатна стања, а сад ћемо класификовати агрегатна стања и формулисати прелазе између тих агрегатних стања. Обично кажемо да имамо три агрегатна стања, док неки научници сматрају да вискојонизујуће стање гаса - плазму треба третирати као четврто агрегатно стање.

Прелазак	чврсто \rightarrow течно	- топљење
	течно \rightarrow чврсто	- очвршћавање; кристализација
	течно \rightarrow гасовито	- испаравање
	гасовито \rightarrow течно	- кондензовање
	гасовито \rightarrow плазма	- јонизација
	плазма \rightarrow гасовито	- рекомбинација
	чврсто \rightarrow гасовито	- сублимација

Прелазак чврстог тела у течност назива се топљење. Температура прелаза назива се тачка топљења (T_t), и она је дефинисана само за кристална тела (аморфна тела омекшавају). Тачка топљења зависи од природе тела, спољашњег притиска и чистоће.

Количина топлоте коју је потребно довести једници масе тела да оно пређе из чврстог у течну агрегатно стање на температури топљења назива се латентна топлота топљења:

$$q_t = \lambda_t = \frac{Q_t}{m} \quad (7.17.1)$$

Из ове релације можемо израчунати укупну количину топлоте коју је потребно довести телу масе m , које је на температури топљења, да би се истопило:

$$Q = m \cdot q_t \quad (7.17.2)$$

Да би тело довели до тачке топљења неопходно га је загревати - доводити му топлоту, и ако се оно налазило на температури t_1 , да би дошло до температуре топљења t_t , потребна је количина топлоте:

$$Q = m \cdot c (t_t - t_1) \quad (7.17.3)$$

Топлота која се доводи телу да би се истопило троши се на разарање кристалне решетке. При обрнутом процесу - преласку из течног у чврсто агрегатно стање потребно је исту количину топлоте одвести (охладити тело).

Сва тела при преласку из чврстог у течно агрегатно стање мењају своју запремину. Код већине тела запремина се повећава преласком у течно стање. Код таквих тела, која се при топљењу шире, повећање спољашњег притиска повишава њихову тачку топљења. Ако се тело при топљењу скупља, онда се под дејством спољашњег притиска снижава њихова тачка топљења. Вода има својство да јој се запремина смањује када се лед топи, и ову појаву називамо аномалијом. Сличну особину има и бизмут.

7.18 Испаравање и кондензовање. Кључање

Под испаравањем се подразумева прелазак течности у гасовито агрегатно стање (у пару). Испаравање се врши са површине течности, на свим температурама (под нормалним условима испаравање зовемо ветрење - "вода је изветрила"). Брзина испаравања се повећава са порастом температуре.

На одређеној температури почиње бурно испаравање из целе запремине течности. Образују се мехурићи који услед силе потиска излазе на површину течности. То бурно испаравање се назива кључање, и установљено је да температура кључања зависи од спољашњег притиска. Температура течности се не мења све док сва течност не испари ("искључа").

Количина топлоте коју је потребно довести једници масе течности да она пређе из течног у гасовито агрегатно стање на температури кључања (T_{klj}) назива се латентна топлота испаравања:

$$q_i = \lambda_i = \frac{Q_i}{m} \quad (7.18.1)$$

Из ове релације можемо израчунати укупну количину топлоте коју је потребно довести течности масе m , које се налази на температури кључања, да би испарила:

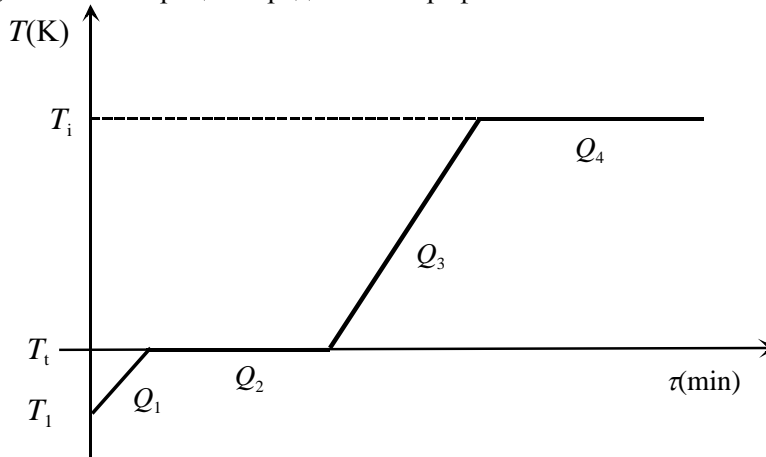
$$Q = m \cdot q_i \quad (7.18.2)$$

При хлађењу паре настаје обрнут процес - кондензовање. Да би се пара кондензовала на температури кондензовања ($T_{kon} = T_{klj}$ на истом спољашњем

притиску) потребно је одвести исто онолико топлоте колико се доведе да течност испари ($q_i = q_k$).

7.19 Дијаграми промене агрегатних стања

Размотримо неке конкретне случајеве. Лед се налази на температури T_1 , и потребно је израчунати колико је потребно довести топлоте да би он испарио, а затим те процесе представити графички.



Слика 7.19.1

Да би се лед загрејао до температуре топљења потребна је количина топлоте:

$$Q_1 = mc_L(T_t - T_1) \quad (7.19.1)$$

Да би се сад лед потпуно отопио на T_t потребна је количина топлоте:

$$Q_2 = mq_t \quad (7.19.2)$$

Сада смо добили воду на температури T_t и да би вода била доведена до температуре кључања потребна је количина топлоте:

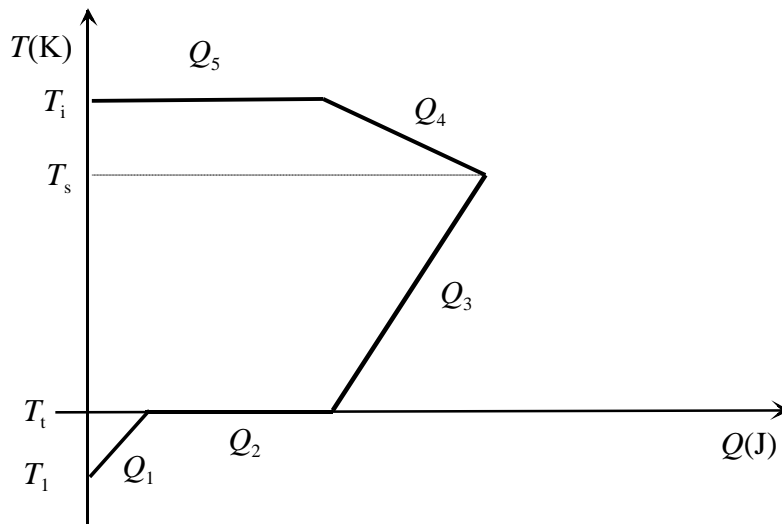
$$Q_3 = mc_V(T_i - T_t) \quad (7.19.3)$$

Потребна је још количина топлоте да вода на T_i искључа:

$$Q_4 = mq_i \quad (7.19.4)$$

На слици 7.19.1 је представљен графички приказ овог процеса.

Размотримо још једначину топлотне равнотеже. У топлотни контакт су доведени водена пара на T_i и лед на температури T_1 . Овде се поставља питање шта ће се десити након извесног времена, ако су они топлотно изоловани. Очигледно ће се пара кондензовати и добијена вода охладити, на рачун тога ће се лед загрејати до температуре топљења, затим ће се истопити (ако има довољно количине топлоте коју прими од паре, односно воде), а потом ће се добијена вода загрејати до неке средње температуре T_s (види слику 7.19.2).



Слика 7.19.2

Значи једначина топлотне равнотеже има облик:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 = 0 \quad (7.19.5)$$

односно:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = -Q_4 - Q_5 \quad (7.19.6)$$

Топлоте на левој страни су са знаком "+" у смислу да се те топлоте доводе, а топлоте на десној страни су са знаком "-" у смислу да се те топлоте одводе. Оно што је овде битно нагласити је да онолико топлоте коју неко тело изгуби, толико топлоте друго тело прими, ако је систем топлотно изолован.

8. Литература

1. В. Сајферт, Физика, Технички факултет "М. Пупин", Зрењанин, 2003
2. М. Букуров, Б. Тодоровић, С. Бикић, Збирка задатака из механике флуида 1, ФТН, Нови Сад, 2013
3. М. Букуров, Механика флуида 1, ФТН, Нови Сад, 2013
4. П. Цвијановић, Д. Стојковић, Збирка решених задатака са писмених испита из механике флуида, Стулос, ФТН, Нови Сад, 1997
5. Љ. Крсмановић, В. Салников, М. Шашић, М. Ђурић, Р. Ашковић, В. Ђорђевић, Збирка задатака из механике флуида, Научна књига, Београд, 1968
6. Ж. Букуров, П. Цвијановић, Механика флуида, задаци, ФТН, Нови Сад, 1982
7. К. С. Басниев Н. М. Дмитриев Г. Д. Розенберг, Нефтегазовая гидро-механика, Ижевск, Москва, 2005
8. А.А. Кудинов, Техническая гидромеханика, Машиностроение, Минск, 2008
9. Д. Продановић, Механика флуида, Грађевински факултет, Београд, 2013
10. М. Massoud, Enginereeing Thermofluids, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005
11. К. Вороњец, Н. Обрадовић, Механика флуида, Грађевинска књига, 1979
12. С. Чантрак, М. Бенишек, М. Павловић, П. Марјановић, Ц. Срнојевић, Механика флуида, теорија и пракса, Машински факултет, Београд, 1994
13. В. Дамјановић, С. Дрндаревић, С. Калезић, Физичка мерења, Физички факултет, Београд, 1999
14. Y. Cengel, M. Boles, Thermodynamics, McGraw-Hill, New York, 2011
15. G.K. Batchelor, An introduction to fluid dynamics, Cambridge University Press, Cambridge, 2002
16. В. Hewakandamby, A first course in Fluid Mechanics for engineers, Buddhi Hewakandamby& bookboon.com
17. С. Crowe, D. Elger, Engineering Fluid Mechanics, Wiley, Hoboken, 2008
18. В. R. Munson, T. H. Okiishi, W.W. Huebsch, A.P. Rothmayer, Fundamentals of fluid mechanics, Wiley, 2013
19. В. R. Munson, T. H. Okiishi, W.W. Huebsch, A.P. Rothmayer, Fundamentals of fluid mechanics, Wiley, 2013
20. D. F. Young, В. R. Munson, T. H. Okiishi, W.W. Huebsch, A brief introduction to Fluid Mechanics, Wiley, 2011
21. E. Bobok, Fluid mechanics for petroleum engineers, Elsevier, Amsterdam, 1993
22. T E Faber, Fluid Dynamics for Physicists, CUP, Cambridge, 1995

-
23. F. M. White, Fluid Mechanics, McGraw-Hill, 2011
 24. R. Zucker O. Biblarz, Fundamentals of Gas Dynamics, Wiley, Hoboken, 2002
 25. Г. Димић, М. Митриновић, Збирка задатака из физике, виши курс Д, Грађевинска књига, Београд, 1987
 26. Н. Чалуковић, Н. Каделбург, Физика 2, Збирка задатака и тестова за други разред гимназије, Круг, Београд, 1999
 27. Ю.Л. Курбатов, В.И. Шелудченко, В.В. Кравцов, Механика жидкости и газа, Севастополь, Донецк: Вебер, 2002-2003
 28. А.Н. Крайко, А.Б. Ватажин, Г.А. Любимов, Физматлит Год издания: 2003
А.Д. Гиргидов, Техническая механика жидкости и газа, СПбГТУ, 1999
 29. М.А. Мохов, Нефтегазовая микроэнциклопедия, Университет нефти и газа им. И.М. Губкина, 2005
 30. Д.Н.Попов, С.С.Панаиотти, М.В.Рябинин, Гидромеханика МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002
 31. В.А. Винников, Г.Г. Каркашадзе, Гидромеханика, Московский государственный горный университет, 2003
 32. К. С. Басниев, Н. М. Дмитриев, Р. Д. Каневская, В. М. Максимов, Подземная гидромеханика Институт компьютерных исследований, 2006
 33. В.Г. Бабский, Гидромеханика невесомости, Наука, 1976
 34. Т.П. Бебенина, Гидравлика. Техническая гидромеханика. Конспект лекций, УГГУ, 2006
 35. И.Л. Повх, Техническая гидромеханика, Машиностроение, 1976