

Dr. Vladimir Šinik

**ZBIRKA REŠENIH  
ZADATAKA IZ  
AUTOMATSKOG  
UPRAVLJANJA**

**UNIVERZITET U NOVOM SADU  
TEHNIČKI FAKULTET "MIHAJLO PUPIN"  
ZRENJANIN, 2017.**

ISBN 978-86-7672-232-7

**Dr. Vladimir Šinik**

**ZBIRKA REŠENIH  
ZADATAKA IZ  
AUTOMATSKOG  
UPRAVLJANJA**

**189**

**2017/2018**

**Biblioteka udžbenici**

**Univerzitet u Novom Sadu**

**Tehnički fakultet „Mihajlo Pupin“**

**Zrenjanin, 2018. god.**

Dr. Vladimir Šinik

# ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

---

---

Izdavač: Univerzitet u Novom Sadu, Tehnički fakultet „Mihajlo Pupin” u Zrenjaninu

Recezentii: 1. Dr. Slobodan Janković, redovni profesor  
Tehnički fakultet „Mihajlo Pupin“, Zrenjanin  
2. Dr. Dalibor Dobrilović, vanredni profesor  
Tehnički fakultet „Mihajlo Pupin“, Zrenjanin

Računarska obrada: Ivan Palinkaš, dipl.inž

Na sednici Naučno – nastavnog veća Tehničkog fakulteta „Mihajlo Pupin“ iz Zrenjanina, održanoj 15.11.2017., doneta je odluka da se udžbenik ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA štampa za potrebe studenata.

ISBN: 978-86-7672-232-7

CIP - Каталогизација у публикацији

Библиотека Матице српске, Нови Сад 681.51(075.8)(076)

ШИНИК, Владимир

Zbirka rešenih zadataka iz Automatskog upravljanja / Vladimir Šinik.  
- Zrenjanin : Tehnički fakultet "Mihajlo Pupin", 2018. –1 elektronski optički disk (CD-ROM)- (Biblioteka Udžbenici; 189)

Nasl.s naslovnog ekrana. - Bibliografija.

ISBN 978-86-7672-232-7

a) Аутоматско управљање - Задаци

COBISS.SR-ID [325367815](#)

## PREDGOVOR

Ovaj udžbenik namenjen je prvenstveno studentima Tehničkog fakulteta "Mihajlo Pupin" u Zrenjaninu. Predmet Automatsko upravljanje se sluša na sledećim smerovima: Industrijsko inženjerstvo, Mašinsko inženjerstvo, Informacione tehnologije-inženjerstvo, Inženjerstvo zaštite životne sredine, Industrijsko inženjerstvo u eksploataciji nafte i gasa i Informatikai tehnika u obrazovanju

Knjiga "**ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA**" kroz urađene zadatke prati nastavne sadržaje koji su dati u knjizi Automatsko upravljanje.

Kroz urađene zadatke obrađene su sledeće oblasti:

Direktna i inverzna Laplasova transformacija i rešavanje diferencijalnih jednačina pomoću Laplasove transformacije. Posebna pogodnost Laplasove transformacije ogleda se u tome što se ona može savladati i praktično koristiti bez nekih specijalnih zahtevnih matematičkih osnova. Urađeni su zadaci metodom jednakih koeficijenata i primenom Hevisajdove teoreme razvoja.

Prenosna funkcija sistema automatskog upravljanja u kojoj su kroz zadatke obrađeni algebra blok dijagrama, graf toka signala kao vizuelne predstave sistema. Dati su rešeni zadaci koji se odnose na koncept stanja sistema odnosno prostora stanja sistema. Dati su primeri pretvaranja standardizovanih prenosnih funkcija u faktorizovanu formu i formu prostora stanja, odnosno njihovih međusobnih veza koristeći odgovarajuće softverske forme.

Vremenske i frekventne karakteristike sistema date su kroz zadatke koji se odnose na odskočni, impulsni odziv sistema kao i odgovarajuće Bodeove dijagrame. Najvećim delom za dobivanje ovih karakteristika su se koristili odgovarajući softverski alati.

Analiza stabilnosti sistema automatskog upravljanja rađena su kroz zadatke koji se odnose utvrđivanje stabilnosti po Najkvistovom i Bodeovom kriterijumu stabilnosti. Urađeni su zadaci koji se odnose na amplitudni i fazni pretek kao mera relativne stabilnosti sistema. Najvećim delom izrade ovih zadataka je ostvaren takođe koristeći odgovarajuće softverske alate.

Od metoda za sintezu sistema najpre je obrađena metoda sinteze u frekventnom domenu, preko Bodeovih dijagrama. Detaljnije se obrazlaže postupak projektovanja primenom metode geometrijskog mesta korena. Dat

je originalni analitički prilaz sinteze diferencijalnog i integralnog kompenzatora baziran na konvencionalnim grafoanalitičkim metodama, praćen odgovarajućom softverskom podrškom za korišćenje MATLAB-a

# SADRŽAJ

<b>1. MATEMATIČKI MODELI ELEMENATA I SISTEMA.....</b>	<b>7</b>
1.1. Laplasova transformacija .....	7
1.1.1. Laplasova transformacije osnovnih funkcija.....	7
1.1.2. Osnovne teoreme Laplasove transformacije .....	9
1.1.3. Zadaci .....	10
1.2. Inverzna Laplasova transformacija .....	16
1.2.1. Metoda jednakih koeficijenata .....	18
1.2.2. Hevisajdova teorema razvoja .....	21
1.2.3. Rešavanje diferencijalnih jednačina Laplasovom transformacijom .....	36
1.3. Analogije elemenata i sistema .....	49
1.5. Strukturni blok dijagrami sistema .....	56
1.6. Graf toka signala .....	67
1.6.1. Ekvivalentne transformacije grafa toka signala .....	69
1.7. Model sistema u prostoru stanja.....	74
1.8. Funkcije za konverziju jednog sistema u drugi .....	87
<b>2. VREMENSKI I FREKVENTNI ODZIV SISTEMA .....</b>	<b>91</b>
2.1 Određivanje odziva na osnovu prenosne funkcije.....	91
2.1.1 Vremenski odziv elemenata i sistema .....	91
2.1.2. Frekventni odziv elemenata i sistema .....	104
<b>3. STABILNOST SISTEMA .....</b>	<b>120</b>
3.1. Kriterijumi stabilnosti linearnih sistema automatskog upravljanja ..	120
<b>4. KRITERIJUM ZA ANALIZU I SINTEZU SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA .....</b>	<b>149</b>
4.1. Karakteristične veličine za ocenu kvaliteta prenosa ulaznog signala u ustaljenom stanju .....	149
4.2. Karakteristične veličine za ocenu prelazne pojave i relativne stabilnosti sistema.....	151

**5. SINTEZA LINEARNIH SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA ..... 167**

5.1 Sinteza kompenzatora primenom Bodeove metode..... 167

5.2. Sinteza kompenzatora pomoću metode geometrijskog mesta korena.  
..... 180



# 1. MATEMATIČKI MODELI ELEMENATA I SISTEMA

## 1.1. Laplasova transformacija

Pod *direktnom Laplasovom transformacijom* ( $\mathcal{L}$ -transformacijom) smatramo *operator* kojim se neka funkcija  $f(t)$ , definisana u vremenskom području, transformiše u funkciju  $F(s)$  kompleksne varijable  $s = \sigma + j\omega$  prema formuli

(1.1)

A inverzna Laplasova transformacija se određuje po formuli

(1.2)

Za pojedine veličine i oznake u izrazima (1.1) i (1.2) uvode se sledeći termini:

- operator Laplasove transformacije,
- operator inverzne Laplasove transformacije,
- s - kompleksna učestanost ili kompleksna promenljiva Laplasove transformacije
- kompleksni lik funkcije
- original funkcije .

### 1.1.1. Laplasova transformacije osnovnih funkcija

U sledećoj tabeli su date Laplasove transformacije često upotrebljivanih funkcija

Tabela 1.1. [30]

Original	Laplace-ova slika
Dirac-ov impuls: $\delta(t)$ $\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$	1
Step funkcija: $h(t)$ $h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$te^{-at} \cos \omega t$	$\frac{(s+a)^2 - \omega^2}{((s+a)^2 + \omega^2)}$

## 1.1.2. Osnovne teoreme Laplasove transformacije [39]

### Teorema linearnosti.

(1.3)

gde su  $a$  - konstanta, a  $F_1(s)$  i  $F_2(s)$  — kompleksni likovi funkcija  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$ , respektivno.

### Čisto vremensko kašnjenje.

(1.4)

**Pomeranje kompleksnog lika.** Osobina Laplasove transformacije, pogodno se koristi za nalaženje kompleksnih likova funkcija koje sadrže eksponencijalni faktor .

(1.5)

**Teorema o izvodu originala.** Na osnovu definicije Laplasove transformacije sledi da je

\_\_\_\_\_ (1.6)

\_\_\_\_\_ (1.7)

Na sličan način, sukcesivnom primenom parcijalne integracije, može se dobiti kompleksni lik  $n$ -tog izvoda originala

\_\_\_\_\_ (1.8)

**Teorema o integralu originala.** Kompleksni lik integrala funkcije se može neposredno dobiti parcijalnom integracijom definicionog integrala Laplasove transformacije, i na kraju se dobije:

$$\text{---} \quad (1.9)$$

Sukcesivnom primenom parcijalne integracije pokazuje se da je

$$\text{---} \quad (1.10)$$

### Prva granična teorema

$$(1.11)$$

### Druga granična teorema

$$(1.12)$$

## 1.1.3. Zadaci

### Zadatak 1.1

Odrediti Laplasove transformate za sledeće funkcije:

- a)  $y(t) = \delta(t)$ , gdje je sa  $\delta(t)$  označena Dirakova delta funkcija
- b)  $y(t) = h(t)$ , gdje je sa  $h(t)$  označena Hevisajdova funkcija, ili jedinična odskočna funkcija
- v)  $y(t) = th(t)$
- g)  $y(t) = \frac{t^2}{2} h(t)$
- d)  $y(t) = \sin(\omega t)h(t)$
- đ)  $y(t) = \cos(\omega t)h(t)$

### Rešenje:

Prema definiciji Laplasove transformacije imamo:

$$L\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = e^{-s \cdot 0} = 1$$

b) Prema definiciji Laplasove transformacije za Hevisajdovu funkciju imamo:

$$L\{h(t)\} = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 1e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

v) Prema definiciji Laplasove transformacije, te primenom parcijalne integracije, imamo:

$$L\{th(t)\} = \int_0^{\infty} th(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} te^{-st} dt = \left( t = u, dt = du, dv = e^{-st} dt, v = -\frac{1}{s} e^{-st} \right) =$$

$$-\frac{t}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = 0 + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}$$

g) Prema definiciji Laplasove transformacije, te primenom parcijalne integracije, imamo:

$$L\left\{\frac{t^2}{2}h(t)\right\} = \int_0^{\infty} \frac{t^2}{2} h(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{t^2}{2} e^{-st} dt = \left( \frac{t^2}{2} = u, t dt = du, dv = e^{-st} dt, v = -\frac{1}{s} e^{-st} \right) =$$

$$-\frac{t^2}{2s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} te^{-st} dt = 0 + \frac{1}{s} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^3}$$

d) Kako je  $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ , možemo pisati:  $\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$ .

Prema definiciji Laplasove transformacije će biti:

$$L\{\sin(\omega t)h(t)\} = \int_0^{\infty} \sin(\omega t)h(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{2i} e^{-st} dt - \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{2i} e^{-st} dt =$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-(s-i\omega)t}}{2i} dt - \int_0^{\infty} \frac{e^{-(s+i\omega)t}}{2i} dt = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

đ) Kako je  $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ , može se pisati:

$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$ . Prema definiciji Laplasove transformacije imamo:

$$L\{\cos(\omega t)h(t)\} = \int_0^{\infty} \cos(\omega t)h(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{2} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{2} e^{-st} dt =$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-(s-i\omega)t}}{2} dt + \int_0^{\infty} \frac{e^{-(s+i\omega)t}}{2} dt = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

**Zadatak 1.2.**

Odrediti Laplasovu transformaciju sledećih funkcija

a)

b)

c)

[25]

**Rešenje:**

a)

— — — — —

b)

— — — — —

c)

— — — — —

**Zadatak 1.3.** Odrediti Laplasovu transformaciju sledećih funkcija

a)

b)

[25]

**Rešenje:**

a)

— — —

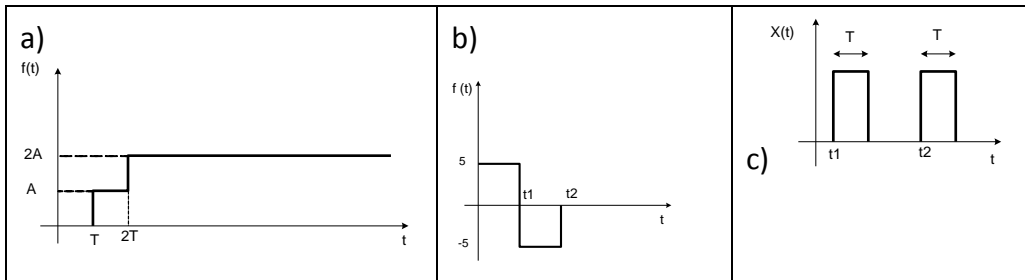
—

b)

— — —

**Zadatak 1. 4.**

Dat je ulazni signal kao na slici:



Poznato je:  $t_1=2$  s,  $t_2=7$  s,  $T=3$  s,  $A=5$

Odrediti sliku zadatog signala, i proveriti da li je dobar original koristeći naredbe MATLAB-a

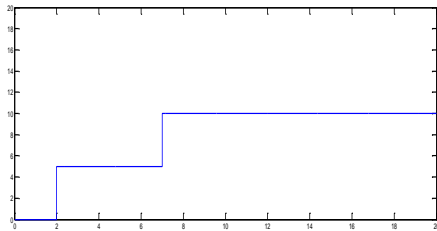
**Rešenje:**

```

syms s t;
T=3;
A=5;
w=A*heaviside(t-T)+A*heaviside(t-2*T)
g=laplace(w)
f=ilaplace(g)
t = 0:0.001:15;
plot(t,f)

```

$$\begin{aligned}
w &= 5*\text{heaviside}(t - 3) + 5*\text{heaviside}(t - 6) \\
g &= \frac{5}{(s*\exp(3*s))} + \frac{5}{(s*\exp(6*s))} \\
f &= 5*\text{heaviside}(t - 3) + 5*\text{heaviside}(t - 6)
\end{aligned}$$





```

syms s t;

t1=2;
t2=7;

w=5*heaviside(t)-10*heaviside(t-
t1)+5*heaviside(t-t2)

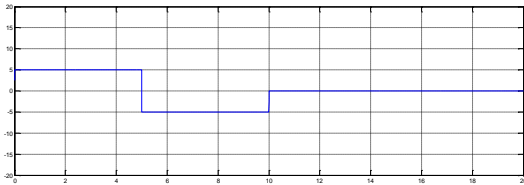
g=laplace(w)

f=ilaplace(g)

t = 0:0.001:15;

plot(t,f)

```



```

w =
5*heaviside(t - 7) -
10*heaviside(t - 2) +
5*heaviside(t)

g =
5/(s*exp(7*s)) -
10/(s*exp(2*s)) + 5/s

f =
5*heaviside(t - 7) -
10*heaviside(t - 2) + 5

```

```

syms s t;

T=3;
A=5;

w=A*heaviside(t-t1)-A*heaviside(t-t1-
T)+A*heaviside(t-t2)-A*heaviside(t-t2-T)

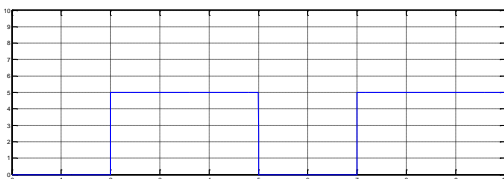
g=laplace(w)

f=ilaplace(g)

t = 0:0.001:15;

plot(t,f)

```



```

w =
5*heaviside(t - 2) -
5*heaviside(t - 5) +
5*heaviside(t - 7) -
5*heaviside(t - 10)

g =
5/(s*exp(2*s)) -
5/(s*exp(5*s)) +
5/(s*exp(7*s)) -
5/(s*exp(10*s))

f =
5*heaviside(t - 2) -
5*heaviside(t - 5) +
5*heaviside(t - 7) -
5*heaviside(t - 10)

```

## 1.2. Inverzna Laplasova transformacija

Nekada se pojavljuje potreba da se iz algebarske jednačine odredi funkcija  $f(t)$  koja predstavlja originalnu zakonitost kretanja sistema. To se može ostvariti pomoću inverzne Laplasove transformacije koja predstavlja kompleksni lik neke funkcije  $F(s)$  i transformiše se u original  $f(t)$ , što se simbolički označava sa:

$$\{ F(s) \} =$$

Inverzna Laplasova transformacija zasniva se na integralu

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

Integraljenje se vrši duž prave  $\text{Re}(s) = \sigma$  izabrane tako da se svi polovi funkcije  $F(s)$  nalaze levo od nje. U svim slučajevima od interesa u automatskom upravljanju funkcija  $F(s)$  se može prikazati u obliku racionalne razlomljene funkcije:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

gde su  $P(s)$  i  $Q(s)$  polinomi po  $s$ , pri čemu je stepen polinoma u brojiocu manji ili jednak stepenu polinoma u imeniocu ( $m \leq n$ ). Nule polinom  $P(s)$  i  $Q(s)$  nazivaju se nule i polovi funkcije  $F(s)$ . Pošto su  $P(s)$  i  $Q(s)$  polinomi sa realnim koeficijentima, njihove nule, odnosno nule i polovi funkcije  $F(s)$  mogu biti ili realni, ili u konjugovano kompleksnim parovima. Tada se inverzna Laplasova transformacija može naći razvojem funkcije  $F(s)$  u parcijalne razlomke (Heaviside - ov razvoj) ili primenom Košijeve teoreme ostataka. U mnogim slučajevima inverzna Laplasova transformacija može se naći u tablicama Laplasovih transformacionih parova [39].

### Zadatak 1.5

Odrediti original  $f(t)$  funkcija datih svojim kompleksnim likovima [25]

a) —

b) —

c) —

d) —

e) —

**Rešenje:**

Direktno iz tablica Laplasovih transformacija dobija se:

a)

—

b)

—

c)

—————

d)

—————

—————

e)

—

[25]

### 1.2.1. Metoda jednakih koeficijenata

#### Zadatak 1.6

Zadata je slika nekog sistema  $\text{---}$ . Odrediti original za zadanu sliku.

#### Rešenje:

Rastavljanjem na proste činioce poznatom metodom jednakih koeficijenata se dobiva:

$$\frac{\text{---}}{\text{---}}$$

Iz ovih izraza dobija se:

$$\frac{\text{---}}{\text{---}}$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije dobija se uz pomoć izraza iz tablice:

$$\text{---}$$

### Zadatak 1.7

Zadata je slika nekog sistema , potrebno je naći original koristeći inverznu Laplasovu transformaciju [18]

\_\_\_\_\_

**Rešenje:**

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ - - - - \_\_\_\_\_

Primenom metode jednakih koeficijenata dobija se:

Iz ovih izraza dobija se:

\_\_\_\_\_ - - - - \_\_\_\_\_ - - - - \_\_\_\_\_

- - - - \_\_\_\_\_

- - - - \_\_\_\_\_

Primenom inverzne Laplasove transformacije dobija se uz pomoć izraza iz tabele 1.1:

### Zadatak 1.8

Odrediti inverznu Laplasovu transformaciju za sistem čija je prenosna funkcija [18]:

**Rešenje:**

Prenosnu funkciju predstavimo u vidu zbira parcijalnih razlomaka:

Koeficijente A, B, C, D određujemo izjednačavajući koeficijente uz odgovarajuće stepene promenljive :

$$\frac{\quad}{\quad} = \left( \frac{\quad}{\quad} + \left( \frac{\quad}{\quad} = \right. \right.$$

(A+C)

Na osnovu ovoga dobijamo sledeće jednačine:

- (1) A+C=0
- (2) 2A+B+2C+D=1
- (3) 5A+2B+2C+2D=2
- (4) 5B+2D=3

Rešavanjem ovog sistema jednačina dobijaju se sledeće vrednosti za koeficijente A, B, C, D:

$$A=0, B=1/3, C=0, D=2/3$$

Prenosna funkcija sada je:

$$\frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} - \left[ \frac{\quad}{\quad} \right] + - \left[ \frac{\quad}{\quad} \right] - \left[ \frac{\quad}{\quad} \right] + - \left[ \frac{\quad}{\quad} \right] -$$

Koristimo osobinu da je  $[F(s - a)] = \dots$

$$- \left[ \frac{\quad}{\quad} \right] + - \left[ \frac{\quad}{\quad} \right]$$

Na osnovu osnovnih osobina Laplasove transformacije dobije se original za zadanu sliku.

$$- \quad + -$$

$$-$$

### Zadatak 1.9

Odrediti funkciju inverznom Laplasovom transformacijom datog kompleksnog lika [18]:

$$= \frac{\quad}{\quad}$$

**Rešenje:**

$$= \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} =$$

Izjednačavanjem koeficijenata u brojiocu dobijamo sistem jednačina:

$$A+B=3$$

$$2A+3B+C=9$$

$$2A+3C=5$$

Rešenje dobijenog sistema jednačina je: A=1, B=2, C=1. Uvrštavanjem rešenja u parcijalne razlomke dobijamo:

$$\frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad}$$

Preuređivanjem drugog člana dobijamo formu čija se inverzna Laplasova transformacija može se odrediti tabelarno:

$$\frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\quad}{\quad}$$

Na osnovu tabelarnih vrednosti dobijamo:

### 1.2.2. Hevisajdova teorema razvoja

Ako je  $F(s)$  racionalna funkcija oblika:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

gde su  $P(s)$  i  $Q(s)$  polinomi po  $s$ . Stepen polinoma  $P(s)$  manji je od stepena polinoma  $Q(s)$ , onda bi iznalaženje funkcije  $f(t)$  primenom inverzne Laplasove transformacija uz pomoć pravila za rastavljanje racionalne funkcije  $F(s)$  na proste razlomke metodom jednakih koeficijenata bilo dosta komplikovano.

Ovaj problem se može znatno pojednostaviti primenom Hevisajdove teoreme razvoja.

Hevisajdova teorema razvoja polazi od toga da se nalaženjem korenova jednačine  $Q(s) = 0$ , koji se mogu označiti sa  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , polinom  $Q(s)$  može se napisati u obliku:

$$Q(s) = (s - s_1)(s - s_2)\dots(s - s_{n-1})(s - s_n)$$

pa jednačina postaje:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s - s_1)(s - s_2)\dots(s - s_n)}$$

Vrednosti  $s_1, s_2, \dots, s_n$  za koje polinom  $Q(s)$  postaje ravan nuli, odnosno za koje  $F(s)$  postaje beskonačna nazivaju se nulama imenioca i predstavljaju polove funkcije  $F(s)$  [39].

**1. Slučaj: kada sa svi polovi realni i prosti.** Ako su svi koreni  $s_1, s_2, \dots, s_n$  jednačine  $Q(s) = 0$  realni i prosti, kompleksni lik se može napisati u faktorizovanom obliku

$$Q(s) = (s - s_1)(s - s_2)\dots(s - s_n)$$

koji razvijamo u parcijalne razlomke

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \dots + \frac{A_n}{s - s_n}$$

gde su  $A_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) koeficijenti [ostaci funkcije  $F(s)$  u polovima  $s_1, s_2, \dots, s_n$ ], koje treba odrediti.

Množeći levu i desnu stranu poslednjeg izraza sa  $(s - s_k)$  i zatim u tako dobijen izraz stavljajući  $s = s_k$ , na osnovu poslednjeg izraza dobijamo relaciju



---

kojom su određeni svi koeficijenti  $K_k$ . Ovaj postupak postaje u primeni jednostavan kada je  $Q(s)$  dato u faktorizovanom obliku.

Međutim, ovi koeficijenti se mogu odrediti i kad  $Q(s)$  nije faktorizovano. Naime, poslednja formula se može napisati kao

---

Kada  $s = s_k$ , poslednji izraz postaje neodređen ( $0/0$ ) jer  $Q(s)$  sadrži faktor  $(s - s_k)$ . Zbog toga treba primeniti pravilo Lopitala, posle čega se na kraju dobija

---

Zamenom dobijenih vrednosti za koeficijente  $K_k$ , se dobija

---

Za nalaženje inverzne Laplasove transformacije na osnovu poslednjeg izraza uočimo da svi članovi na desnoj strani poslednjeg izraza predstavljaju kompleksne likove eksponencijalnih funkcija. Na osnovu tabele 1.1 i osobine aditivnosti Laplasovog operatora neposredno dobijamo

---

Pokazani postupak nalaženja inverzne Laplasove transformacije poznat je kao Hevisajdov razvitak [39].

### **Zadatak 1.10**

Naći original odnosno inverznu Laplasovu transformaciju za datu prenosnu funkciju [25]:

---

**Rešenje:**

Primenom Hevisajdovog razvoja, prenosna funkcija se može napisati u obliku (slučaj kada sa svi polovi realni i prosti):

Koeficijenti su:  $\frac{\text{---}}{\text{---}}$

Tada je:  $\text{---} + \text{---}$ ,

Na osnovu tabele Laplasove transformacije, original za zadanu sliku je:

**Zadatak 1.11**

- a) Naći original odnosno inverznu Laplasovu transformaciju za datu prenosnu funkciju:

$\text{---}$

- b) Naći original odnosno inverznu Laplasovu transformaciju za datu prenosnu funkciju:

$\text{---}$

**Rešenje:**

- a) Prenosna funkcija ima tri realna i prosta korena (  $\dots$  ), tako da koeficijente (  $i=1, 2, 3$  ) određujemo po gore datim obrascima za ovaj slučaj, a zadanu sliku razvijamo u parcijalne razlomke

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} + \text{---}$$

$$= \text{---} = \text{---} = -1$$

$$= \text{---} = \text{---} = 7$$

$$= \frac{6}{s^2 + 7s - 6} = \frac{6}{(s+8)(s-1)}$$

Na osnovu tablica Laplasove transformacije, original za zadanu sliku je:

$$= \frac{6}{(s+8)(s-1)} = \left( \frac{-1}{s+8} + \frac{7}{s-1} \right)$$

b) Zadatak rešavamo primenom Hevisajdovog razvoja, tj. koristeći formulu:

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)} = \frac{1}{b-a} \left( \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b} \right), t > 0$$

$$= \frac{6}{(s+8)(s-1)} = \frac{6}{(s-(-8))(s-1)}$$

$$= \frac{6}{(-8-1)(s-(-8))} - \frac{6}{(-8-1)(s-1)}$$

$$= \frac{6}{-9} \left( \frac{1}{s+8} - \frac{1}{s-1} \right) = -\frac{2}{3} \left( \frac{1}{s+8} - \frac{1}{s-1} \right)$$

$$= -\frac{2}{3} \left( \frac{1}{s+8} - \frac{1}{s-1} \right) = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+8} \right)$$

$$= \frac{2}{3} \left( \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+8} \right) = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+8} \right)$$

Vidi se da su rešenja ista u oba slučaja jer se radi o istoj prenosnoj funkciji samo što u slučaju b imenilac nije faktorizovan [25]

### Zadatak 1.12

Naći original odnosno inverznu Laplasovu transformaciju za datu prenosnu funkciju sistema [25]:

$$\frac{6}{s^2 + 7s - 6}$$

**Rešenje:**

Kao u prethodna dva zadatka razvijamo u parcijalne razlomke, a koeficijente određujemo na osnovu napred date formule.

$$\frac{\text{-----}}{\text{-----}} = \frac{\text{-----}}{\text{-----}} + \frac{\text{-----}}{\text{-----}} + \frac{\text{-----}}{\text{-----}}$$

Na osnovu tabele Laplasove transformacije, original za zadanu sliku je:

$$\text{-----}$$

**Zadatak 1.13**

Odrediti original f(t) funkcija datih svojim kompleksnim likovima

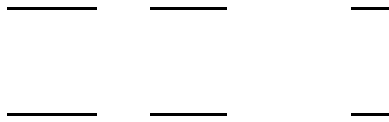
a)  $\frac{\text{-----}}{\text{-----}}$

b)  $\frac{\text{-----}}{\text{-----}}$

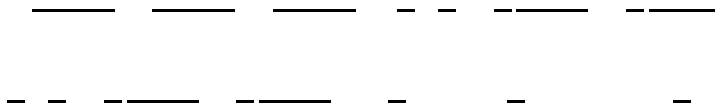
**Rešenje:**

a) Vidi se da imenioci nisu faktorizovani, pa se koristi obrazac koji je dat za ovaj slučaj

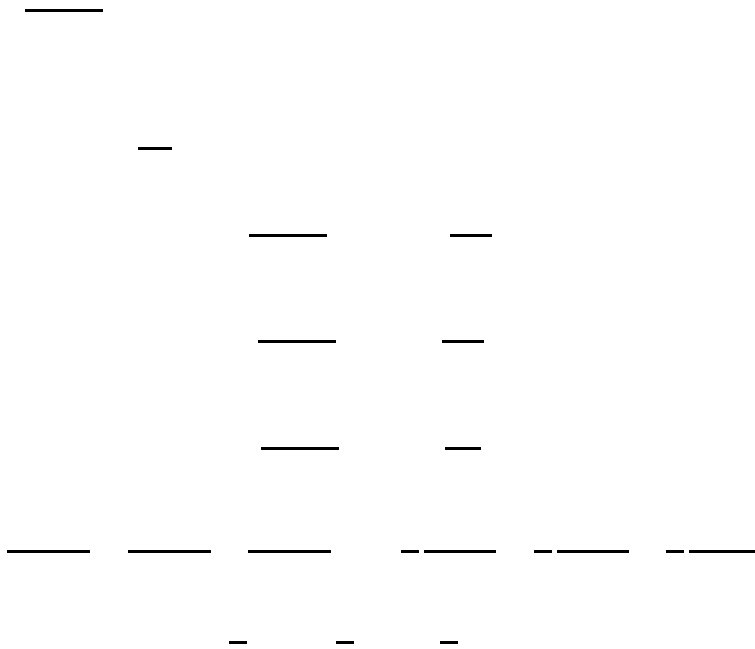
$$\frac{\text{-----}}{\text{-----}} = \frac{\text{-----}}{\text{-----}} + \frac{\text{-----}}{\text{-----}} + \frac{\text{-----}}{\text{-----}}$$



Prema tome:



b)



**2. Slučaj: kada postoje konjugovano kompleksni polovi.** Za ilustraciju nalaženja originala  $f(t)$  kada postoje parovi konjugovano kompleksnih polova lika  $F(s)$ , pretpostavićemo da jednačina  $Q(s) = 0$  ima samo jedan par konjugovano kompleksnih polova  $(= )$ , a da su ostali koreni,  $, \dots$ , realni i prosti. Tada je

Usvojimo da je  $s_1 = -\alpha + j\omega$  ili  $s_2 = -\alpha - j\omega$ . Može se lako pokazati da će i ostaci u konjugovano kompleksnim polovima biti takode konjugovano kompleksni, tj. ako je, na primer,  $K_1 = a + jb$ , tada je  $K_2 = a - jb$ . Prema tome,  $F(s)$  postaje

Koeficijenti  $K_k$  ( $k=3, 4, \dots, n$ ) su određeni relacijom napred navedenoj. Ista relacija se može koristiti i za sračunavanje koeficijenta  $K_1$ , koji će u opštem slučaju biti kompleksan broj. Naime,

gde su, kao što se vidi,  $a = \text{Re } K_1$  i  $b = \text{Im } K_1$ . Prema gore datim izrazima dobijamo

Zatim, na osnovu tablica Laplasa,  $f(t)$  postaje

Konačno, pomoću poznatog trigonometrijskog identiteta, prethodni izraz se može napisati u obliku

gde je  $\psi = \text{arctg}(b/a)$  [39].

**Zadatak 1.14**

Određiti original  $f(t)$  funkcije date svojim kompleksnim likom [25]

**Rešenje:**

\_\_\_\_\_

Ovde se javlja slučaj konjugativno-kompleksnih polova jednačine višestrukosti (prosti). Koristeći elementarne trigonometrijske relacije, taj izraz može se prevesti na sledeći oblik:

\_\_\_\_\_

gde su:

\_\_\_\_\_

-

Prema tome, ceo zadatak se svodi na nalaženje rezidijuma  $K_1$ , odnosno realnog dela  $a$  i imaginarnog dela  $b$ .

\_\_\_\_\_

-

-

\_\_\_\_\_

**3. Slučaj: kad postoje višestruki polovi.** Ilustrovaćemo ovaj slučaj na primeru kada  $F(s)$  ima trostruki pol  $s=s_1$ . Ostali polovi  $s_4, s_5, \dots, s_n$  su svi realni i prosti. Tada se izraz za  $F(s)$  može razviti u parcijalne razlomke, kao

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Da odredimo koeficijente  $K_{11}, K_{12}$  i  $K_{13}$ , pomnožimo levu i desnu stranu ovog izraza sa  $(s - s_1)^3$ , posle čega dobijamo [39]

$$\frac{1}{(s - s_1)^2}$$

Stavljajući  $s = s_1$  u poslednji izraz, imamo

$$\frac{1}{2}$$

Za određivanje  $K_{12}$  prethodno treba diferencirati gore dati izraz po  $s$  pa zatim uvrstiti u tako dobijen izraz  $s = s_1$ . Tako se dobija da je

$$-\frac{1}{(s - s_1)^3}$$

Na sličan način, zamenom  $s = s_1$  u izraz dobijen posle dvostrukog diferenciranja po  $s$ , izračunava se

$$\frac{1}{2}$$

Istim rezonovanjem se može dobiti opšti izraz za koeficijente  $K_m (m=1, 2, \dots, p)$  uz višestruki pol  $s=s_r$ , višestrukosti  $p$

$$\frac{1}{(s - s_r)^m}$$

Pošto smo odredili koeficijente  $K_{11}, K_{12}$  i  $K_{13}$ ,  $f(t)$  postaje

$$\frac{1}{2} e^{s_1 t} + \frac{1}{2} t e^{s_1 t} + \frac{1}{2} e^{s_2 t}$$

što se, pomoću teoreme o izvodu kompleksnog lika, može napisati kao [39]

$$\frac{1}{2} e^{s_1 t} + \frac{1}{2} t e^{s_1 t} + \frac{1}{2} e^{s_2 t}$$

**Zadatak 1.15.** Odrediti original  $f(t)$  funkcija datih svojim kompleksnim likovima [25]

a)  $\frac{1}{(s - s_1)^2}$



b) \_\_\_\_\_

**Rešenje:**

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

b)

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

$$\frac{1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{1}{(s+1)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{(s+1)^2 + 1} = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} = \frac{1}{(s+1)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{(s+1)^2 + 1} = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} = \frac{1}{(s+1)^2 + 1}$$

**Zadatak 1.16**

Odrediti inverznu Laplasovu transformaciju funkcija:

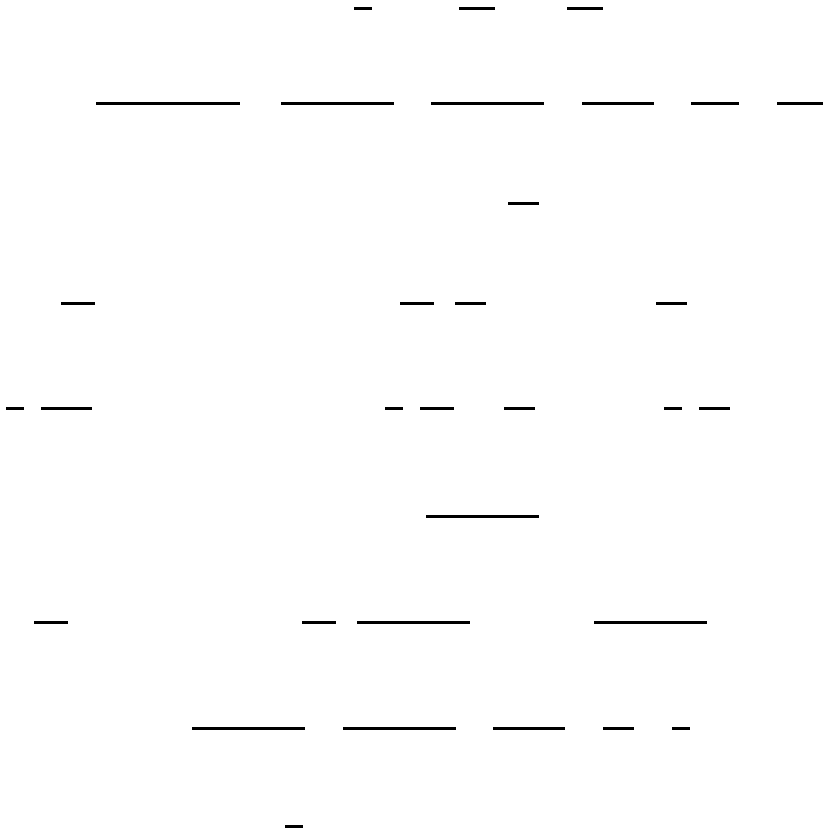
$$\frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

**Rešenje:**

$$\frac{1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{1}{(s+1)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{(s+1)^2 + 1} = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} = \frac{1}{(s+1)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{(s+1)^2 + 1} = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} = \frac{1}{(s+1)^2 + 1}$$



**Zadatak 1.17**

Odrediti inverznu Laplasovu transformaciju ako je data prenosna funkcija:

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^3}$$

**Rešenje:**

Prenosna funkcija  $F(s)$  ima jedan realan prost pol  $s = -1$  i trostruki pol  $s = -2$ . Napisana u obliku zbira parcijalnih razlomaka prenosna funkcija  $F(s)$  je:

$$F(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2} + \frac{D}{(s+2)^3}$$

Koeficijente  $A, B, C, D$  određujemo na osnovu formule:

$$A = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)F(s)$$

1, 2, ..., k

je višestruki pol.

Pol  $s = 2$  je trostruki pol, tako da je  $s = 1, 2, 3$ .

$$m = 1: \frac{1}{s-2} = \frac{1}{s-2} \cdot \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s-3} = \frac{1}{(s-2)(s-1)(s-3)}$$

$$m = 2: \frac{1}{(s-2)^2} = \frac{1}{(s-2)^2} \cdot \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s-3} = \frac{1}{(s-2)^2(s-1)(s-3)}$$

$$m = 3: \frac{1}{(s-2)^3} = \frac{1}{(s-2)^3} \cdot \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s-3} = \frac{1}{(s-2)^3(s-1)(s-3)}$$

$$\frac{1}{(s-2)^3(s-1)(s-3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{(s-2)^2} + \frac{E}{(s-2)^3}$$

$$[ \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-3} + \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2} ]$$

određivanje inverzne Laplasove transformacije koristimo sledeće parove Laplasovih transformacija:

F(s)

$$\frac{1}{s-n} \rightarrow e^{nt} \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$\frac{1}{(s-n)^2} \rightarrow te^{nt} \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$\frac{1}{(s-n)^3} \rightarrow \frac{1}{2}t^2e^{nt} \quad n=1, 2, 3, \dots$$

**Zadatak 1.18.**

Odrediti original f(t) funkcije date svojim kompleksnim likom

$$\frac{1}{(s-2)^3(s-1)(s-3)}$$

**Rešenje:**

\_\_\_\_\_

Ovde se javlja slučaj višestrukih konjugovano-kompleksnih polova. Za određivanje rezidijuma najpogodnije je koristiti sledeći obrazac

\_\_\_\_\_ . \_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_

1, 2..... k

je višestruki pol.

\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_

-

\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_ -

\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_

-

\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_

-

odnosno:

- \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_

$$\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s}$$

Ovo su tablični slučajevi, tako da je:

$$\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

### 1.2.3. Rešavanje diferencijalnih jednačina Laplasovom transformacijom

#### Zadatak 1.19

Rešiti diferencijalnu jednačinu:

$$y'' + y = 0$$

za početne uslove:

#### Rešenje:

Najpre primenjujemo Laplasovu transformaciju na levu i desnu stranu date diferencijalne jednačine, koristeći pri tome osobinu linearnosti:

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = 0$$

Kada se nađu Laplasove transformacije pojedinih članova u gornjoj jednačini, uz korišćenje pravila o transformaciji izvoda, dobija se:

gde je:

Zamenom početnih uslova u prethodnu jednačinu, dobija se:

Ovo je algebarska jednačina koja daje vezu između zavisno promenljive  $X(s)$  i Laplasove promenljive  $s$ .

Njenim rešavanjem po  $X(s)$  se dobija:

\_\_\_\_\_

što predstavlja rešenje polazne diferencijalne jednačine u Laplasovom domenu. Da bi se dobilo rešenje u vremenskom domenu treba naći inverznu Laplasovu transformaciju ovog izraza. U tom cilju treba prvo izvršiti faktorizaciju polinoma u imeniocu.

Nule polinoma u imeniocu su  $s_1=-1$  i  $s_2=-2/3$ , tako da se gornja jednačina može napisati u obliku:

\_\_\_\_\_

Prikazaćemo dva načina za određivanje konstanti  $A$  i  $B$ :

*I način:* korišćenjem jednačine o Hevisajdovom razvoju

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

*II način:* metodom jednakih koeficijenata:

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Brojilac ovog izraza mora da bude identično jednak 0.5, što znači da mora da bude zadovoljen sledeći sistem jednačina:

$$A+B = 0$$

$$2/3A + B = 0.5$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina dobija se:

$$A = -1.5, \quad B = 1.5$$

Sada smo dobili rešenje jednačine u Laplasovom domenu  $X(s)$ , kao zbir dva parcijalna razlomka:

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots}$$

za koje je jednostavno naći inverznu Laplasovu transformaciju, korišćenjem tabele 1.1:

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} - \frac{\dots}{\dots}$$

Rešenje polazne diferencijalne jednačine, za date početne uslove je:

$$-$$

**Zadatak 1.20**

Rešiti diferencijalnu jednačinu:

$$\dots$$

Za početne uslove

**Rešenje:**

Primenom Laplasove transformacije na levu i desnu stranu gornje jednačine:

$$\dots$$

I zamenom početnih uslova, dobija se:

$$-$$

Rešenje polazne diferencijalne jednačine u Laplasovom domenu je:

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots}$$

Opet ćemo prikazati dva načina nalaženja inverzne Laplasove transformacije ovog izraza.



*I način:* Izvršićemo potpunu faktorizaciju polinoma u imeniocu i prikazati  $X(s)$  u obliku zbira parcijalnih razlomaka:

$$\frac{\text{-----}}{\text{-----}}$$

Koeficijente  $A$ ,  $B$  i  $C$  ćemo odrediti korišćenjem jednačine date u uvodnom delu ovog poglavlja:

$$\frac{\text{-----}}{\text{-----}} = \frac{\text{-----}}{\text{-----}} + \frac{\text{-----}}{\text{-----}} + \frac{\text{-----}}{\text{-----}}$$

Tako da se  $X(s)$  dobija kao sledeći zbir parcijalnih razlomaka:

Primenom inverzne Laplasove transformacije, dobija se:

$$\text{-----}$$

Ovaj izraz se može pojednostaviti, jer zadnja dva člana mogu da se prikažu kao  $\cos(t/5)$ :

$$\text{-----}$$

*II način:* Kada se u imeniocu javlja kvadratni član čiji su koreni kompleksni, uobičajeno je da se funkcija prikaže u obliku zbira parcijalnih razlomaka sledećeg oblika:

$$\text{-----}$$

Svođenjem ovog izraza na zajednički imenilac:

$$\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

i na osnovu činjenice da brojilac ovako dobijenog izraza mora da bude identično jednak  $1/25$ , dobija se sledeći sistem od tri jednačine kojima su definisane vrednosti konstanti  $A, B$  i  $C$ :

$$A + B = 0, \quad C = 0, \quad - \quad -$$

Čijim se rešavanjem dobija:

$$A=1, \quad B=-1, \quad C=0$$

Sada se  $X(s)$  može napisati u obliku:

$$- \quad \frac{\quad}{\quad}$$

Rešenje polazne diferencijalne jednačine u vremenskom domenu može se dobiti traženjem inverzne Laplasove transformacije ovog izraza član po član, direktno na osnovu pregleda tablica Laplasovih transformacija (tabela 1.1):

$$- \quad \frac{\quad}{\quad} \quad -$$

### Zadatak 1.21

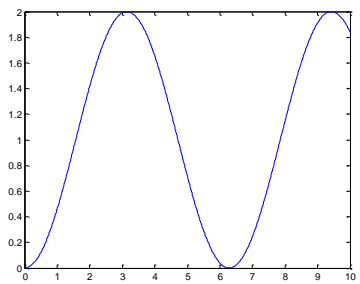
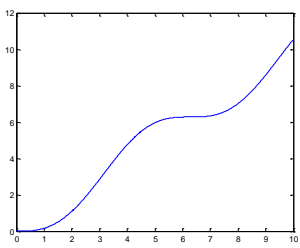
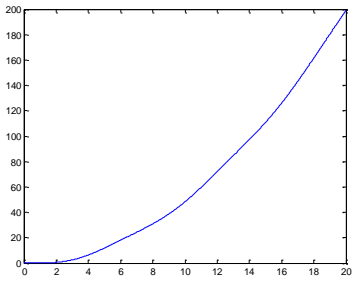
Metodom Laplasove transformacije odrediti i nacrtati odziv sistema zadatog diferencijalnom jednačinom, sa nultim početnim uslovima:

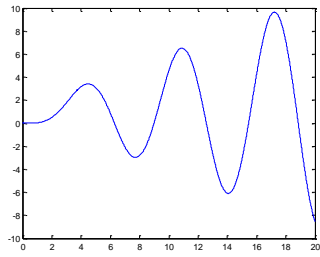
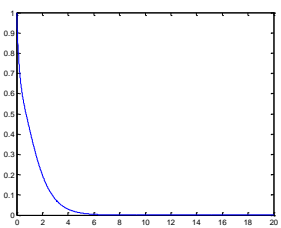
$$\frac{d^3 y}{dt^3} + \frac{dy}{dt} = x(t) \text{ gde je:}$$

- a)  $x(t) = \delta(t)$
- b)  $x(t) = h(t)$
- c)  $x(t) = t$
- d)  $x(t) = \sin(t)$

II. Metodom Laplasove transformacije rešiti diferencijalnu jednačinu  $d^2y/dt^2 + 3dy/dt + 2y(t) = 5e^{-4t}$  uz  $y(0) = 1$  i  $y'(0) = -2$ , te nacrtati  $y(t)$  za  $t=[0,10]$  sa obeleženim koordinatama.

**Rešenje:**

<p>I</p> <p>Određićemo Laplasovu transformaciju zadane jednačine:</p> $s^3Y(s) + sY(s) = X(s)$ $Y(s) = X(s)/(s^3 + s)$ <p>a)</p> $y=1/(s^3+s)$ $g=ilaplace(y)$ $t=0:0.01:10;$ $plot(t,g)$	<p>g =</p> $1 - \cos(t)$ 
<p>b)</p> $y=1/(s^4+s^2)$ $g=ilaplace(y)$ $t=0:0.01:10;$ $plot(t,g)$	<p>g = t - sin(t)</p> 
<p>c)</p> $y=1/(s^5+s^3)$ $g=ilaplace(y)$ $t=0:0.01:10;$ $plot(t,g)$	<p>g =</p> $\cos(t) + t^2/2 - 1$ 

<p>d)</p> <pre> y=1/(s^5+2*s^3+s) g=ilaplace(y) t=0:0.01:10; plot(t,g) </pre>	<p>g =</p> $1 - \frac{t \cdot \sin(t)}{2} - \cos(t)$ 
<p>II</p> <pre> &gt;&gt; syms s t; &gt;&gt; ilaplace((s^2+5*s+9)/((s+1)(s+2)(s+4))) ans = 6/5*exp(-4*t)-3/2*exp(-2*t)+5/3*exp(-t)  &gt;&gt; t=0:0.1:15; &gt;&gt; y=5/6*exp(-4*t)-3/2*exp(-2*t)+5/3*exp(-t); &gt;&gt; plot(t,y) &gt;&gt; xlabel('t(sec)') &gt;&gt; ylabel('y(t)') </pre>	<p>g =</p> $\frac{1}{5} \exp(4t) - \frac{\exp(t)}{5} + 5t \exp(t)$ 

### Zadatak 1.22

Rešiti diferencijalnu jednačinu primenom Laplasove transformacije ako su početni uslovi , a pobuda je nagibna funkcija

+

### Rešenje:

Najpre primenjujemo Laplasovu transformaciju na levu i desnu stranu date diferencijalne jednačine, koristeći pri tome osobinu linearnosti:

Pobuda je nagibna funkcija \_\_\_\_\_, pa je njena Laplasova transformacija \_\_\_\_\_.

Zamenom početnih vrednosti i jednačine postaje:

$$\frac{1}{s^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s+3}$$

Metodom jednakih koeficijenata se dobiva sledeći sistem jednačina:

$$B+C=1$$

$$A+D=-2$$

$$B=0$$

$$A=1$$

Rešenje dobijenog sistema jednačina je:  $A=1, B=0, C=1, D=-3$ .

$$\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{3}{s+3}$$

Rešenje polazne diferencijalne jednačine u vremenskom domenu može se dobiti traženjem inverzne Laplasove transformacije ovog izraza član po član, direktno na osnovu pregleda tablica Laplasovih transformacija (tabela 1.1):

$$=$$

### Zadatak 1.23

Rešiti diferencijalnu jednačinu primenom Laplasove transformacije, ako su početni uslovi \_\_\_\_\_.

$$-3 \quad +2$$

**Rešenje:**

Primenom Laplasove transformacije na datu diferencijalnu jednačinu, dobija se:

Kada se nađu Laplasove transformacije pojedinih članova u gornjoj jednačini, uz korišćenje pravila o transformaciji izvoda, i zadate početne uslove dobija se:

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Ovo je algebarska jednačina koja daje vezu između zavisno promenljive  $Y(s)$  i Laplasove promenljive  $s$ .

\_\_\_\_\_

Njenim rešavanjem po  $Y(s)$  se dobija:

\_\_\_\_\_

što predstavlja rešenje polazne diferencijalne jednačine u Laplasovom domenu. Da bi se dobilo rešenje u vremenskom domenu treba naći inverznu Laplasovu transformaciju ovog izraza. U tom cilju treba prvo izvršiti faktorizaciju polinoma u imeniocu.

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Koeficijenti A, B, C su:

$$A=7, B=4, C=4$$

\_\_\_\_\_

Rešenje polazne diferencijalne jednačine u vremenskom domenu može se dobiti traženjem inverzne Laplasove transformacije ovog izraza član po član, direktno na osnovu pregleda tabele Laplasovih transformacija (tabela 1.1):

### Zadatak 1.24

Data je diferencijalna jednačina sistema:

$$+ 0.3 \quad + 0.02 y = 0.6 x$$

Naći odziv sistema na nagibnu ulaznu funkciju i nulte početne uslove.

—

————— —

— — — —

Na osnovu tabelarnih vrednosti dobijamo:

### Zadatak 1.28

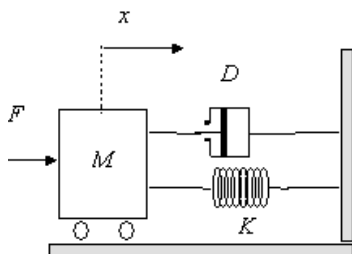
Za mehanički sistem na slici. dato je:

$M=20$  kg,

$f(t) = F \sin \omega t$ ,  $F = 20$  N,  $\omega = 2$  rad/sec

, početni uslovi kretanja: početni položaj je 0 m, početna brzina je 2 m/sec.  $K=40$

kg/sec<sup>2</sup>,  $D= 60$  kg/sec.



- formirati model tj. napisati diferencijalnu jednačinu koja opisuje dinamiku posmatranog sistema,
- odrediti i nacrtati zakon kretanja  $x(t)$  za telo koje se nalazi u sistemu na slici.

**Rešenje:**

Dato je

Početni uslovi kretanja:

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



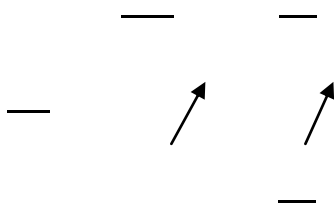
Primenom zakona dinamike za translatorni mehanički sistem dobija se:

\_\_\_\_\_

Diferencijalna jednačina kretanja sistema sa slike je:

\_\_\_\_\_

Primenom direktne Laplasove transformacije i zadatih početnih uslova diferencijalna jednačina postaje:



\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Ovo je algebarska jednačina koja daje vezu između zavisno promenljive  $Y(s)$  i Laplasove promenljive  $s$ .

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

$$\frac{\underline{\hspace{2cm}}}{\underline{\hspace{2cm}} \underline{\hspace{2cm}}}$$

Njenim rešavanjem po  $Y(s)$  se dobija:

$$\underline{\hspace{4cm}}$$

što predstavlja rešenje polazne diferencijalne jednačine u Laplasovom domenu. Da bi se dobilo rešenje u vremenskom domenu treba naći inverznu Laplasovu transformaciju ovog izraza. U tom cilju treba prvo izvršiti faktorizaciju polinoma u imeniocu

$$\underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \underline{\hspace{1cm}}$$

Metodom jednakih koeficijenata se dobivaju sledeći sistem jednačina:

—

—

—

—

— — — — — — — —

Rešenje polazne diferencijalne jednačine u vremenskom domenu može se dobiti traženjem inverzne Laplasove transformacije ovog izraza član po član, direktno na osnovu pregleda tabele Laplasovih transformacija (tabela 1.1):

— — — — — — — —

— — — —

— — — — — — — —

— — — —

— — — — — — — —

—

Dobiveni zakon kretanja sistema je:

— — — — — — — —

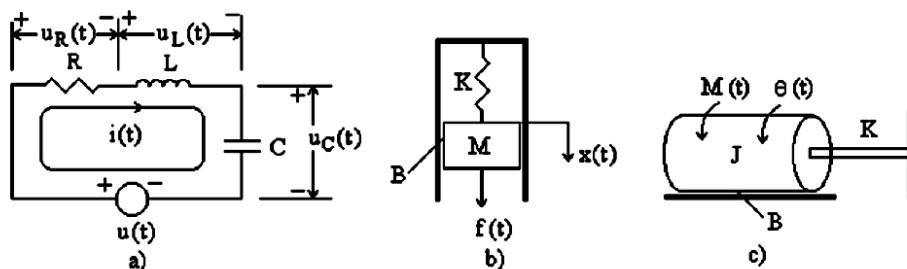
— — — —

### 1.3. Analogije elemenata i sistema

#### Zadatak 1.29

Serijsko RLC kolo i analogni mehanički sistemi, translacioni i rotacioni, pokazani su na slici 1.3. napisati diferencijalne jednačine koje opisuju

dinamičko ponašanje ovih sistema i odrediti analogne fizičke promenjive i parameter [38].



Slika 1.3. [38]

### Rešenje:

Primenom Kirhofovog zakona o naponima na serijsko RLC kolo (Slika 1.3a) dobija se:

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (1.13)$$

Kako je  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ , jednačina (1.13) postaje:

$$u(t) = L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) \quad (1.14)$$

Primenom zakona dinamike na translacioni mehanički sistem (Slika 1.3b) dobija se:

$$f(t) = f_K(t) + f_B(t) + f_M(t) \quad (1.15)$$

gde su:

$$f_K(t) = Kx(t) = K \int v(t) dt$$

$$f_B(t) = B \frac{dx(t)}{dt} = Bv(t)$$

$$f_M(t) = M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = M \frac{dv(t)}{dt}$$

Jednačina 1.15 postaje:

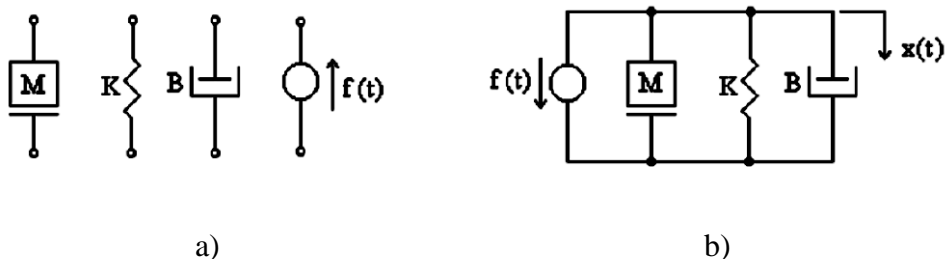
$$f(t) = M \frac{dv(t)}{dt} + Bv(t) + K \int v(t) dt \quad (1.16)$$

$$f(t) = M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + B \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) \quad (1.17)$$

Poređenjem jednačine (1.3.1) i (1.3.2) sa jednačinama (1.3.4) i (1.3.5) vidi se da su matematički modeli koje opisuju dinamičko ponašanje RLC kola i analognog translacionog mehaničkog sistema identični, i analogne fizičke promenjive i parametri su:

$$\begin{aligned} u(t) &\Leftrightarrow f(t) & L &\Leftrightarrow J \\ i(t) &\Leftrightarrow v(t) & R &\Leftrightarrow B \\ q(t) &\Leftrightarrow x(t) & C &\Leftrightarrow \frac{1}{K} \end{aligned}$$

Na slici 1.3.1.a prikazani su simboli za masu  $M$ , elastičnost  $K$ , trenje  $B$  i silu  $f(t)$ , a na slici 1.3.1.b analogna mehanička mreža translacionog mehaničkog sistema.



Slika 1.3.1 [38]

a) Primenom zakona dinamike na rotacioni mehanički sistem (Slika 1.3c) dobija se:

$$M(t) = M_K(t) + M_B(t) + M_J(t) \quad (1.18)$$

gde su:

$$\begin{aligned} M_K(t) &= K\theta(t) = K \int \omega(t) dt \\ M_B(t) &= B \frac{d\theta(t)}{dt} = B\omega(t) \\ M_J(t) &= J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = M \frac{d\omega(t)}{dt} \end{aligned}$$

Jednačina (1.18) postaje:

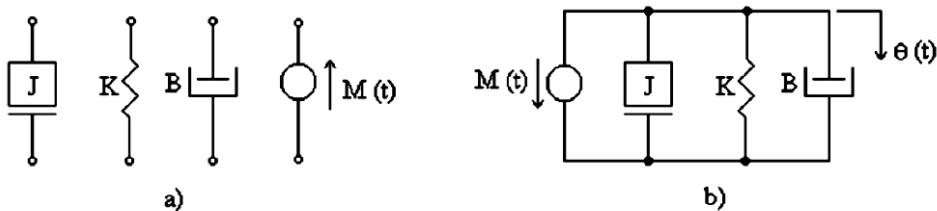
$$M(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} + B\omega(t) + K \int \omega(t) dt \quad (1.19)$$

$$M(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B \frac{d\theta(t)}{dt} + K\theta(t) \quad (1.20)$$

Poređenjem jednačina (1.13) i (1.14) sa jednačinama (1.19) i (1.20) vidi se da su matematički modeli koje opisuju dinamičko ponačanje RLC kola i analognog rotacionog mehaničkog sistema identični, i analogne fizičke promenjive i parametri su:

$$\begin{array}{ll} u(t) \Leftrightarrow M(t) & L \Leftrightarrow J \\ i(t) \Leftrightarrow \omega(t) & R \Leftrightarrow B \\ q(t) \Leftrightarrow \theta(t) & C \Leftrightarrow \frac{1}{K} \end{array}$$

Na slici 1.3.2.a prikazani su simboli za moment inercije J, elastičnost K, trenje B i moment sile M(t), na slici 1.3.2.b analogna mehanička mreža rotacionog mehaničkog sistema.

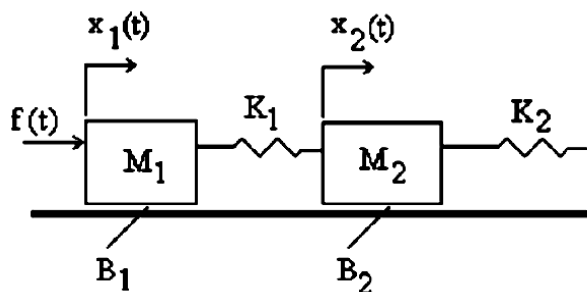


Slika 1.3.2 [38]

Poređenjem analognih mehaničkih mreža sa serijskim RLC kolom može se izvesti sledeće pravilo: *Mehaničkim elementima u paralelnoj vezi odgovaraju analogni električni elementi vezani serijski, a mehaničkim elementima u serijskoj vezi odgovaraju analogni električni elementi vezani paralelno.*

### Zadatak 1.30

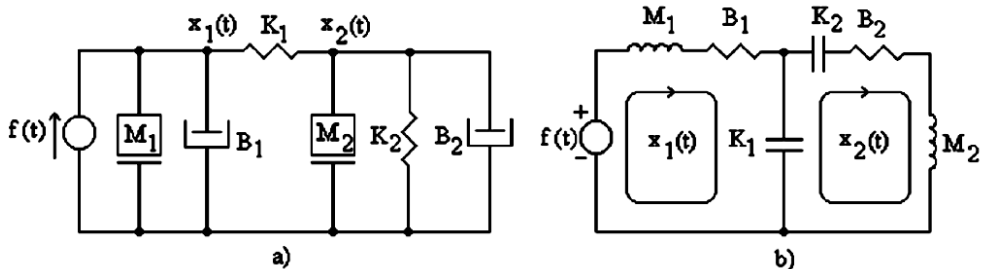
Na slici 1.3.3 prikazan je translacioni mehanički sistem sa dva stepena slobode. Koristeći analogiju koja postoji između električnih i mehaničkih elemenata formirati mehaničku i analognu električnu mrežu. Izračunati prenosnu funkciju sistema smatrajući da je  $x_1(t)$  ulazna promenjiva, a  $x_2(t)$  izlazna promenjiva sistema [38].



Slika 1.3.3 [38]

**Rešenje:**

Masa  $M_2$ , opruga  $K_2$  i prigušnica  $B_2$  vrše isti pomeraj  $x_2(t)$ . Zato su ovi elementi mehanički u paralelnoj vezi, a u analognoj električnoj mreži u serijskoj vezi. Opruga  $K_1$  izložena je pomeraju  $x_1(t) - x_2(t)$  i zato je mehanički serijski elemenat, a u analognoj električnoj mreži paralelan. Masa  $M_1$  i prigušnica  $B_1$  vrše isti pomeraj  $x_1(t)$  i ovi elementi su mehanički u paralelnoj vezi, a u analognoj električnoj mreži u serijskoj vezi. Na slici 1.3.4 prikazane su mehanička mreža (a) i analogna električna mreža (b) sistema sa slike 1.3.4



Slika 1.3.4.[38]

Primenom metode konturnih struja na kolo sa slike 1.3.4.b dobija se:

$$M_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + B_1 \frac{dx_1(t)}{dt} + K_1 x_1(t) - K_1 x_2(t) = f(t) \quad (1.21)$$

$$-K_1 x_1(t) + M_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + B_2 \frac{dx_2(t)}{dt} + (K_1 + K_2) x_2(t) = 0 \quad (1.22)$$

Primenom direktne Laplasove transformacije jednačine (1.21) i (1.22) postaju:

$$(s^2 M_1 + s B_1 + K_1) X_1(s) - K_1 X_2(s) = F(s) \quad (1.23)$$

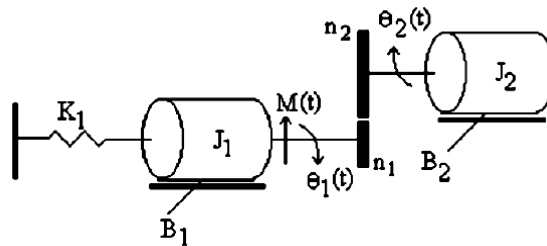
$$-K_1 X_1(s) + (s^2 M_2 + s B_2 + K_1 + K_2) X_2(s) = 0 \quad (1.24)$$

Iz jednačine 1.23 sledi da je prenosna funkcija translacionog mehaničkog sistema:

$$G(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{K_1}{s^2 M_2 + s B_2 + K_1 + K_2} \quad (1.25)$$

### Zadatak 1.32

Na rotacioni mehanički sistem na slici 1.3.7 dejstvuje mehanički momenat  $M(t)$ . Prenosni odnos reduktora određen je brojem zubaca  $n_1$  i  $n_2$ .  $J_1$  i  $J_2$  su momenti inercije zamajca čija su obrtna kretanja izložena viskoznom trenju koeficijenata trenja  $B_1$  i  $B_2$ . koeficijent torziona elastičnosti osovine čiji je ugaoni pomeraj  $\theta_1(t)$  je  $K_1$ . Izračunati prenosnu funkciju sistema smatrajući da je  $M(t)$  ulazna promenjiva sistema, a ugaoni pomeraj  $\theta_2(t)$  izlazna promenjiva sistema [38].



Slika 1.3.7 [38]

### Rešenje:

Diferencijalne jednačine koje opisuju dinamičko ponašanje sistema sa slike 1.3.7 su

$$J_1 \frac{d^2 \theta_1(t)}{dt^2} + B_1 \frac{d \theta_1(t)}{dt} + K_1 \theta_1(t) = M(t) - M_1(t) \quad (1.35)$$

$$J_2 \frac{d^2 \theta_2(t)}{dt^2} + B_2 \frac{d \theta_2(t)}{dt} = M_2(t) \quad (1.36)$$

gde je  $M_1(t)$  otpornost momenta, a  $M_2(t)$  pokretački moment predat reduktoru.

Između pomeraja pre i posle redukcije postoji veza:

$$n_1 \theta_1(t) = n_2 \theta_2(t) \quad (1.37)$$



ili

$$\theta_1(t) = \frac{n_2}{n_1} \theta_2(t) = N \theta_2(t) \quad (1.38)$$

gde je  $N = \frac{n_2}{n_1}$ . Oba zupčanika moraju da izvrše isti rad i zato je:

$$M_1(t)\theta_1(t) = M_2(t)\theta_2(t) \quad (1.39)$$

Iz jednačina (1.37) i (1.38) dobija se:

$$M_1(t) = \frac{M_2(t)}{N} \quad (1.40)$$

Primenom direktne Laplasove transformacije prethodne jednačine postaju:

$$(s^2 J_1 + sB_1 + K_1)\Theta_1(s) = M(s) - M_1(s) \quad (1.41)$$

$$(s^2 J_2 + sB_2)\Theta_2(s) = M_2(s) \quad (1.42)$$

$$\Theta_1(s) = N\Theta_2(s) \quad (1.43)$$

$$M_1(s) = \frac{M_2(s)}{N} \quad (1.44)$$

Iz ovih jednačina sledi da je prenosna funkcija sistema:

$$G(s) = \frac{\Theta_2(s)}{M(s)} = \frac{N}{s^2(N^2 J_1 + J_2) + s(N^2 B_1 + B_2) + N^2 K_1} \quad (1.45)$$

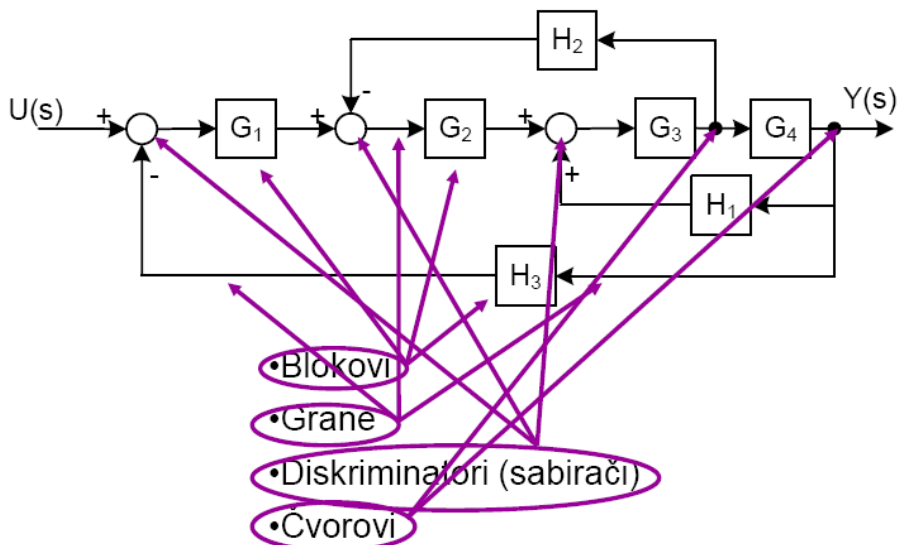
## 1.5. Strukturni blok dijagrami sistema

Dinamički modeli složenih sistema, uključujući i sisteme automatskog upravljanja, se vrlo često prikazuju grafički. Jedan od najčešće korištenih načina grafičkog prikazivanja dinamike sistema su *blok dijagrami*. Blok dijagram predstavlja grafički ekvivalent dinamičkog matematičkog modela sistema. U njemu su odgovarajući dinamički modeli.

Pri formiranju modela nekog praktičnog sistema najčešće se dobija relativno složen strukturni dijagram, koji sadrži više lokalnih povratnih sprega i veći broj ulaznih signala. Koristeći se principom superpozicije i algebrom funkcija prenosa, ma kako složen strukturni blok dijagram sistema se može svesti na jednu od osnovnih struktura, od posebno interesa za određivanje odgovarajućih funkcija, koje dalje služe kao polazna osnova za analizu i sintezu sistema. Pod algebrom funkcija prenosa se podrazumeva skup pravila koji omogućavaju pomenuto svođenje.

### Osnovni elementi blok dijagrama

Osnovni grafički elementi od kojih su sastavljeni blok dijagrami linearnih sistema dati su na slici 1.5.1.



Slika 1.5.1. Osnovni elementi blok dijagrama [44]

Kao što se vidi sa slike osnovni elementi modela sistema prikazan u vidu blok dijagrama se sastoji od blokova, grana, sabirača i čvorova.

Tokovi signala predstavljaju ulazne i izlazne promenljive u sistemu, dok su blokovima predstavljeni pojedini delovi sistema i njihovi dinamički modeli. Pri tome se dinamički model upisuje unutar bloka kojim je prikazan dati element sistema. Po pravilu se ovi dinamički modeli prikazuju u Laplasovom domenu, u obliku prenosnih funkcija koje povezuju ulaznu promenljivu prikazanu ulaznim signalom i izlaznu promenljivu prikazanu izlaznim signalom. Izlazni signal iz bloka se dobija kao proizvod prenosne funkcije upisane u blok i ulaznog signala.

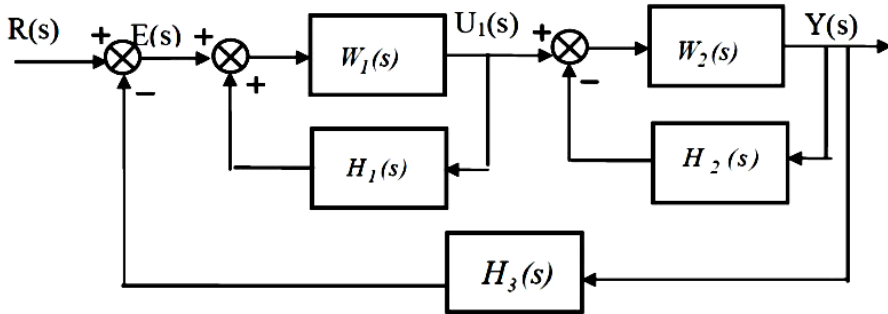
U nastavku je data tabela u kojoj su data pravila algebra blok dijagrama.

Tabela 1.2 Pravila algebra blok dijagrama [39]

Pravilo	Prvobitni dijagram	Ekvivalentni dijagram	Jednačina
a) kombinovanje serijski vezanih elemenata			$M_2 = G_2 G_1 M_1$
b) svodjenje povratnog kola			$M_2 = \frac{G}{1 \pm GH} M_1$
c) svodjenje direktnog kola			$M_2 = (G_1 \pm G_2) M_1$
d) premeštanje bloka iz povratnog kola			$M_2 = \frac{G}{1 \pm GH} M_1$
e) premeštanje bloka iz direktnog kola			$M_2 = (G_1 \pm G_2) M_1$
f) pomeranje povratne sprege ispred bloka			$M_2 = G M_1$
g) pomeranje povratne sprege iza bloka			$M_2 = G M_1$
h) pomeranje diskriminatora ispred bloka			$M_2 = G M_1 \pm M_3$
i) pomeranje diskriminatora iza bloka			$M_2 = G(M_1 \pm M_3)$
j) pomeranje povratne sprege ispred diskrim.			$M_2 = M_1 \pm M_3$
k) pomeranje povratne sprege iza diskrimin.			$M_2 = M_1 \pm M_3$
l) komutacija promenljivih			$M_2 = M_1 \pm M_3 \pm M_4$

### Zadatak 1.34

Odrediti ekvivalentnu prenosnu funkciju sistema čiji strukturni blok dijagram je dat na sledećoj slici:

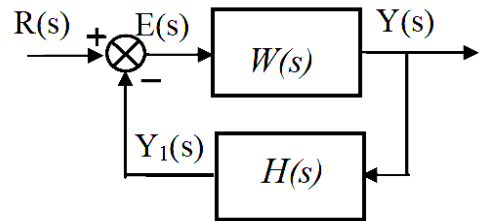


### Rešenje:

Za sistem sa povratnom spregom dat blok dijagramom na slici. 1.5.2. na osnovu definicije funkcije prenosa vrede relacije

$$Y(s) = W(s)E(s)$$

$$Y_1(s) = H(s)Y(s)$$



Slika. 1.5.2.

Gde je  $W(s)$  – funkcija prenosa direktne grane,  $H(s)$  - funkcija prenosa kola povratne sprege. Blok označen kružićem predstavlja diskriminator. To je element kojim se formira razlika (ili zbir-sumator) dveju ili više promenljivih. Prema tome je signal greške određen sa:

$$E(s) = R(s) - Y_1(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + W(s)H(s)} R(s)$$

$$Y(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)H(s)} R(s)$$

gde je  $W(s)H(s)$  - funkcija povratnog prenosa sistema. U slučaju da se radi o sistemu sa pozitivnom povratnom spregom što je označeno sa znakom "+" na slici.1.5.2. dobija se:

$$E(s) = \frac{1}{1 - W(s)H(s)} R(s)$$

$$Y(s) = \frac{W(s)}{1 - W(s)H(s)} R(s)$$

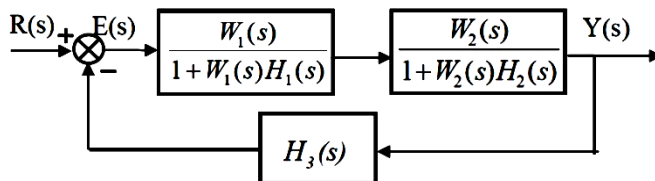
Dakle funkcija prenosa sistema u zatvorenoj sprezi (slika.1.5.2.) je:

$$W_z(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{W(s)}{1 + W(s)H(s)}$$

A funkcija prenosa u odnosu na grešku  $E(s)$  je:

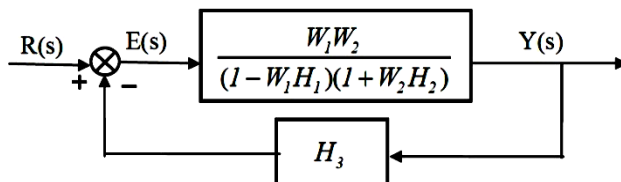
$$W_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + W(s)H(s)}$$

Koristeći gore izvedene relacije dijagrama na slici iz zadatka se može pojednostaviti da se odgovarajuće lokalne povratne sprege između promenljivih  $E(s)$  i  $U_1(s)$  i tako je između  $U_1(s)$  i  $Y(s)$  zamenjene blokovima sa odgovarajućim funkcijama prenosa kao na slici.1.5.3.



Slika. 1.5.3

Kako je funkcija prenosa sistema kojeg čine više kaskadno (serijski) vezanih komponenti onda je funkcija prenosa direktne grane (kola) na slici.1.5.3. kao ona na slici.1.5.4. Ovo znači da je blok dijagram na slici.1.5.3. ekvivalentan onom na slici. 1.3.4. Na kraju, koristeći napred izvedeno za funkciju prenosa sistema u zatvorenoj sprezi dobijamo:

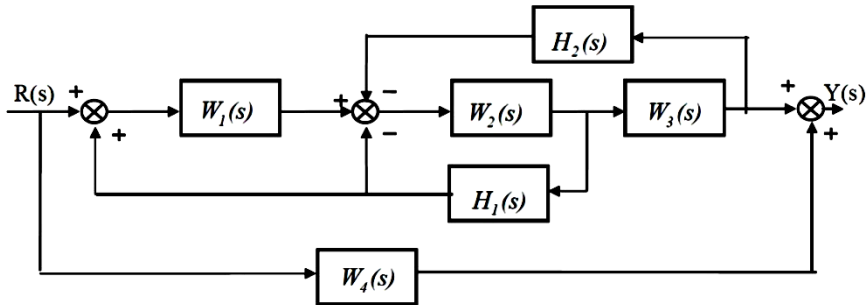


Slika. 1.5.4

$$W_z(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{W_1(s)W_2(s)}{(1 - W_1(s)H_1(s))(1 + W_2(s)H_2(s)) + W_1(s)W_2(s)H_1(s)}$$

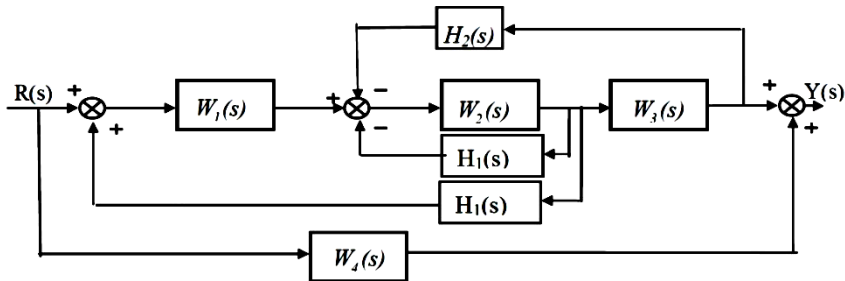
**Zadatak 1.35**

Odrediti ekvivalentnu prenosnu funkciju sistema čiji strukturni blok dijagram je dat na sledećoj slici:



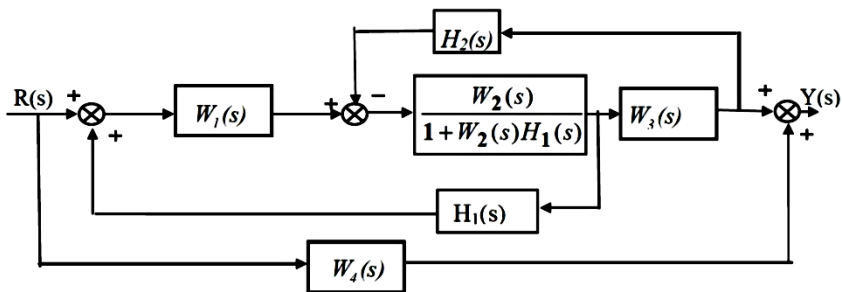
**Rešenje:**

Način pojednostavljivanja blok dijagrama nije jednoznačan. Ovde je izabran jedan način transformisanja blok dijagrama.

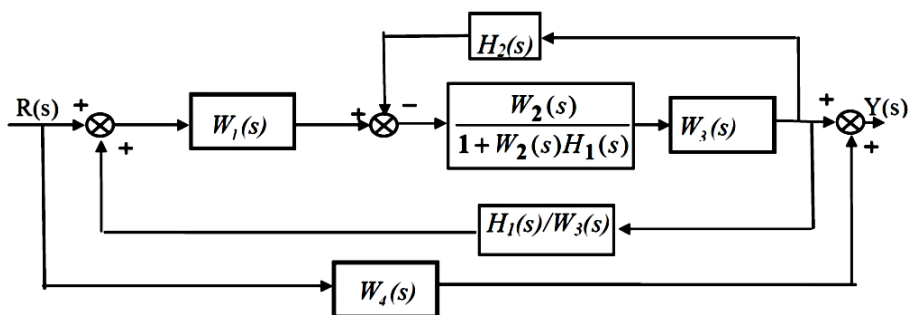


Slika. 1.5.5.

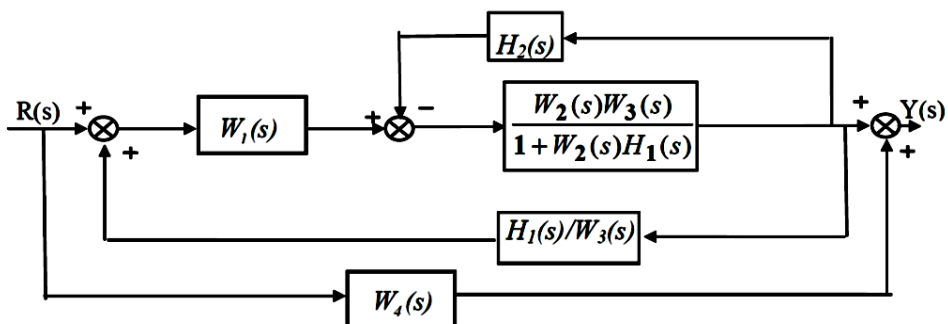
Transformacije na slici 1.5.5-1.5.11. su prikazane postupno, pa nije neophodno komentarisati svaki korak posebno.



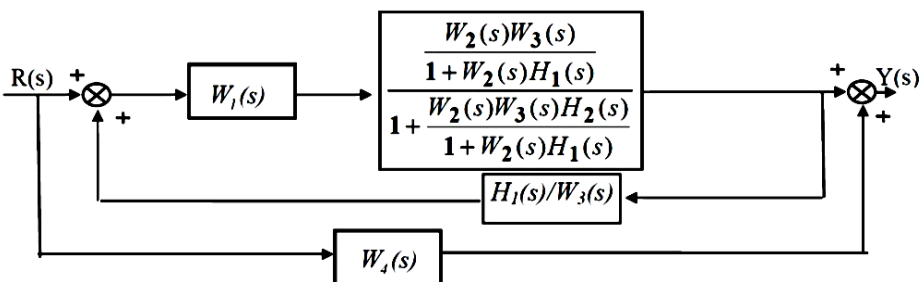
Slika. 1.5.6.



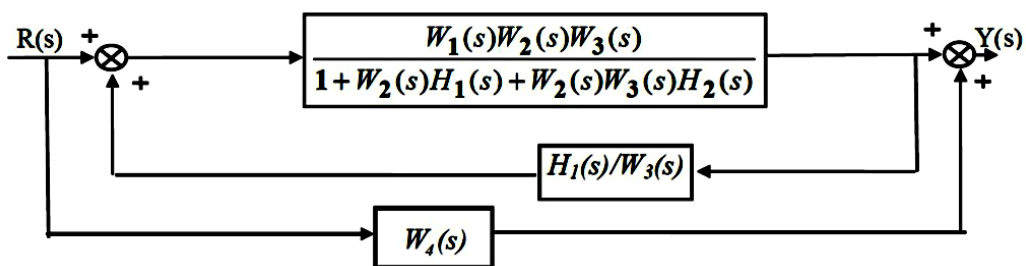
Slika. 1.5.7



Slika 1.5.8.

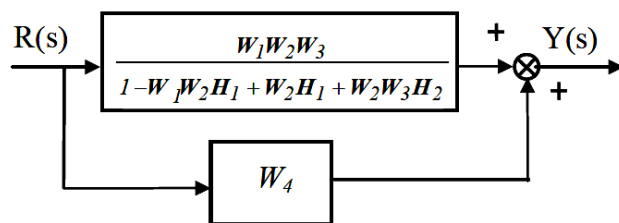


Slika. 1.5.9.



Slika 1.5.10.





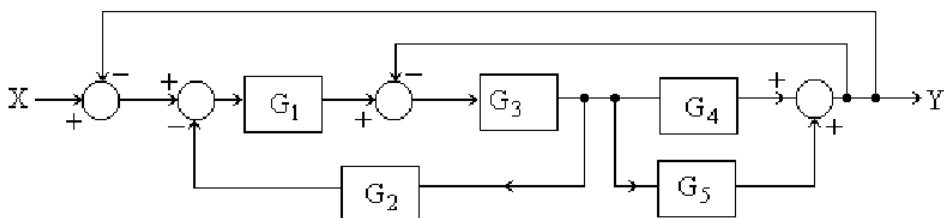
Slika 1.5.11

Na osnovu *Sl.1.5.11.* je jasno da je funkcija prenosa sistema određena sa:

$$W_z(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = W_4(s) + \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)}{1 - W_1(s)W_2(s)H_1(s) + W_2(s)H_1(s) + W_2(s)W_3(s)H_2(s)}$$

### Zadatak 1.36

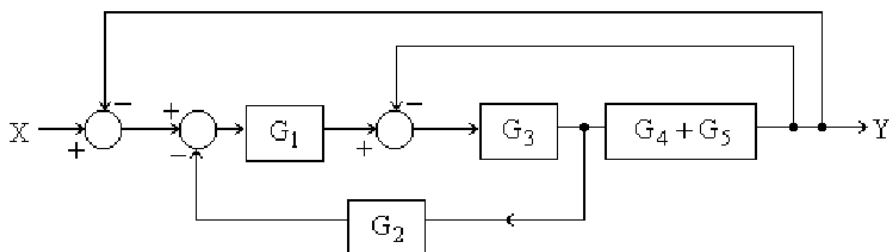
Primenom pravila algebre prenosnih funkcija uprosti strukturu blok dijagrama sa slike 1.5.12 [38]



Slika 1.5.12. [38]

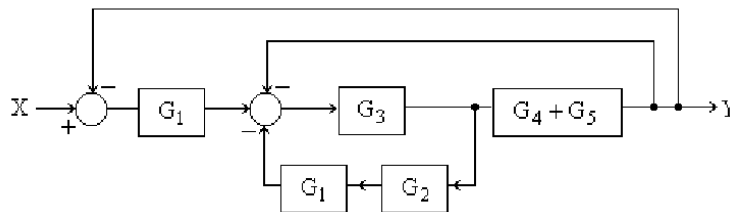
### Rešenje:

Primenom pravila za paralelnu vezu na blokove i strukturni blok dijagrama sa slike 1.5.12. je:



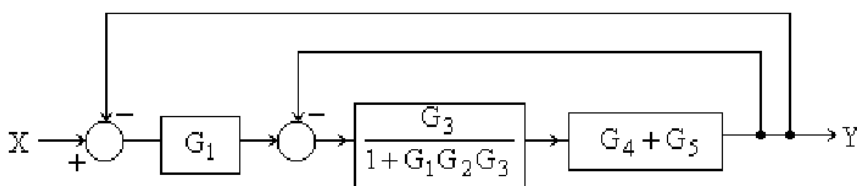
Slika 1.5.13. [38]

Pomeranjem diskriminatora iza bloka strukturni blok dijagrama sa slike 1.5.13. postaje:



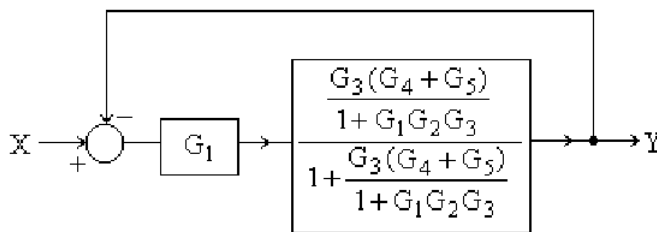
Slika 1.5.14.

Primenom pravila za povratnu spregu strukturni blok dijagram sa slike 1.5.14. postaje:

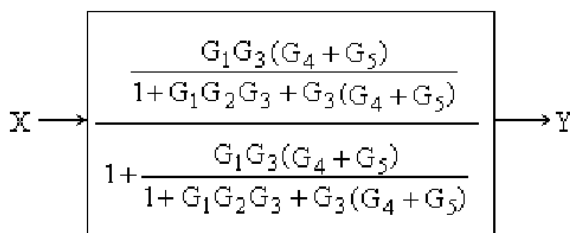


Slika 1.5.15.

Primenom pravila rednu vezu i povratnu spregu strukturni blok dijagram sa slike 1.5.15. postaje:



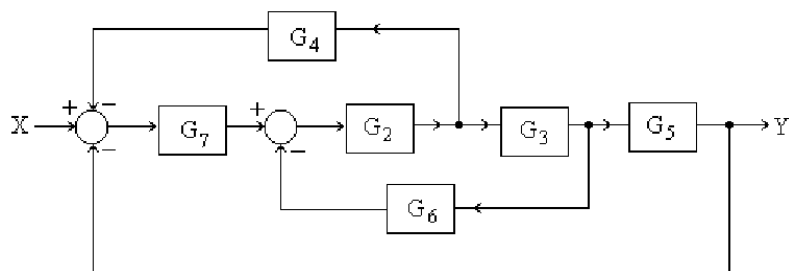
Slika 1.5.16.



Slika 1.5.17. [38]

### Zadatak 1.37

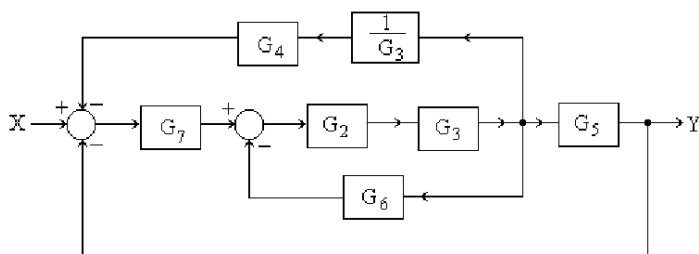
Primenom pravila algebre prenosnih funkcija uprostiti strukturni blok dijagram sa slike 1.5.18 [38]



Slika 1.5.18 [38]

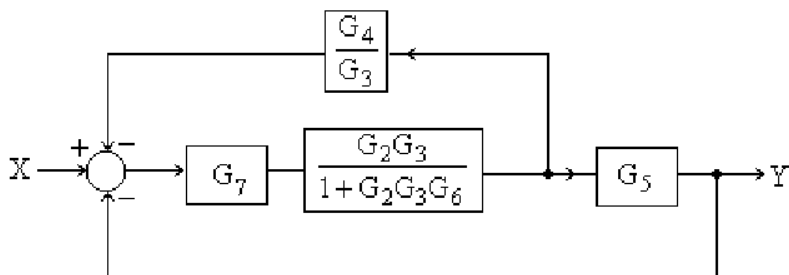
### Rešenje:

Pomeranjem povratne sprege iza bloka  $G_3$  strukturni blok dijagram sa slike 1.5.18 postaje:



Slika 1.5.19. [38]

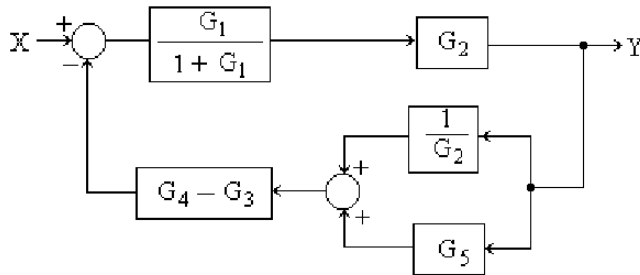
Korišćenje pravila za rednu vezu i povratnu spregu strukturni blok dijagram sa slike 1.5.19. postaje:



Slika 1.5.20.

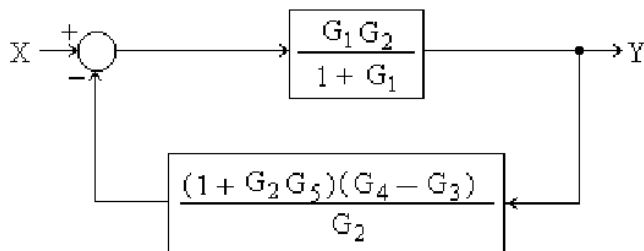


Pomeranjem povratne sprege iza bloka  $\frac{G_1}{1+G_1}$  strukturni blok dijagram sa slike 1.5.24. postaje:



Slika 1.5.25.

Primenom pravila za rednu i paralelnu vezu strukturni blok dijagram sa slike 1.5.25. postaje:



Slika 1.5.26. [38]

Primenom pravila za povratnu spregu dobija se prenosna funkcija kola slike 1.5.26.:

$$\frac{G_1 G_2}{(1 + G_1) G_2 + (G_4 - G_3)(1 + G_2 G_5)}$$

## 1.6. Graf toka signala

Pored strukturnog blok dijagrama graf ili dijagram toka signala je pogodan način za predstavljanje matematičkog modela linearnog dinamičkog sistema. U strukturnom blok dijagramu promenljive sistema se predstavljaju linijskim segmentima, a funkcije prenosa između pojedinih promenljivih blokovima. U grafu toka signala promenljive su predstavljene  $x_i$ , a funkcije prenosa ili, uopštem slučaju, funkcionalne veze između promenljivih – orijentisanim  $G_{ij}$ .

Stoga je Mejsen definisao graf toga signala kao „mrežu koju sačinjavaju čvorovi, međusobno povezani orijentisanim granama“.

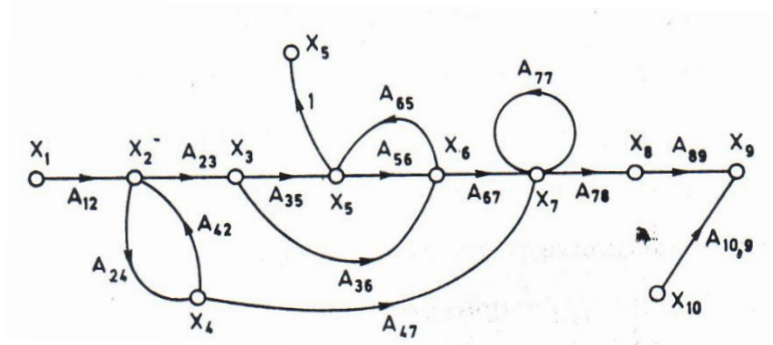
Osim čvorova i grana, definišu se i drugi pojmovi, vezani za sam oblik i za primenu grafova. U svrhu definisanja ovih pojmova posmatraćemo graf na sl. 1.6.1

je skup sukcesivno povezanih i u istom smeru orijentisanih grana, duž koje se svaki čvor javlja samo po jedan put. U grafu na sl. 1.6.1 su putanje, na primer:

itd.

je čvor iz koga grane samo izvire. i su, na primer, izvori grafa na sl. 1.6.1

je čvor u koga grane samo poniru. U grafu na sl. 1.6.1 postoje dva ponora i to i . Obično je ponor grafa vezan za izlaznu promenljivu sistema,



Sl. 1.6.1. Graf toka signala [39]

je putanja koja spaja izvor sa ponorom. Na primer, od izvora do ponora (sl. 1.5.1) postoje ukupno tri direktne putanje i to:

je putanja koja izvire i ponire u istom čvoru. To su, na primer, putanje

je poseban tip zatvorene putanje, koja sadrži samo jednu granu.

je operator transformacije te grane.

je proizvod pojačanja svih grana koje sačinjavaju tu putanju. Na primer, pojačanje direktne putanje

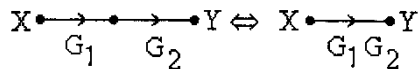
je

je proizvod pojačanja svih grana

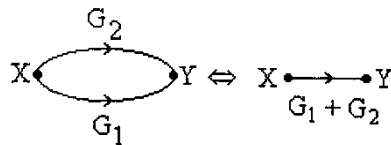
koje sačinjavaju tu zatvorenu putanju.

### 1.6.1. Ekvivalentne transformacije grafa toka signala

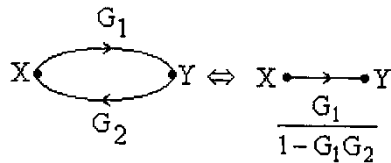
1) Redna veza



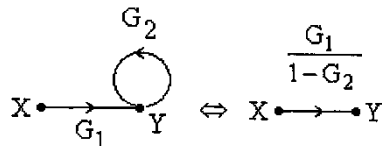
2) Paralelna veza



3) Povratna sprega



4) Eliminacija petlje



**Mejsonovo pravilo.** Na osnovu ilustrovanog postupka za svođenje grafa na najjednostavniju topološku formu nameće se pravilo za određivanje funkcija prenosa od bilo kog izvora do bilo kog ponora u grafu linearnog stacionarnog sistema sa koncentrisanim parametrima. Ovo pravilo je prvi uočio i formulisao Mejson [39].

Prema Mejsonovom pravilu, funkcija prenosa od izvora do ponora grafa data je relacijom

$$\frac{N_{ij}}{D_{ij}} = \frac{N_{ij} + \sum_{k=1}^m \frac{N_{ik} N_{kj}}{D_{kj}}}{1 - \sum_{k=1}^m \frac{N_{ik} N_{kj}}{D_{kj}}} \quad (1.46)$$

gde je  $N_{ij}$  broj direktnih putanja od izvora do posmatranog ponora, a  $D_{ij}$  je pojačanje  $i$ -te direktne putanje.

Dalje je

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^m \frac{N_{ik} N_{kj}}{D_{kj}} \quad (1.47)$$

gde su:

- zbir kružnih pojačanja svih zatvorenih putanja grafa,
- zbir svih proizvoda kružnih pojačanja od po dve zatvorene putanje, koje se međusobno ne dodiruju,
- zbir svih proizvoda kružnih pojačanja od po tri zatvorene putanje, koje se međusobno ne dodiruju.

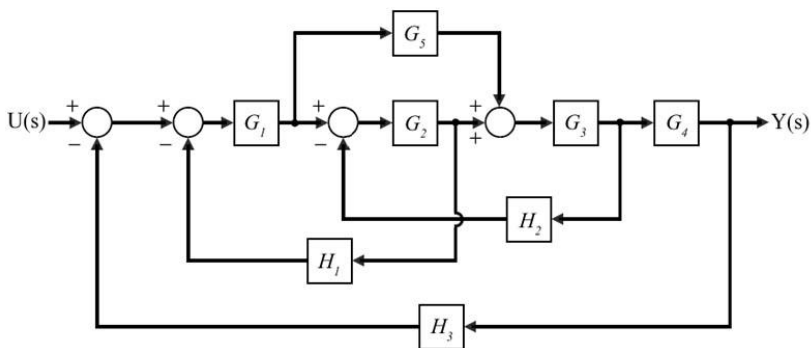
... su definisani na analogan način.

$N_{ij}$  je , koje se dobija primenom obrasca (1.47), ali samo za zatvorene putanje koje ne dodiruju  $i$ -tu direktnu putanju.

### Zadatak 1.39

Odrediti prenosnu funkciju sistema predstavljenog dijagramom blokova na slici 1.6.2.[30]

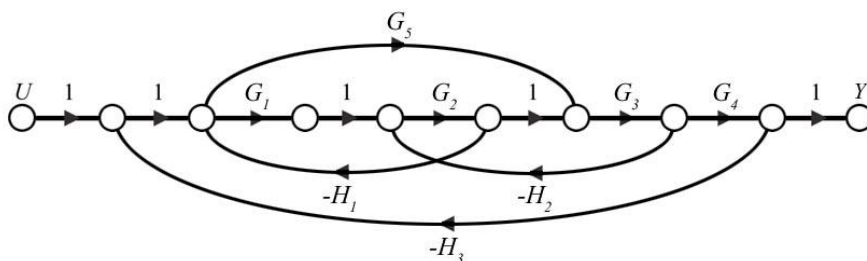




Slika 1.6.2. [30]

### Rešenje:

Ekvivalentna prenosna funkcija sistema biće izračunata korištenjem Mason-ovog pravila tj. prevođenjem dijagrama blokova u ekvivalentni graf toka signala.



Slika 1.6.3. graf toka signala sistema sa slike 1.6.2.[30]

Analizom grafa toka signala sa slike 1.6.3. dobija se sledeće:

- Putevi:  $P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4$

$$P_2 = G_1 G_5 G_3 G_4$$

- Petlje:

$$L_1 = -G_1 G_2 H_1$$

$$L_2 = -G_2 G_3 H_2$$

$$L_3 = G_1 G_5 G_3 H_2 G_2 H_1$$

$$L_4 = -G_1 G_5 G_3 G_4 H_3$$

$$L_5 = -G_1 G_5 G_3 G_4 H_3$$

$$L_5 = -G_1 G_2 G_3 G_4 H_3$$

- Nedodirujućih petlji nema

Prema tome vredi:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5)$$

$$\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 1$$

Za prenosnu funkciju  $G(s)$  čitavog sistema dobijamo:

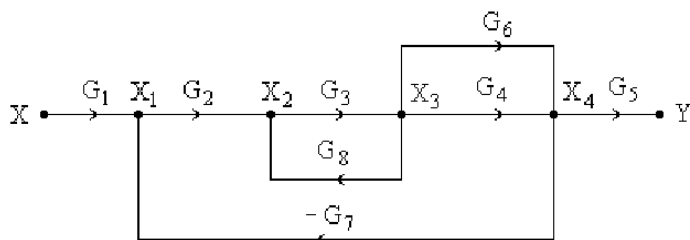
$$G(s) = \frac{P_1 + P_2}{1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5)}$$

Odnosno

$$G(s) = \frac{G_1 G_3 G_4 (G_2 + G_5)}{1 + G_1 G_2 H_2 + G_2 G_3 H_2 (1 - G_1 H_1) + G_1 G_3 G_4 H_3 (G_5 + G_2)}$$

### Zadatak 1.40

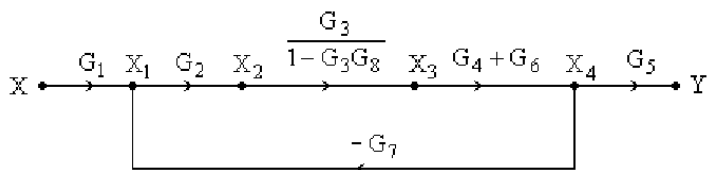
Naći prenosnu funkciju sistema čiji je graf toka signala dat na slici 1.6.4 [38]



Slika 1.6.4 [38]

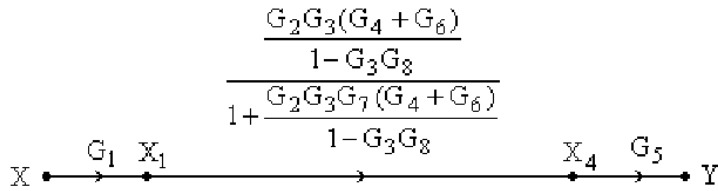
### Rešenje:

Koristeći ekvivalentne transformacije za paralelnu vezu i povratnu spregu graf toka signala sa slike 1.6.4 postaje:



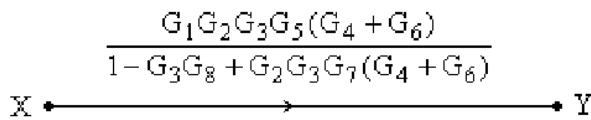
Slika 1.6.5.

Koristeći ekvivalentne transformacije za rednu vezu i povratnu spregu graf toka signala sa slike 1.6.5. postaje:



Slika 1.6.6.

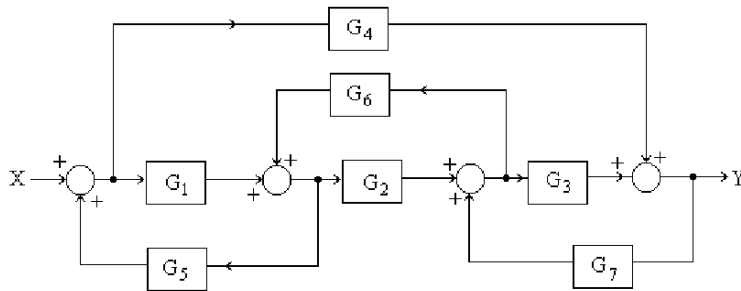
Koristeći ekvivalentne transformacije za rednu vezu graf toka signala sa slike 1.6.6. postaje:



Slika 1.6.7. [38]

### Zadatak 1.41

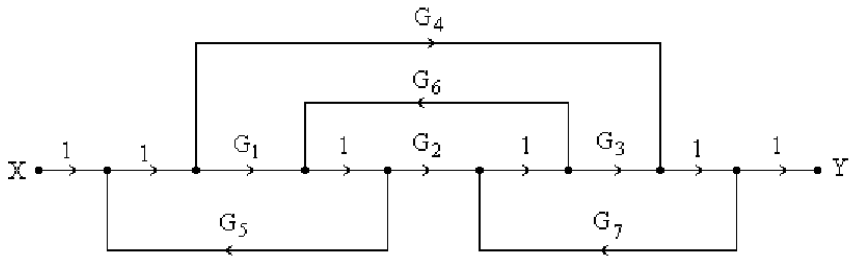
Na slici 1.6.8 prikazan je strukturni blok dijagram sistema automatskog upravljanja. Formirani graf toka signala. Primenom Mejsonovog pravila izračunati ekvivalentnu prenosnu funkciju sistema [38].



Slika 1.6.8 [38]

### Rešenje:

Na slici 1.6.9. prikazan je graf toka signala za strukturni blok dijagram sa slike 1.6.8



Slika 1.6.9.

Graf toka signala sa slike 1.6.9 ima:

Dve direktne putanje sa pojačanjima:

Četiri zatvorene putanje kružnih pojačanja:

Putanje  $i$  i  $j$  međusobno se ne dodiruju, pa je proizvod kružnih pojačanja ovih putanja:

Determinanta grafa toka signala je:

Direktna putanja je  $i$  dodiruje sve zatvorene putanje. Zato je  $\Delta_i = \Delta - G_5 - G_6 - G_4$ .  
 Direktna putanja je  $j$  ne dodiruje zatvorenu putanju  $i$  i  $j$ .

Prenosna funkcija sistema na osnovu jednačine je:

$$\frac{Y}{X} = \frac{1 + G_1 + G_2 + G_3 + G_7}{1 - G_5 - G_6 - G_4}$$

## 1.7. Model sistema u prostoru stanja

Kao što je poznato linearni sistem se može opisati sledećom diferencijalnom jednačinom:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_0 u(t)$$

Prethodna diferencijalna jednačina se može zapisati i sledećoj (tzv. normalnoj ili Košijevoj) formi:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n, u, t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, \dots, x_n, u, t)$$

⋮

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n, u, t)$$

$$y(t) = g(x_1, \dots, x_n, u, t)$$

gde su:

$u(t)$  - ulaz sistema

$y(t)$  - izlaz sistema

$\bar{x} = [x_1 \dots x_n]^T$  - vektor stanja sistema tj. minimalni skup međusobno nezavisnih koordinata  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) koje jednoznačno opisuju stanje sistema.

Dakle prethodni sistem jednačina se može zapisati u vektorskoj formi:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, u, t)$$

gde su:

$\bar{x}$  - vektor stanja sistema

$\bar{f} = [f_1, \dots, f_n]^T$  - vektor funkcija

U zavisnosti od toga da li je posmatrani dinamički sistem linearan ili nelinearan, i koordinate vektora  $\bar{f}$  će biti linearne ili nelinearne funkcije od koordinata vektora stanja i/ili vektora ulaza.

### **Matrični modeli linearnih vremenski stacionarnih sistema**

Linearni sistem se može opisati sledećim sistemom jednačina:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1u \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2u \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_nu \\ y &= c_1x_1 + \dots + c_nx_n + D \cdot u \end{aligned}$$

Prethodni sistem se može zapisati u sledećoj matricnoj formi:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + [d] \cdot u$$

ili u kraćoj formi:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + B \cdot u \\ y &= C\bar{x} + D \cdot u \end{aligned}$$

uz početne uslove:

$$\dot{\bar{x}}(0) = \bar{x}(0)$$

gde su:

$[A]_{n \times n}$  - matrica sistema

$[B]_{n \times 1}$  - vektor ulaza sistema

$[C]_{1 \times n}$  - vektor izlaza sistema

$[D]_{1 \times 1}$  - vektor ulaz-izlaz sistema

Svaki linearni sistem je jednoznačno određen s matricama  $A, B, C$  i  $D$ .

Primenom Laplasove transformacije na sistem:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B \cdot u \\ y &= Cx + d \cdot u\end{aligned}$$

dobija se sledeće:

$$\begin{aligned}sX(s) - x_0 &= AX(s) + BU(s) \Rightarrow \\ (sI - A)X(s) &= x_0 + BU(s) \Rightarrow \\ X(s) &= (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s)\end{aligned}$$

gde je:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \text{adj}(sI - A) = \Phi(s)$$

Prema tome, dalje se može pisati:

$$X(s) = \Phi(s)x_0 + \Phi(s)BU(s)$$

gde  $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$  predstavlja Laplasovu sliku matrice prelaza stanja ili fundamentalnu matricu sistema.

Odziv sistema se određuje iz izraza:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

primenom Laplasove transformacije dobija se:

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

S obzirom da je:

$$X(s) = \Phi(s)x_0 + \Phi(s)BU(s)$$

za nulte početne uslove:  $x_0 = 0$  može se odrediti prenosna funkcija sistema

$$\frac{Y(s)}{U(s)}:$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{CX(s) + DU(s)}{U(s)} = C\Phi(s)B + D$$

Prilikom izbora promenljivih stanja treba ih birati tako da one budu linearno nezavisne. Nezavisne promenljive stanja su one promenljive koje se ne mogu izraziti pomoću preostalih promenljivih stanja. Svaka promenljiva stanja ne mora imati fizičku interpretaciju ili smisao.

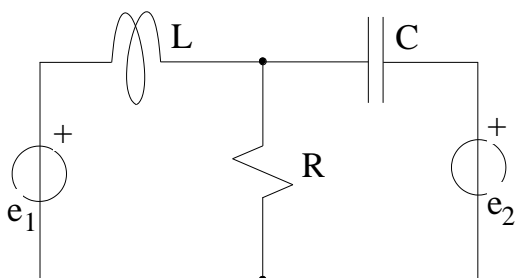
Kao fizičke promenljive se obično usvajaju one promenljive koje predstavljaju fizičke promenljive odgovarajućih skladišta energije. Iz ove činjenice sledi da je broj promenljivih stanja potreban da opiše dinamiku sistema jednak ili manji od broja energetskih skladišta u sistemu.

Skladište energije u proizvoljnom sistemu predstavlja element sposoban da primi i uskladišti odgovarajuću energiju. Tako na primer, ako je element kondenzator  $C$ , njemu odgovarajuća energija je  $Cu^2/2$  a promenljiva stanja je napon  $u$ , kalemu  $L$  odgovara energija  $Li^2/2$  i promenljiva stanja struja  $i$ , masi  $M$  odgovara energija  $Mv^2/2$  promenljiva stanja brzina  $v$ , opruzi  $K$  odgovara energija  $Kx^2/2$  i promenljiva stanja pomeraj  $x$ , itd.

Dinamičke promene sistema se mogu objasniti preraspodelom i transformacijom energije između skladišta energije po određenim prirodnim zakonima.

### Zadatak 1.42

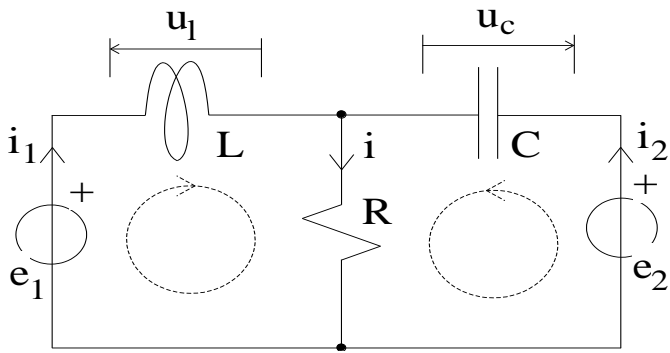
- Formirati matematički model u prostoru stanja za električno kolo na slici.
- Ako se za izlaznu velicinu usvoji struja kroz otpornik  $R$ , formirati jednačinu izlaza, ako se za izlazne veličine usvoje struje kroz izvore  $e_1$  i  $e_2$ .



### Rešenje:

- a) Prvo treba oznaciti referentne smerove struja i napona:





Sada se mogu postaviti jednačine u kolu (po Kirhofovima zakonima):

$$e_1 = u_L + Ri = L \frac{di_1}{dt} + Ri_1 + Ri_2$$

$$e_2 = u_C + Ri = u_C + Ri_1 + Ri_2$$

$$i_2 = C \frac{du_C}{dt}$$

Dalje sledi:

$$L \frac{di_1}{dt} + RC \frac{du_C}{dt} = e_1 - Ri_1$$

$$RC \frac{du_C}{dt} = e_2 - u_C - Ri_1$$

Kao promenljive stanja treba usvojiti promenljive koje se u jednačinama pojavljuju sa prvim izvodom, ako je to ikako moguće. Očigledno je da će ovde rešenje biti u izboru  $u_C$  i  $i_1$ . Tako prethodni sistem jednačina postaje:

$$L \frac{di_1}{dt} = e_1 - Ri_1 - RC \frac{du_C}{dt} = e_1 - Ri_1 - e_2 + u_C + Ri_1 = u_C + e_1 - e_2$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{RC} e_2 - \frac{1}{RC} u_C - \frac{1}{C} i_1$$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{L} u_C + \frac{1}{L} e_1 - \frac{1}{L} e_2$$

Moguće je sada formirati jednačine stanja pri čemu se za ulazne veličine usvajaju  $e_1$  i  $e_2$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{du_c}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

Matrice stanja i upravljanja sistema su, respektivno:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{RC} \end{bmatrix}$$

- b) Ako se kao izlazna velicina usvoji struja kroz otpornik dobija se jednačina izlaza:

$$i_1 = i_1$$

$$i_2 = -i_1 - \frac{1}{R}u_c + \frac{1}{R}e_2$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

### Zadatak 1.43

Dat je sistem automatskog upravljanja opisan u prostoru stanja jednačinama :

16

Obraditi matričnu jednačinu sistema, ako je dato [17]

**Rešenje:**

obliku model sistema u prostoru stanja može da se napiše  
kao :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

u skraćenom obliku :

$$\dot{x} = Ax + Bu + D \cdot u$$

#### **Zadatak 1.44**

Za sistem automatskog upravljanja :

Odrediti fudumentalnu matricu sistema  $F(s)$  i matricu prelaza  $f(t)$  [17].

#### **Rešenje:**

Fudumentalna matrica računa se prema sledećoj formuli :

$$F(s) =$$

Kada uvrstimo zadate parametre dobijamo :

$$F(s) =$$

$$F(s) =$$

17

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

Rešavanjem matrične jednačine dobijamo fudumentalnu matricu :

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{1}{(s+1)^2 + 1}$$

Matrica prelaza se dobija se inverznom Laplace-ovom transformacijom fudumentalne matrice :

$$f(t) =$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \sin(\sqrt{2}t)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \cos(\sqrt{2}t)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \sin(\sqrt{2}t)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \cos(\sqrt{2}t)$$

### Zadatak 1.45

Za sistem automatskog upravljanja čiji je matematički model u prostoru stanja :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Odrediti fudumentalnu matricu i matricu prelaza [17].

### Rešenje:

Fudumentalna matrica je :

$$F(s) =$$

18

82

$$F(s) =$$

$$F(s) =$$

$$F(s) = \frac{\quad}{\quad} \cdot$$

$$F(s) = \frac{\quad}{\quad}$$

Matrica prelaza dobija se inverznom Laplace-ovom transformacijom fudamentalne matrice :

$$f(t) =$$

$$f(t) =$$

## 6. Zadatak 1.46

Za sistem automatskog upravljanja čiji je matematički model u prostoru stanja :

=

Odrediti fudamentalnu matricu i matricu prelaza.

### Rešenje :

Fudamentalna matrica je :

$$F(s) =$$

$$F(s) =$$

$$F(s) =$$

$$F(s) = \frac{\text{---}}{\text{---}} + \frac{\text{---}}{\text{---}} + \frac{\text{---}}{\text{---}}$$

Matrica prelaza se dobija inverznom Laplace-ovom transformacijom fudamentalne matrice. Članovi koji imaju proizvod u imeniocu razlomka treba rastaviti na parcijalne razlomke :

$$f(t) = \text{---} - \text{---} - \text{---}$$

### Zadatak 1.47

Sistem automatskog upravljanja opisan je funkcijom prenosa :

$$\text{---} \text{---}$$

Formirati matematički model u prostoru stanja [17].

### Rešenje :

Na osnovu funkcije prenosa može se formirati jednačina :

$$Y(s) = 2U(s)$$

Inverznom Laplace-ove transformacije dobija se :

$$(t) + 6 (t) + 11 (t) + 6y(t) = 2u(t)$$

Uvodimo sledeće tri promenljive stanja :  $\text{---} = \text{---}$ ,  
 $\text{---} = \text{---}$

Zamenom promenljivih stanja u gornju jednačinu dobijamo :

$$= 2u$$

Jednačine u prostoru stanja su :

=

a u matričnom obliku :

Rešenje u Matlabu :

>>

>>

>>

n =

2

d =

1 6 11 6

A =

$$\begin{array}{ccc} -6 & -11 & -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$b =$$

$$1$$

$$0$$

$$0$$

$$c =$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \end{array}$$

$$d =$$

$$0$$



## 1.8. Funkcije za konverziju jednog sistema u drugi

*tf2zp* – konverzija prenosne funkcije iz oblika polinoma u faktorizovan oblik

*Oblik komande:*

$$[z, p, k]=tf2zp(num,den)$$

Izlazni argumenti predstavljaju redom **nule (z)**, **polove (p)** i **pojačanje (k)** prenosne funkcije čiji je brojilac num a imenilac den. U opštem slučaju **Z** je matrica koja ima onoliko kolona koliko matrica num ima vrsta, odnosno sistem izlaza; **p** i **k** su vektori kolone, pri čemu **k** ima onoliko elemenata koliko sistem ima izlaza.

*zp2tf* – konverzija prenosne funkcije faktorizovanog oblika u prenosnu funkciju predstavljenu kao odnos dva polinoma po s.

*Oblik komande:*

$$[num,den]=zp2tf(Z,p,k)$$

Značenje promenljivih je isto kao kod prethodne funkcije.

*ss2tp* – ovom funkcijom vrši se konverzija modela u prostoru stanja u prenosnu funkciju za definisan ulaz.

*Oblik komande:*

$$[num,den]=ss2tf(A,B,C,D,iu)$$

**A<sub>nxn</sub>** – matrica stanja (procesa), n definiše red sistema ili dimenziju sistema

**B<sub>nxm</sub>** – matrica ulaza ili upravljačka matrica

**C<sub>kxn</sub>**, **D<sub>kxm</sub>** – matrice izlaza sistema

**num** – matrica koja ima onoliko vrsta koliko sistem ima izlaza, takva da svaka vrsta sadrži koeficijente polinoma brojioca odgovarajuće prenosne funkcije

**den** – vektor vrsta koji sadrži koeficijente polinoma u imeniocu prenosne funkcije

**iu** – indeks koji definiše ulaz u odnosu na koji se određuje prenosna funkcija[19]

### Zadatak 1.49

a) Konvertovati dati oblik modela u faktorizovani oblik, napisati njegovu formu u faktorizovanom obliku i dobiveni oblik pretvorite u oblik “tf”

$$W(s) = \frac{s+3}{s^4 + 7s^3 + 14s^2 + 8s}$$

b) Konvertovati prenosnu funkciju datog faktorizovanog oblika u prenosnu funkciju predstavljenu kao odnos dva polinoma po s, napisati njegovu formu kao odnos dva polinoma i dobiveni oblik ponovo pretvoriti u oblik “zpk”

$$W(s) = 2 \frac{(s+2)(s+10)}{(s-1)(s-2)(s+5)}$$

c) Konvertovati model dat u prostoru stanja u formu modela u vidu prenosne funkcije [19]

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0]x(t) + [0]u(t)$$

### Rešenje:

a)

```
>> num=[1 3];
```

```
>> den=[1 7 14 8 0];
```

```
>> [z,p,k]=tf2zp(num,den)
```

```
z =
```

```
-3
```

```
p =
```

```
0
```

```
-4.0000
```

```
-2.0000
```

```
-1.0000
```

```
k =
```

```
1
```

Na osnovu ovog rešenja sistem možemo zapisati u sledećem obliku:

$$W(s) = 1 \cdot \frac{s+3}{s(s+4)(s+2)(s+1)}$$

Sad iz ovog oblika ćemo prebaciti u oblik zadane početne prenosne funkcije

```
z = [-3]';
p = [0 -4 -2 -1]';
k = [1];
[num, den] = zp2tf(z, p, k)
num =
    0    0    0    1    3
den =
    1    7   14    8    0
```

Što odgovara početnom obliku zadane prenosne funkcije:

$$W(s) = \frac{s+3}{s^4 + 7s^3 + 14s^2 + 8s}$$

b)

$$W(s) = 2 \frac{(s+2)(s+10)}{(s-1)(s-2)(s+5)}$$

```
>> z = [-2 -10]';
>> p = [1 2 -5]';
>> k = [2];
>> [num, den] = zp2tf(z, p, k)
num =
    0    2   24   40
den =
    1    2  -13   10
```

Sistem zapisan u obliku količnik dva polinoma je:

$$W(s) = \frac{2s^2 + 24s + 40}{s^3 + 2s^2 - 13s + 10}$$

```
num = [2 24 40];
den = [1 2 -13 10];
```

```
[z,p,k] = tf2zp(num,den)
```

```
z =
```

```
-10
```

```
-2
```

```
p =
```

```
-5.0000
```

```
2.0000
```

```
1.0000
```

```
k =
```

```
2
```

Na kraju je dobijena početna faktorizovana forma prenosne funkcije:

$$W(s) = 2 \frac{(s+2)(s+10)}{(s-1)(s-2)(s+5)}$$

c)

```
>> A=[0 1 0; 0 0 1; -6 -11 -6];
```

```
>> B=[0 0 1]';
```

```
>> C=[1 0 0];
```

```
>> D=[0];
```

```
>> [num,den]= ss2tf(A,B,C,D,1)
```

```
num =
```

```
0 -0.0000 -0.0000 1.0000
```

```
den =
```

```
1.0000 6.0000 11.0000 6.0000
```

**Sistem je oblika:**  $W(s) = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$

## 2. VREMENSKI I FREKVENTNI ODZIV SISTEMA

Dinamika sistema se najčešće ispituje nalaženjem odziva na neki od standardnih ulaza: stepenasti (u obliku Hevisajdove funkcije), impulsni (u obliku Dirakove funkcije), linearni, sinusni ili stohastički ulaz u obliku belog šuma. Pri tome je uobičajeno korišćenje sledećih izraza:

- *impulsni odziv* za odziv na impulsnu promenu ulaza
- *stepenasti (odskočni) odziv* za odziv na stepenastu promenu ulaza
- *frekventni odziv* za odziv na sinusnu promenu ulaza

### 2.1 Određivanje odziva na osnovu prenosne funkcije

Za određivanje odziva sistema može se koristiti kako vremenski tako i kompleksni  $s$ - domen. U ovoj glavi je korišten isključivo kompleksni domen pomoću koga se, primenom Laplasove transformacije, problem iz vremenskog domena (rešavanja diferencijalnih jednačina) prevodio u domen rešavanja algebarskih jednačina, a primenom inverzne Laplasove transformacije, rezultat prevodio u vremenski domen. Primenom MATLAB moguće je nalaziti rešenja kako u vremenskom tako i u kompleksnom domenu.

#### 2.1.1 Vremenski odziv elemenata i sistema

Najpre treba naznačiti da se uvode dve znakovne promenljive:  $s$  i  $t$  naredbom oblika **syms s t**; zatim se definiše funkcija prenosa sistema ( $W$ ) čiji odziv tražimo. Najzad naredbom: **ilaplace(W)** dobija se odziv sistema definisanog prenosom  $W$ .

MATLAB može da da grafički prikaz odziva u vremenskom domenu. Naredba je oblika:

**t=tp:r:tk; ft= izraz; plot(t,ft);**

Ovde je  $t_p$  -početno vreme,  $r$  - vremenski raster u kojima se sračunava odziv,  $t_k$  - konačno vreme računanja odziva.

Za definisanje funkcije prenosa najpre se mora saopštiti računaru format zapisivanja naredbom:

**s=tf('s');**

Nakon toga sledi zapis funkcije prenosa u obliku:

## **G=Num/Den**

za prva dva navedena oblika zapisivanja ili

## **G=tf(Num,Den)**

*printsys(A,B,C,D)* ispisivanje matrice sistema definisanog u prostoru stanja sa numeričkim oznakama.

*printsys(num,den,`s`)* ispisivanje modela u obliku prenosne funkcije, kao odnos dva polinoma kompleksne promenljive s.

*tfchk* – proverava prenosnu funkciju.

*Oblik komande: [numc,denc]=tfchk(num,den)*

*dcgain* – nalazi pojačanje sistema u stacioniranom stanju.

*k=dcgain(num,den)*

gde su num i den brojilac i imenilac prenosne funkcije.

*pzmap* – grafički prikazuje polove i nule prenosne funkcije

*Komanda: pzmap(num,den)*

Opcija sa izlaznim argumentima: *[p,z]=pzmap(NUM,den)*

daje numeričke vrednosti polova i transmisionih nula u vektor kolonama p i z (ne dobija se grafik).

*impulse* – daje odziv sistema za jediničnu impulsnu promenu ulaza (jedinični impulsni odziv).

*Komanda: impulse (num,den)*

*impulse(num,den,t)*

*[Y,X]=impulse(num,den,t)*

*[Y,X,t]=impulse(num,den)*

*step* – daje odziv sistema na jediničnu stepenastu ulaznu promenu (jedinični odskočni odziv) [19].

*Opcije: Step(num,den)*

*Step(num,den,t)*

*[Y,X]=step(num,den,t)*

*[Y,X,t]=step(num,den)*

*parallel* daje novi model složenog sistema, koji predstavlja paralelnu vezu dva sistema.

**Komanda:**  $[num,den]=parallel(num1,den1,num2,den2)$

*series* daje model serijske veze sistema, naredba :

$[num,den]=series(num1,den1,num2,den2)$

*cloop* daje dinamičke karakteristike sistema koji predstavlja zatvorenu konturu sa jediničnom povratnom spregom, naredba:

$[nums,denc]=cloop(num,den,znak)$

*initial* – daje odziv kontinualnog linearnog sistema za zadate početne uslove promenljivih stanja (koji ne odgovaraju stacionarnom stanju), tj. putanju dolaženja sistema u stacionarno stanje iz zadanog početnog stanja. Pri tome su svi ulazi u sistem konstantni [19].

**Oblik naredbe:**

$initial(A, B, C, D, x_0)$

$initial(A, B, C, D, x_0, t)$

Matrice A, B, C i D definišu sistem u prostoru stanja,  $x_0$  je vektor kojim su definisane početne vrednosti promenljivih stanja, a t je vektor koji definiše vreme. Kao rezultat se dobija grafički prikaz. Ako želimo da rezultat bude matrica koja će sadržati vrednosti izlazne promenljive Y, vektora stanja X i vremena t, oblik naredbe je:

$[Y,X,t]=initial(A,B,C,D,x_0)$

*lsim* daje odziv sistema na proizvoljnu ulaznu promenu

**Oblik naredbe:**

$lsim(A,B,C,D,U,t)$

$lsim(A,B,C,D,U,t,x_0)$

$[Y,X]=lsim(A,B,C,D,U,t)$

*feedback* daje dinamičke karakteristike sistema sa povratnom spregom na osnovu dinamičkih karakteristika elemenata u glavnoj i povratnoj grani.

**Komanda:**  $[num,den]=feedback(num1,den1,num2,den2,znak)[19]$

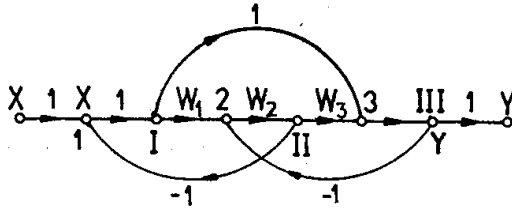
## **Zadatak 2.1**

Zadat je graf toka signala.

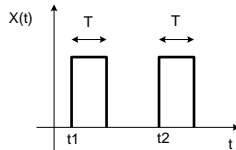
- a) Odredite ekvivalentnu prenosnu funkciju sistema

- b) Nacrtati sve na jednoj slici, impulsni, odskočni odziv sistema, mapu nula i polova, nacrtati odziv sistema za zadanu ulaznu funkciju  $u=4\exp(-5*t)$

Podaci:  $W_1=s$ ,  $W_2=2$ ,  $W_3=1/s$



- c) Prikazati odskočni, impulsni odziv , mapu nula i polova i prikazati odziv sistema ako na ulazu deluje funkcija (data dole na slici) datog grafa toka signala koristeći naredbu subplot



### Rešenje:

a)  $G(s) = 3s / 2s^2 + s + 2$

$$W_{ek} = \frac{1 + W_1 W_2 W_3}{1 + W_1 W_2 + W_2 W_3 - W_2}$$

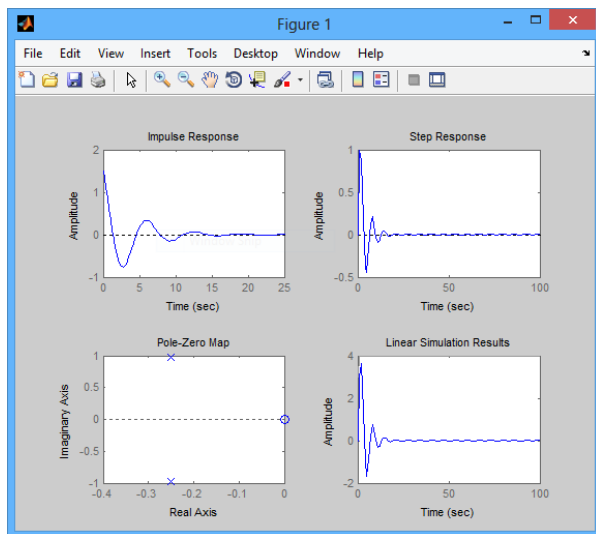
(rešenje dato na osnovu grafa toka signala

koristeći Mejsonovo pravilo)

```

b) >> num = [3 0];
    >> den = [2 1 2];
    >> subplot(2,2,1);
    >> impulse(num, den)
    >> subplot(2,2,2)
    >> t = 0:1:100;
    >> step(num, den, t)
    >> subplot(2,2,3);
    >> pzmap(num, den)
    >> subplot(2,2,4);
    >> u = 4 - exp(-5*t);
    >> lsim(num, den, u, t)

```

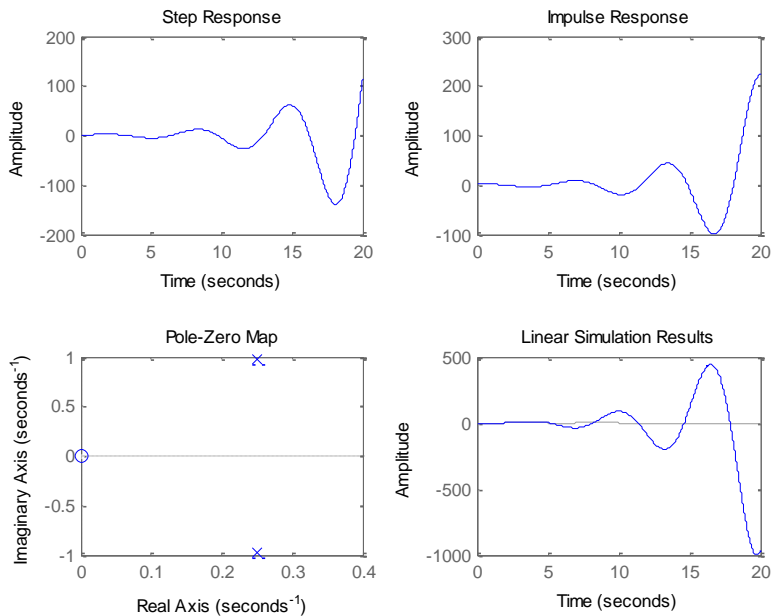




```

num=[3 0];
den=[2 -1 2];
t=0:0.01:20;
subplot(2,2,1);
step(num,den,t);
subplot(2,2,2);
impz(num,den,t);
subplot(2,2,3);
pzmap(num,den);
u=5*heaviside(t-2)-5*heaviside(t-5)+5*heaviside(t-7)-5*heaviside(t-10);
subplot(2,2,4);
lsim(num,den,u,t)

```



## Zadatak 2.2

Za redno RL kolo uraditi

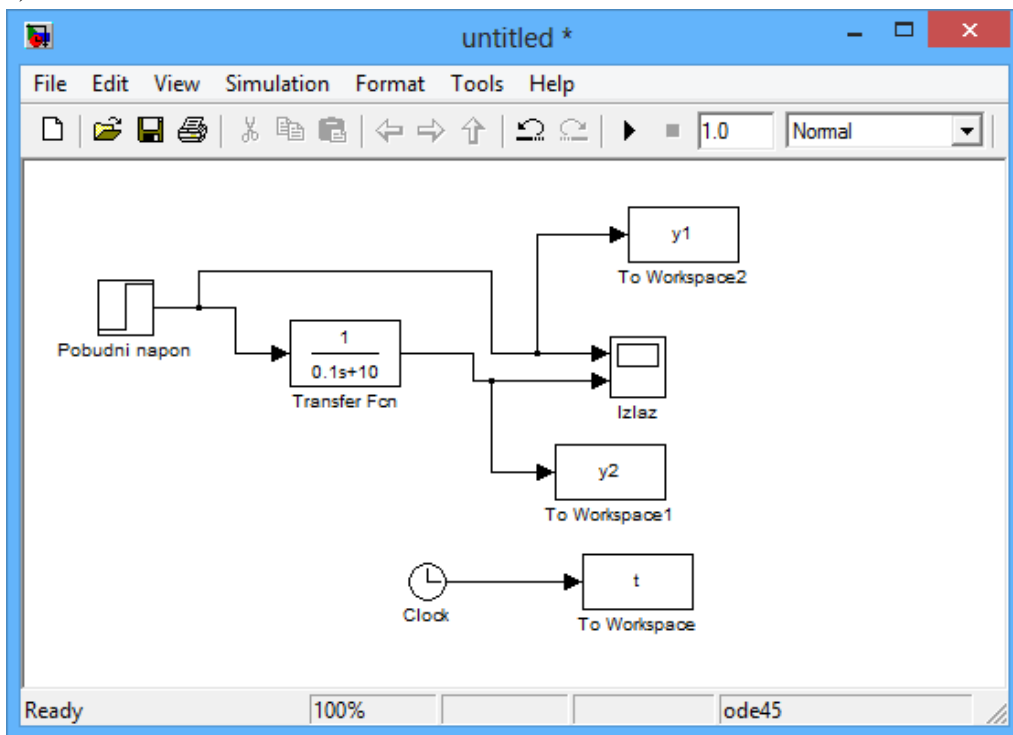
- a1) Formirati model sistema, u vidu prenosna funkcije sistema
- a2) Simulirati kolo koristeći model u vidu prenosnu funkcije sistema i nacrtati odziv sistema
- b1) Formirati model sistema, u vidu prostora stanja sistema
- b2) Simulirati kolo koristeći model prostor stanja sistema i nacrtati odziv sistema
- c) Simulirati kolo koristeći model u vidu diferencijalnu jednačinu sistema i nacrtati odziv sistema

Podaci: R=10 oma, L=100 mH, U=100 V

**Rešenje:**

a)  $I(s) / V(s) = 1 / 0.1s + 10$

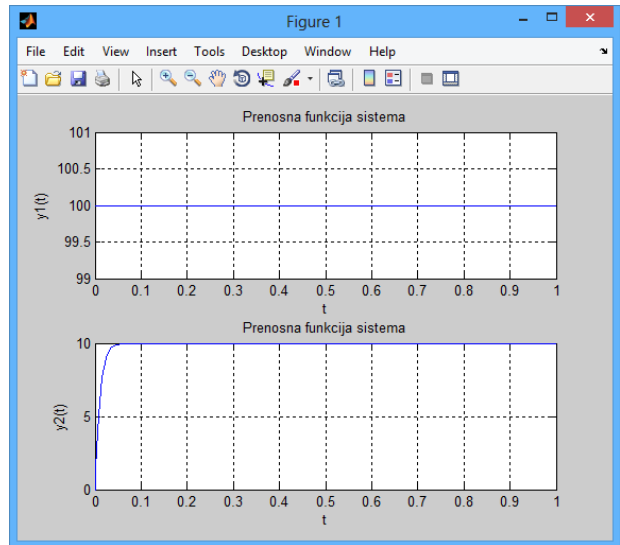
b)



```

>> subplot(2,1,1);
>> plot(t, y1)
>> xlabel('time')
>> xlabel('t')
>> ylabel('y1(t)')
>> grid()
>> title('Prenosna funkcija sistema')
>> subplot(2,1,2)
>> plot(t, y2)
>> xlabel('t')
>> ylabel('y2(t)')
>> grid()
>> title('Prenosna funkcija sistema')

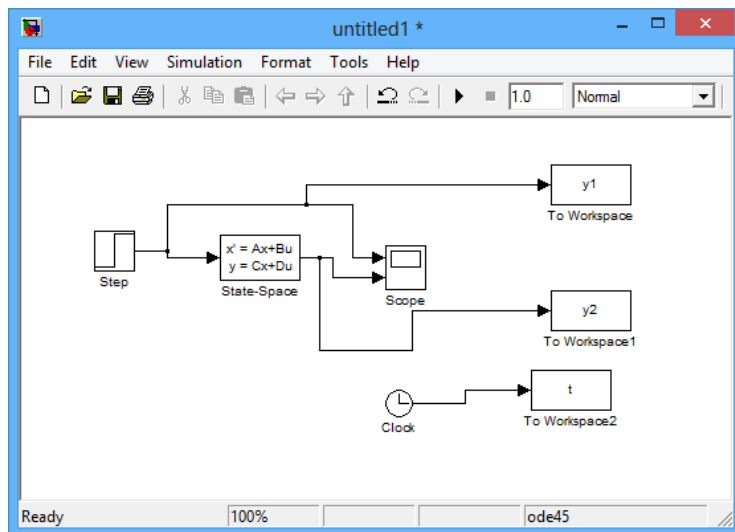
```



$$c) [x1] = [-100][x1] + 10[v]$$

$$[y] = [1][x1] + [0][v]$$

d)

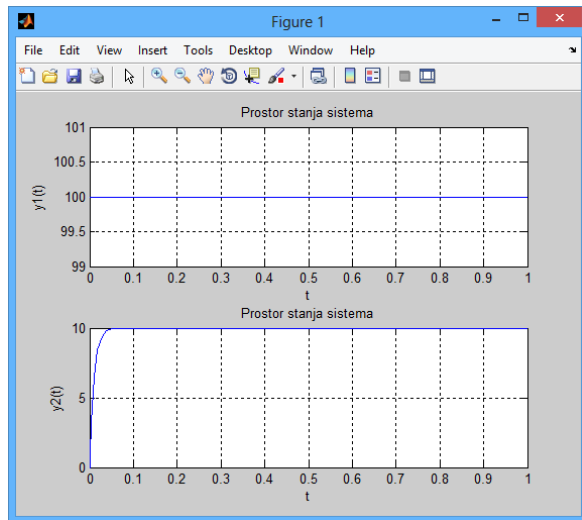


```

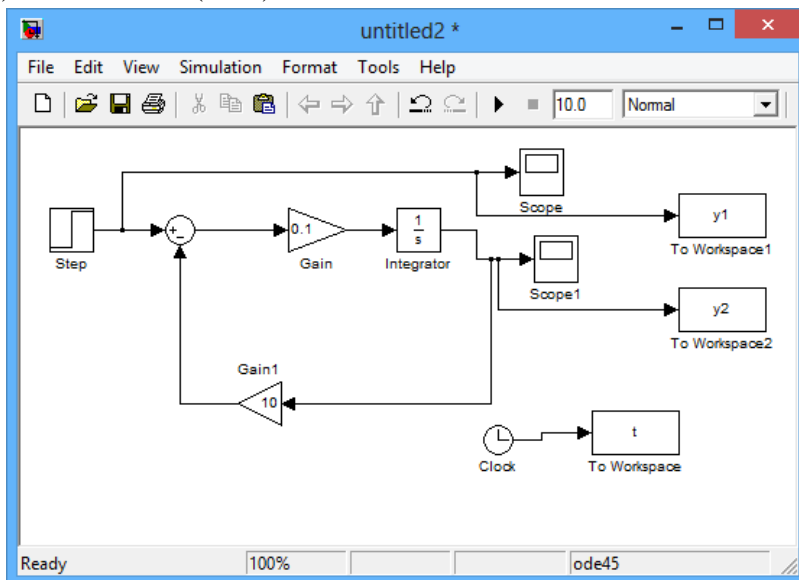
>> subplot(2,1,1);plot(t, y1)
>> xlabel('time')xlabel('t')
    ylabel('y1(t)')
    grid()
    title('Prostor stanja
sistema')

>> subplot(2,1,2)
    plot(t, y2)
    xlabel('t')
    ylabel('y2(t)')
    grid()
    title('Prostor stanja
sistema')

```



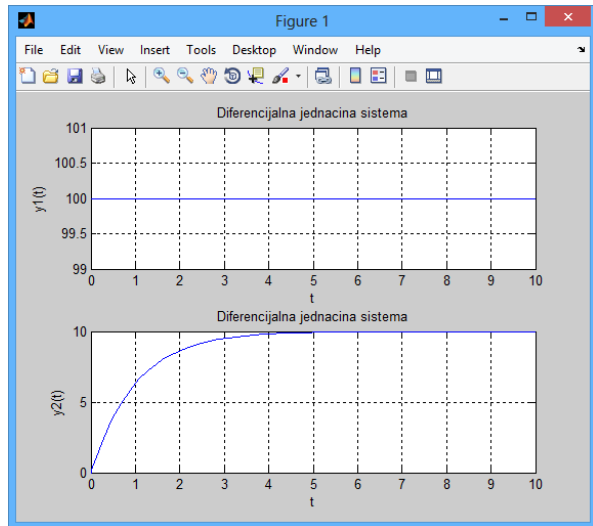
d) e)  $V - RI = L * (di/dt)$



```

>> subplot(2,1,1);
    plot(t, y1)
    xlabel('time')
    xlabel('t')
    ylabel('y1(t)')
    grid()
    title('Diferencijalna,
jednacina sistema')
subplot(2,1,2)
plot(t, y2)
xlabel('t')
ylabel('y2(t)')
grid()
title('Diferencijalna,
jednacina sistema')

```



### Zadatak 2.3

a) Konvertovati dati oblik modela u faktorizovani oblik, napisati njegovu formu u faktorizovanom obliku i dobiveni oblik pretvorite u oblik “tf”

$$W(s) = \frac{s + 3}{s^4 + 7s^3 + 14s^2 + 8s}$$

b) Prikazati odskočni, impulsni odziv, mapu nula i polova

c) Konvertovati prenosnu funkciju datog faktorizovanog oblika u prenosnu funkciju predstavljenu kao odnos dva polinoma po s, napisati njegovu formu kao odnos dva polinoma i dobiveni oblik ponovo pretvoriti u oblik “zpk”

$$W(s) = 2 \frac{(s + 2)(s + 10)}{(s - 1)(s - 2)(s + 5)}$$

d) Prikazati odskočni, impulsni odziv, mapu nula i polova

### Rešenje:

```
n = [1 3];  
d = [1 7 14 8 0];  
[z,p,k] = tf2zp(n,d)  
t = 0:1:100;  
subplot(3,1,1);  
step(n,d,t);  
subplot(3,1,2);  
impz(n,d);  
subplot(3,1,3);  
pzmap(n,d);
```

OUTPUT:

z =

-3

p =

0

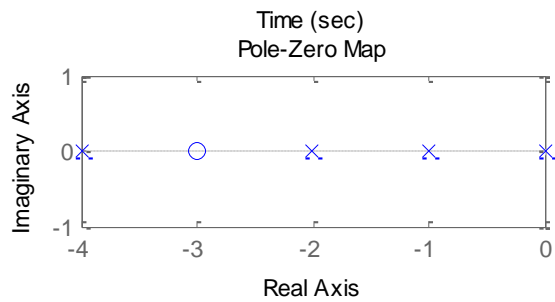
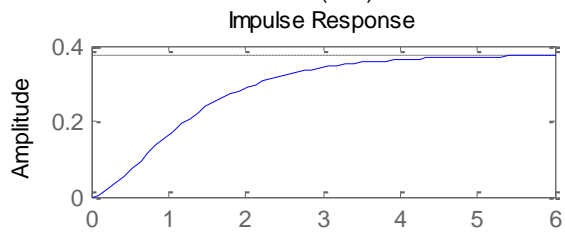
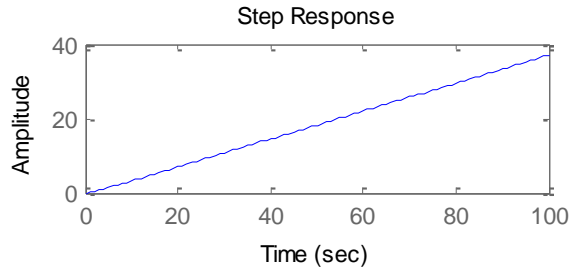
-4.0000

-2.0000

-1.0000

k =

1



```

z = [-2 -10]';
p = [1 2 -5]';
k = [2];
[n, d] = zp2tf(z,p,k)
[z,p,k] = tf2zp(n,d)
t = 0:0.01:100;
subplot(3,1,1);
step(n,d,t);
subplot(3,1,2);
impulse(n,d);
subplot(3,1,3);
pzmap(n,d);
OUTPUT:

```

```

n =
    0    2   24   40

```

```

d =
    1    2  -13   10

```

```

z =
   -10
    -2

```

```

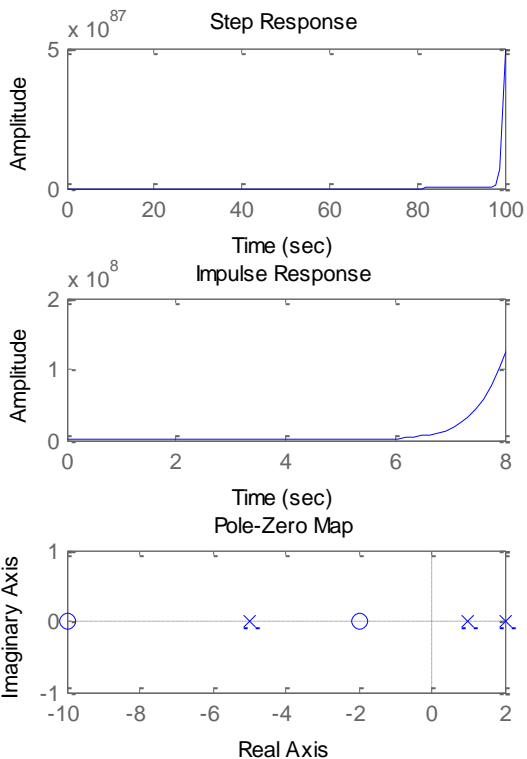
p =
  -5.0000
   2.0000
   1.0000

```

```

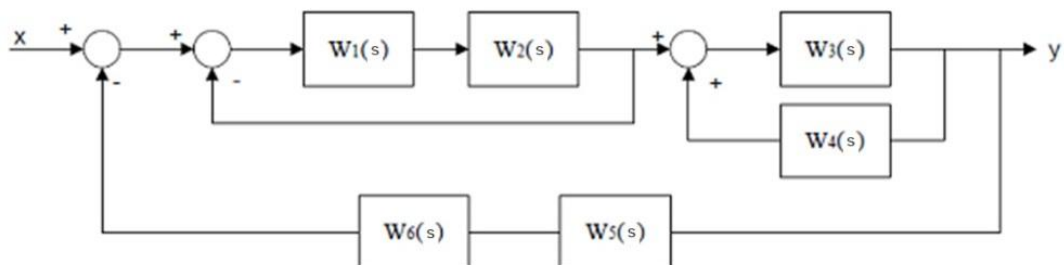
k =
    2

```



## Zadatak 2.4

Zadat je model sistema predstavljenog blok dijagramom na slici [19]:



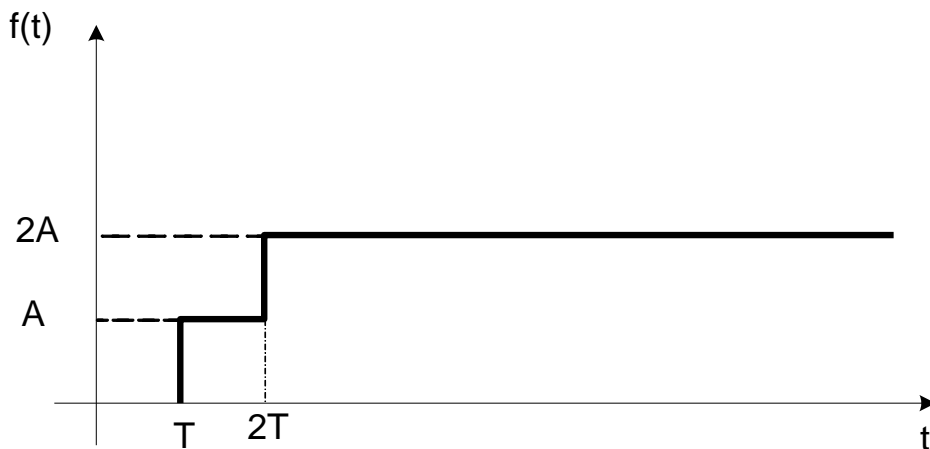
$$W_1(s) = \frac{s-2}{s^2+4s+2} \quad W_2(s) = \frac{2}{3s+1} \quad W_3(s) = \frac{8s+3}{s^2+11s+6}$$

$$W_4(s) = \frac{1}{s+3}$$

$$W_5(s) = 2 \quad W_6(s) = \frac{3}{s+2}$$

a) Odrediti ekvivalentnu prenosnu funkciju sistema zadanim blok dijagramom.

b) Prikazati odskočni, impulsni odziv, mapu nula i polova i prikazati odziv sistema ako na ulazu deluje funkcija (data na donjoj slici) datog blok dijagramom koristeći naredbu subplot



**Rešenje:**

```
num1=[1 -2];
den1=[1 4 2];
num2=[2];
den2=[3 1];
```



```

[n12,d12]=series(num1,den1,num2,den2);
[n1,d1]=cloop(n12,d12);
num3=[8 3];
den3=[1 11 6];
num4=[1];
den4=[1 3];
[n34,d34]=feedback(num3,den3,num4,den4,1);
[n11,d11]=series(n1,d1,n34,d34);
num6=[3];
den6=[1 2];
[n,d]=feedback(n11,d11,2*num6,den6,-1)
subplot(2, 2, 1);
pzmap(n, d);
subplot(2, 2, 2);
t = 0:0.1:10;
step(n, d, t);
subplot(2, 2, 3);
impulse(n, d, t);
u = 5*heaviside(t-3)+5*heaviside(t-6);
subplot(2, 2, 4);
lsim(n, d, u, t);

```

$n =$

0 0 0 16 54 -46 -216 -72

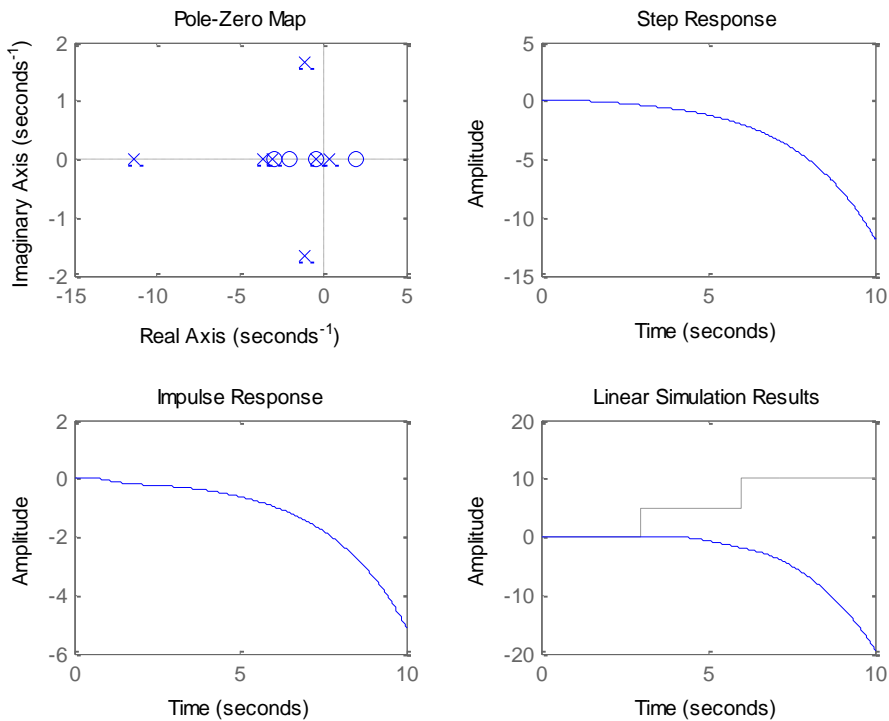
$d =$

*Columns 1 through 4*

3 61 397 1188

*Columns 5 through 8*

1863 1328 -334 -276



### 2.1.2. Frekventni odziv elemenata i sistema

Frekventna karakteristika je odziv sistema na sinusnu funkciju zavisno o frekvenciji u stacionarnom stanju. Frekventna karakteristika se snima tako da se na generatoru funkcija namesti odgovarajuća amplituda ( $X_m$ ) sinusoide i menja se frekvencija ulaznog signala. Za svaku nameštenu ulaznu frekvenciju osciloskopom se snima izlazni signal. Meri se amplituda ( $Y_m$ ) i fazni pomak ( $\varphi$ ) izlaznog signala. Svaki linearni sistem ima svoje frekventno područje delovanja.

Ulazna i izlazna veličina  $i$  i  $o$  su napisane u obliku kompleksnih brojeva i dobijaju izgled:

$$\begin{aligned}
 & \underline{\quad} \\
 & \underline{\quad} \\
 & \underline{\quad}
 \end{aligned}$$

Na osnovu toga možemo definisati frekventnu prenosnu funkciju koja predstavlja odnos ulazne i izlazne kompleksne veličine:

— —

gde je:

—

– argument frekventne prenosne funkcije.

Modulo pokazuje zavisnost odnosa amplituda izlaznog i ulaznog periodičnog signala od frekvencije, na osnovu čega se dobija amplitudno-frekventna karakteristika.

Argument daje frekventnu zavisnost pomeraja faze, koji nastaje pri prolasku periodičnog signala kroz dinamički sistem na osnovu čega se dobija fazno-frekventna karakteristika.

Od frekventnih karakteristika razlikujemo sledeće tipove:

- amplitudno-frekventna karakteristika (promena amplitude u zavisnosti od frekvencije)
- fazno-frekventna karakteristika (fazni pomeraj u zavisnosti od frekvencije)
- amplitudno-fazno-frekventna karakteristika.

Amplitudna i fazna karakteristika određuju svojstva dinamičkog sistema u području frekvencije od do . Znači određuje zavisnost veličine izlaznog i ulaznog signala o frekvenciji

—

Fazno-frekventna karakteristika određuje zavisnost faznog pomaka izlaznog i ulaznog signala o frekvenciji

Najčešće i dijapazon odnosa amplituda, odnosno modulo frekventne funkcije prenosa, može biti veliki, pa se i po toj osi uvodi logaritamska razmera. Kako se u telekomunikacijama, gde frekventna karakteristike igraju dominantnu ulogu, odnos amplituda obično izražava decibelima (dB), i u automatici je usvojen isti koncept.

Dosta izračunavanja zahteva konstruisanje dijagrama amplitudne i fazne karakteristike kao što su vrednosti  $U(\omega)$ ,  $V(\omega)$  ili  $A(\omega)$ -amplitudno frekventna karakteristika ( $F(\omega)$  i -fazno frekventna karakteristika, za niz vrednosti kružne frekvencije .

Iz tog razloga se frekventne karakteristike najčešće prikazuju u logaritamskom obliku gde se dobijaju logaritamske frekventne karakteristike. Definisana je sa:

Realni deo, odnosno [db] je logaritamsko-amplitudna frekventna karakteristika koja se označava sa :

Znači i određuju logaritamsku frekventnu karakteristiku pa samim tim i frekventnu karakteristiku . Vrednosti logaritamske amplitudno frekventne karakteristike se mere decibelima [db].

U klasičnoj analizi i sintezi sistema upravljanja, jedan pogodan oblik predstavljanja amplitudno – fazno – frekventna karakteristika u logaritamskoj razmeri, konstruisanjem ne tačnih već asimptotskih dijagrama, predložen je od strane američkog naučnika Bodea.

Bodeovi dijagrami se sastoje od parova dijagrama. Jedan od ovih dijagrama prikazuje zavisnost amplitudske, a drugi fazne karakteristike sistema od kružne frekvencije. Uobičajeno se ove karakteristike prikazuju u funkciji frekvencije, gde je baza logaritma 10. Ovo omogućava prikazivanje zavisnosti pojačanja (slabljenja) i faznog pomeraja sistema u širokom opsegu frekvencija. Dakle, jedinica na apscisi ovih dijagrama je dekada, koja znači deseterostruku razliku dveju frekvencija, odnosno za bilo koje  $\omega_1$  , za dekadu veća frekvencija je  $\omega_2 = 10\omega_1$  , a za dekadu manja je  $\omega_3 = 0.1\omega_1$  . Amplitudska logaritamska karakteristika se meri decibelima [dB] to jest  $L(\omega) = 20\log|A(j\omega)[dB]$

Ovo ima prednosti za vrlo velike i za vrlo male vrednosti  $|A(j\omega)|$  , kada se koriste odgovarajuće aproksimacije za  $20\log|A(j\omega)|$  i činjenica da se amplitudska logaritamska karakteristika kaskadno povezanih sistema dobija jednostavnim sumiranjem tih karakteristika pojedinih delova. Fazna karakteristika se meri u radijanima ili stepenima.

Bodeove krive su logaritamski frekventni dijagrami slabljenja i faze

– Moduo frekventne karakteristike izražen u decibelima u funkciji

---

– Moduo frekventne karakteristike u funkciji

---

Konstrukcija ovih dijagrama za sistem opisan funkcijom prenosa se svodi na sabiranje karakteristika činioca, posledica: pojačanja, reda astatizma, nula i polova.

---

---

Softverski paketi kao što je MATLAB omogućavaju izračunavanje i crtanje Bodeovih dijagrama. Međutim, postoje jednostavna pravila koja omogućavaju brzo skiciranje ovih dijagrama. Za ovo je potrebno da funkcija prenosa bude data u faktorizovanom obliku, tj. kao u prethodnom slučaju.

Bodeove dijagrame obično crtamo za prenosne funkcije otvorene petlje

Matlab naredbe:

Neka je prenosna funkcija otvorene petlje zadata u obliku razlomka:

---

Za računanje tj. crtanje frekventnih odziva koriste se sledeće naredbe

```
>>bode(num,den) % crta amplitudni i fazni Bodeov dijagram pri čemu se
                % frekvencijski
                % opseg odnosno broj tačaka automatski određuju.

>>bode(num,den,{wmin,wmax}) % crta Bodeove dijagrame za frekvencije
između wmin i wmax

>>bode(num,den,w) % crta Bodeove dijagrame za frekvencije zadate vektorom
                  % w (frekvencijski vektor najčešće prethodno zadajemo
                  % naredbom logspace()):

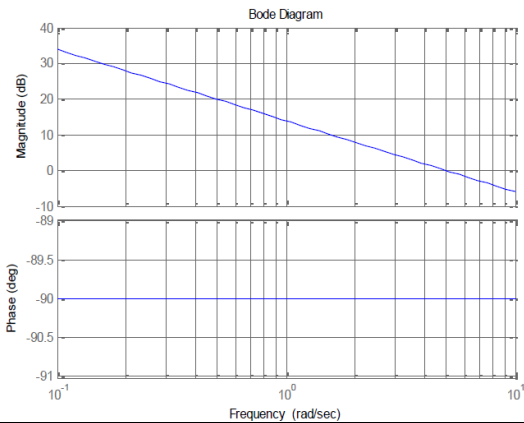
>>w=logspace(d1,d2) % generiše redni vektor od 50 logaritamski međusobno
```

% udaljenih tačaka, smeštenih između dekada  $10^{d1}$  i  $10^{d2}$

Bodeovi dijagrami nekih osnovnih elemenata:

Integralni element

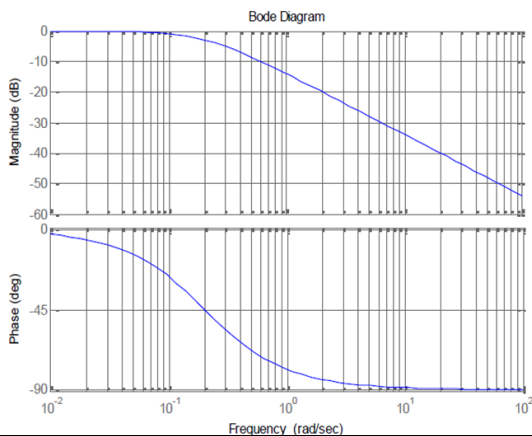
---



```
>> G1=tf(5,[1,0]);  
>>W=logspace(-1,1);  
>>Bode(G1,W);  
>>Grid
```

Aperiodičan element

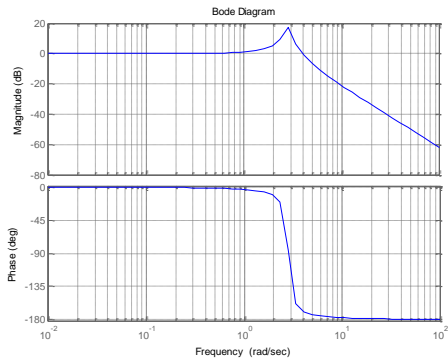
---



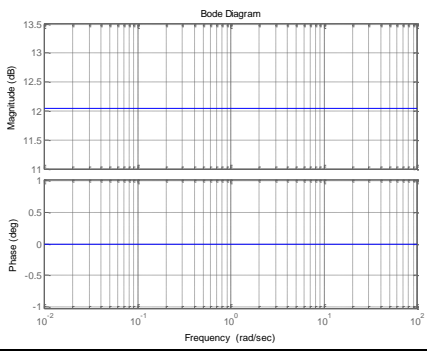
```
>>W2=tf(1,[5 1]);  
>>w = logspace(-2,2);  
>>bode(G2,w);  
>>grid
```

Oscilatorni element

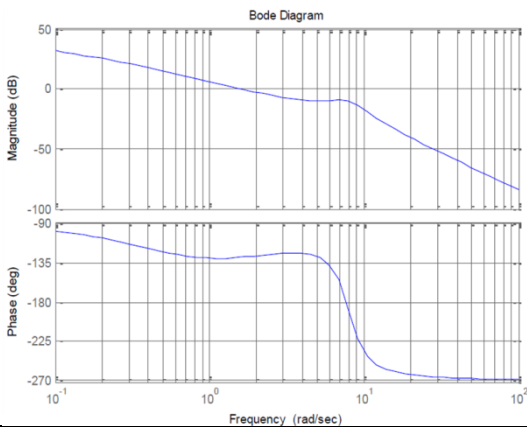
---



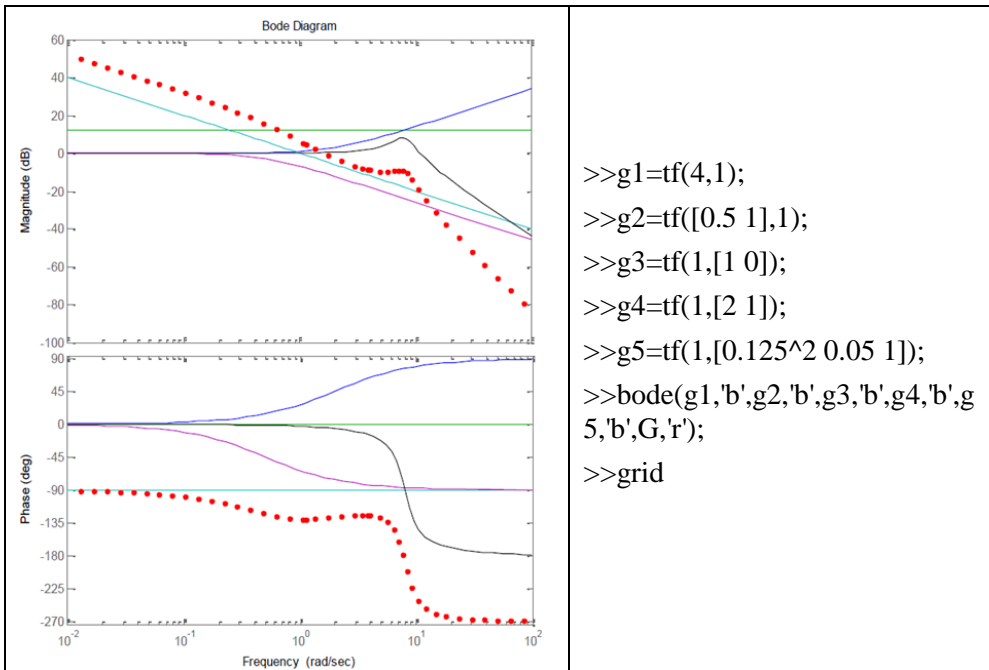
```
>> g = tf(1,[0.125 0.05 1]);
>> w = logspace(-2,2);
>> bode(g, w);
>> grid on;
>>
```



```
g = tf(4,1);
w = logspace(-2,2);
bode(g, w);
grid on
```



```
>>s=tf('s');
>>G=4*(1+0.5*s)/(s*(1+2*s)*(1+0.05*s+(0.125*s)^2));
>>w=logspace(-1,2);
>>bode(G,w);
>>grid
```



```
>>g1=tf(4,1);
>>g2=tf([0.5 1],1);
>>g3=tf(1,[1 0]);
>>g4=tf(1,[2 1]);
>>g5=tf(1,[0.125^2 0.05 1]);
>>bode(g1,'b',g2,'b',g3,'b',g4,'b',g
5,'b',G,'r');
>>grid
```

**Zadatak 2.5.**

Data je prenosna funkcija otvorenog kola:



Izvesti izraz za logaritamski dijagram slabljenja (amplitudna karakteristika), dijagram faze (fazna karakteristika) i nacrtati Bodeove dijagrame [19]:

**Rešenje:**

Logaritamski dijagrami slabljenja i faze sistema dobijaju se kao algebarski zbir odgovarajućih dijagrama svih članova koji formiraju funkciju prenosa sistema u otvorenoj povratnoj sprezi.

Dijagram slabljenja:

( u log razmeri)

Dijagram faze:

( u log razmeri)

U funkciji prenosa otvorenog kola  $W_s(s)$  zamenjujemo  $s$  sa  $j\omega$  :

$$s = j\omega$$

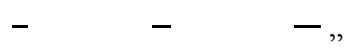


prelomne frekvencije:  $\omega = 4$ ,  $\omega = 16$ .

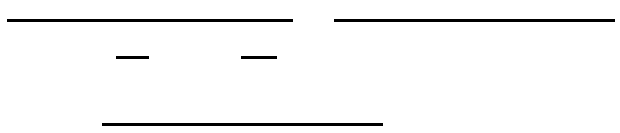
Dijagram slabljenja (amplitudna karakteristika):



Dijagram faze (fazna karakteristika):



Prenosnu funkciju napišemo u obliku:



<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ <math>k=128</math>;</li> <li>➤ <math>z=[]</math>;</li> <li>➤ <math>s=</math> _____ ;</li> <li>➤ <math>=zs2tf(z,s,k)</math></li> </ul> <p><math>n=</math></p> <p style="margin-left: 20px;"><math>0 \quad 0 \quad 0 \quad 128</math></p> <p><math>d=</math></p> <p style="margin-left: 20px;"><math>1 \quad 20 \quad 64 \quad 0</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ <math>bode(n,d)</math></li> </ul>	<p>Dijagram slabljenja i dijagram faze</p>
---	--

**Zadatak 2.7**

Data je funkcija prenosa otvorenog kola:

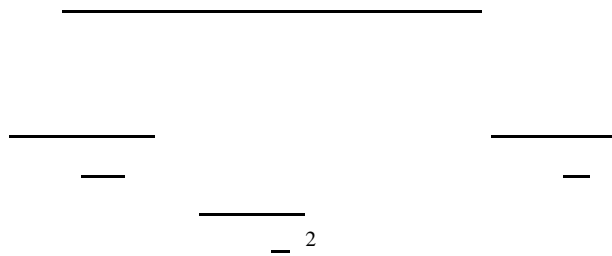
$$K=1$$

Izvesti izraz za logaritamski dijagram slabljenja (amplitudna karakteristika), dijagram faze (fazna karakteristika) i nacrtati Bodeove dijagrame [19]:

**Rešenje:**

U prenosnoj funkciji otvorenog kola zamenimo vrednost konstante  $K=1$   $s=$  , prenosna funkcija tada postaje:

Dijagram slabljenja:



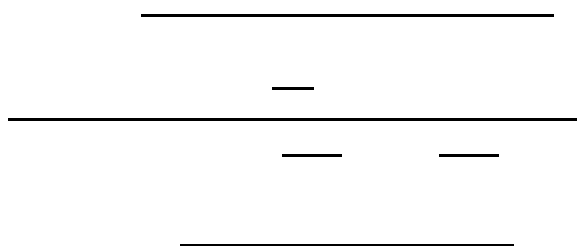
Dijagram faze:

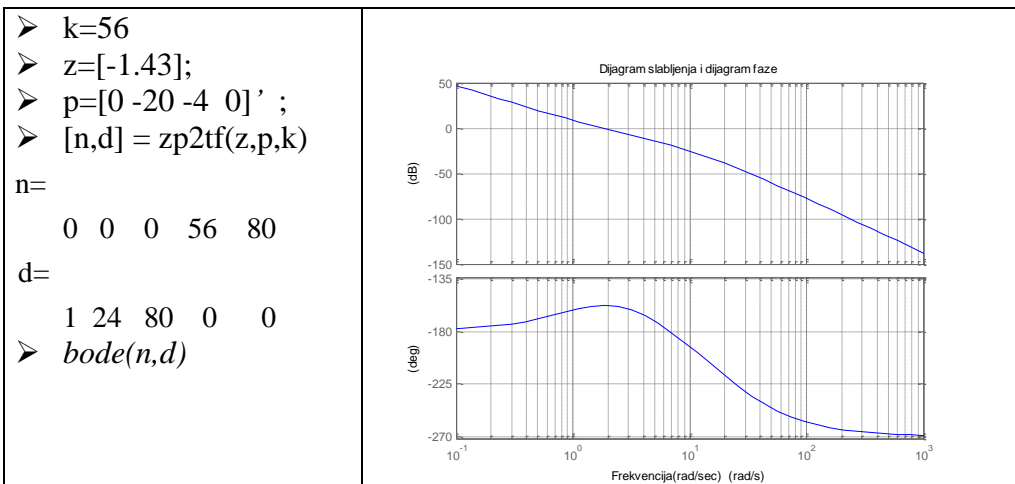


Prelomne učestanosti:  $\omega_1 = 1.43$ ;  $\omega_2 = 1$ ;  $\omega_3 = 20$ ;  $\omega_4 = 4$ .

Rešenja u Matlabu:

Prenosnu funkciju napišimo u obliku:





### Zadatak 2.8

Data je strukturna blok šema, gde je u direktnoj grani data redna veza elemenata sa prenosnim funkcijama , a u povratnoj grani Izvesti izraz za logaritamski dijagram slabljenja (amplitudna karakteristika), dijagram faze (fazna karakteristika) i nacrtati Bodeove dijagrame [19]:

$$W_1 = \text{---}, W_2 = \text{---}, \text{---}$$

### Rešenje:

Funkcija prenosa otvorenog kola je:

U funkciji prenosa zamenimo s sa j , pa prenosna funkcija postaje:

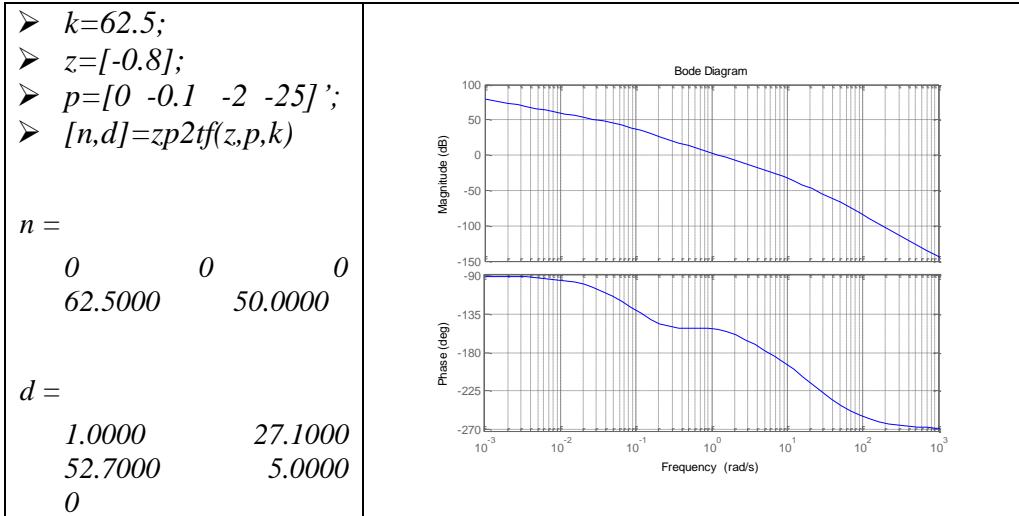
$$\text{---}$$

Prelomne učestanosti:

$$= \text{---} = 0.8 \quad = \text{---} = 0.1 \quad = \text{---} = 2 \quad = \text{---} = 25 \quad = 0$$

Amplitudna karakteristika:

Fazna karakteristika:



### Zadatak 2.9

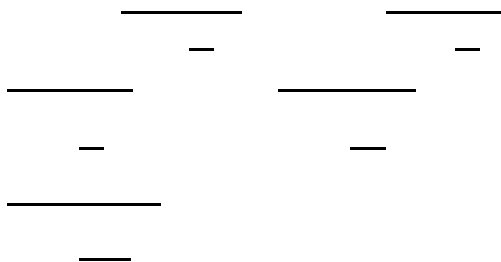
Za sistem čija je funkcija povratnog prenosa:

Izvesti izraz za logaritamski dijagram slabljenja (amplitudna karakteristika), dijagram faze (fazna karakteristika) i nacrtati Bodeove dijagrame [19].

### Rešenje:

U funkciji prenosa zamenimo  $s$  sa  $j\omega$ , pa prenosna funkcija otvorenog kola u domenu učestanosti postaje:

Amplitudna karakteristika:



Fazna karakteristika:



- $k=31.6;$
- $z=[-1 \ -5]';$
- $p=[0 \ -2 \ -10 \ -1/3]';$
- $[n,d]=zs2tf(z,p,k)$

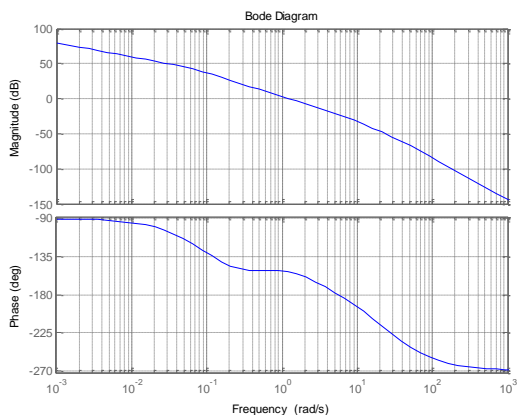
$n =$

$0$	$0$	$31.6000$
$189.6000$	$158.0000$	

$d =$

$1.0000$	$12.3333$
$24.0000$	$6.6667$
$0$	

- $bode(n,d)$



## Zadatak 2.10

Data je prenosna funkcija otvorenog kola:

---

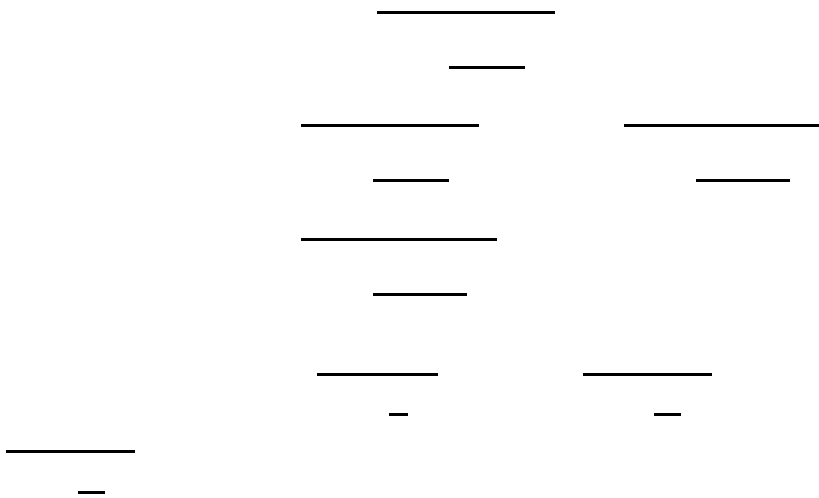
Izvesti izraz za logaritamski dijagram slabljenja (amplitudna karakteristika), dijagram faze (fazna karakteristika) i nacrtati Bodeove dijagrame [19].

**Rešenje:**

Funkcija prenosa otvorenog kola u domenu učestanosti je:

---

Amplitudna karakteristika:



Fazna karakteristika:



<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ <math>k=20;</math></li> <li>➤ <math>z=[-10]</math></li> <li>➤ <math>s=[0 \ -2 \ -50 \ -20]';</math></li> <li>➤ <math>[n,d]=zsf2tf(z,s,k)</math></li> </ul> <p><math>n=</math></p> <p style="margin-left: 20px;"><math>0 \ 0 \ 0 \ 20 \ 200</math></p> <p><math>d=</math></p> <p style="margin-left: 20px;"><math>1 \ 72 \ 1140 \ 2000</math></p> <p style="margin-left: 20px;"><math>0</math></p> <p style="margin-left: 20px;"><math>bode(n,d)</math></p>	
---	--

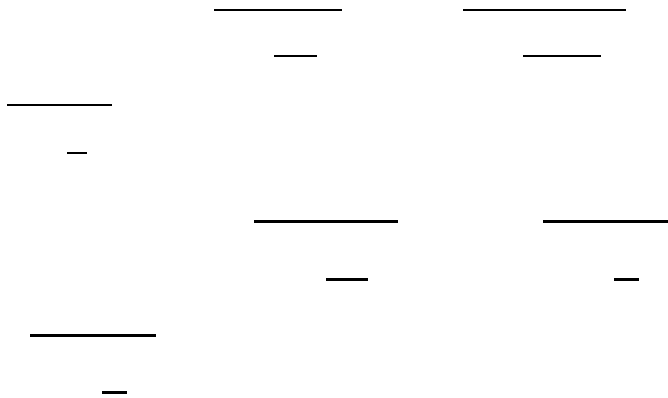
## Zadatak 2.11

Data je prenosna funkcija otvorenog kola:

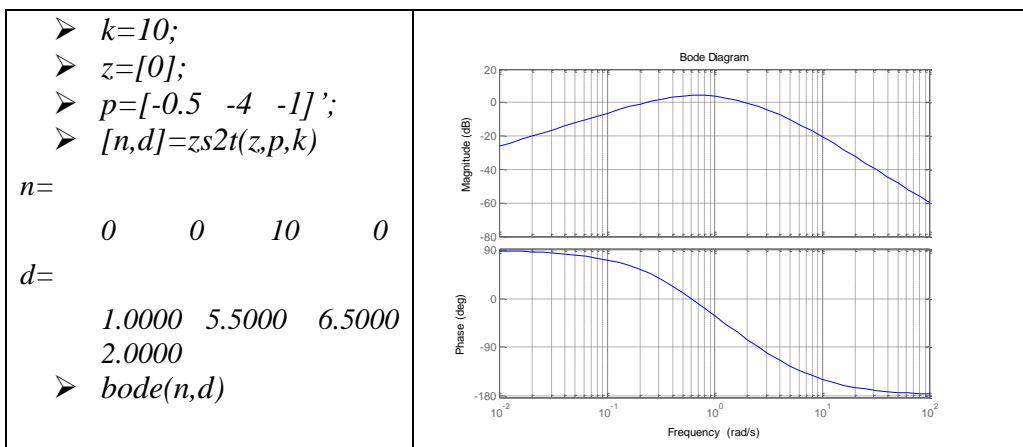
Izvesti izraz za logaritamski dijagram slabljenja (amplitudna karakteristika), dijagram faze (fazna karakteristika) i nacrtati Bodeove dijagrame [19].

### Rešenje:

Amplitudna karakteristika:



Fazna karakteristika:



### Zadatak 2.12

Konstruisati logaritamske dijagrame slabljenja i faze sistema funkcije prenosa u otvorenoj povratnoj sprezi za sistem funkcije prenosa [21]

$$\frac{W(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(1+s)(1+s^2)} ; \quad \text{b) } \frac{W(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(1+s)(1+s^2)}$$

### Rešenje:

- a) Shodno pravilima za crtanje Bodeovih frekventnih karakteristika sistema iznetih u uvodnom teorijskom delu ovog poglavlja, karakteristike datog sistema su prikazane na slikama 1.

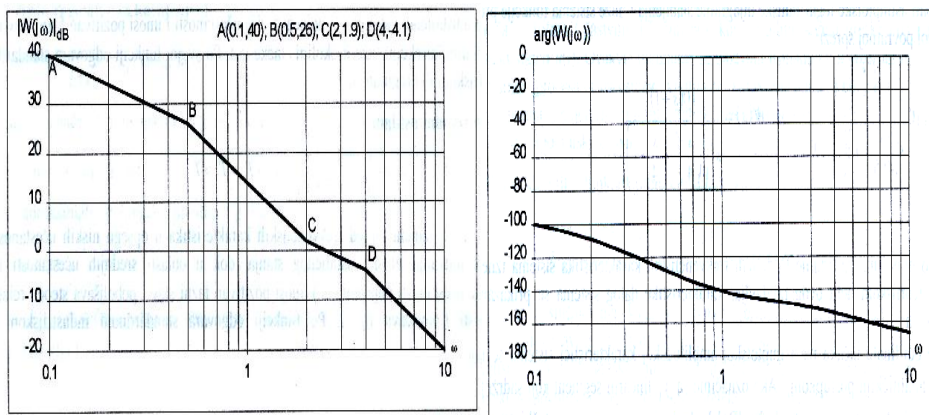
Koordinate tačaka na asimptotskoj amplitudskoj karakteristici sistema se mogu odrediti i analitičkim postupkom. Ako označimo sa  $y_1$  linearni segment koji sadrži tačke A i B, znajući da je to segment od  $-20$  dB/dekadi koji preseca osu u tacki 10 (toliko iznosi brzinska konstanta za ovaj sistem) možemo napisati da analitički oblik ovog segmenta, gde su ordinate izražene u decibelima, glasi:

—

Na osnovu toga se jednostavno određuju ordinate tačaka A i B:

—

—



Slika 2.1.a [21]

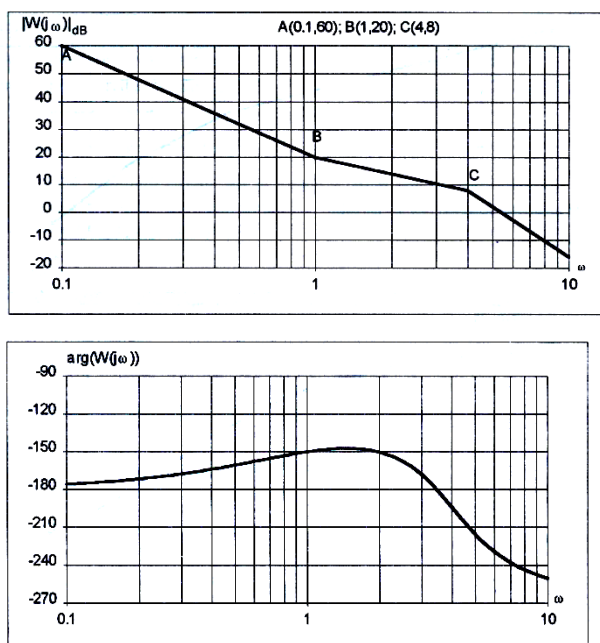


Analogno tome, ako sa označimo linearni segment koji sadrži tačke B i C, znajući da on sadrži tačku B čije smo koordinate već sračunali, i da je njegov nagib  $-40\text{dB/dekadi}$ , možemo napisati analitički oblik ovog segmenta:

Shodno tome se ordinate tačke C lako sračunava:

Ovakvim postupkom je moguće odrediti koordinate bilo koje tačke koja leži na asimptotskoj amplitudskoj frekventnoj karakteristici sistema.

- b) Na slikama 1 b su prikazane Bodeove frekvencijske karakteristike zadanog sistema.



Slika 2.2 b [21]

## 3. STABILNOST SISTEMA

### 3.1. Kriterijumi stabilnosti linearnih sistema automatskog upravljanja

Određivanje korenova kod jednačina višega reda predstavlja složen i težak problem. Naime, rešavanje algebarskih jednačina prvog i drugog reda vrlo je jednostavno, dok je nalaženje korenova kod jednačina trećeg i četvrtog reda nešto teže. Jednačine, pak, petog i višeg reda analitički se ne mogu rešiti već se za određivanje njihovih korenova koriste približne metode koje su vrlo komplikovane i nepodesne za praktičnu primenu. Pored toga, i kada se koreni karakteristične jednačine odrede, veoma je teško prema njima utvrditi koji parametri sistema i koliko utiču na stabilnost.

Da bi se ove teškoće izbegle razvijene su pogodne inženjerske metode koje omogućavaju ispitivanje stabilnosti sistema bez rešavanja karakterističnih jednačina. Takve metode dobile su u teoriji automatskog upravljanja naziv — *kriterijumi stabilnosti*.

#### **Hurvicov kriterijum stabilnosti**

Ovaj kriterijum polazi od karakteristične jednačine sistema *zatvorenog regulacionog kruga*:

Hurvicov kriterijum stabilnosti može se izraziti pomoću nekoliko uslova koji se postavljaju na koeficijente Hurvicovog polinoma pri čemu se polinom svodi na oblik u kojem je  $a_n > 0$ :

- nužni uslov stabilnosti:

Svi koeficijenti karakteristične jednačine moraju biti različiti od 0 i imati isti predznak.

- dovoljan uslov stabilnosti je da sve dijagonale subdeterminante i glavna determinanta moraju biti veći od nule.

### Zadatak 3.1

Ispitati stabilnost sistema čiji je karakterističan polinom:

Primenom Hurvicovog kriterijuma

**Rešenje:**

Iz jednačine sledi da je  
Pošto nisu svi dijagonalni minori determinante veći od nule sistem nije stabilan. Kako je karakteristični polinom ima par konjugovanih korena sa realnim delom koji je nula i sistem se nalazi na granici oscilatorne stabilnosti.

#### Rausov kriterijum stabilnosti

Rausov kriterijum je opštiji od Hurvicovog kriterijuma. Hurvicov kriterijum stabilnosti se može izvesti iz Rausovog kriterijuma. Osnovna prednost nad Hurvicovim kriterijumom je mogućnost određivanja broja desnih korena karakterističnog polinoma, ako je on nestabilan. Rausov kriterijum se zasniva na formiranju odgovarajuće tabele - *Rausove tabele* - na osnovu koeficijenata karakterističnog polinoma. U udžbeničkoj literaturi postoje različiti prilazi formiranju Rausove tabele.

Za karakterističnu jednačinu sistema:  $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ , Rausov kriterij se svodi na formiranje sledeće tabele:

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	...
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	...
$s^{n-2}$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	...
$s^{n-3}$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	...

$s^{n-4}$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...
$s^0$	$H_1$			

Koeficijenti  $A_i, B_i, C_i$  - se računaju na sledeći način:

$$A_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad A_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$B_1 = \frac{A_1 a_{n-3} - a_{n-1} A_2}{A_1} \quad B_2 = \frac{A_1 a_{n-5} - a_{n-1} A_3}{A_1}$$

$$C_1 = \frac{B_1 A_2 - A_1 B_2}{B_1} \quad C_2 = \frac{B_1 A_3 - A_1 B_3}{B_1}$$

Da bi karakteristična funkcija imala sve polove u levoj  $s$ -poluravni (asimptotski stabilan sistem) potrebno je i dovoljno da su svi koeficijenti u prvoj koloni koeficijenata Rausove tabele pozitivni.

Po formiranju tabele, za zaključivanje o stabilnosti sistema važna je samo prva kolona Rausove tabele - Rausova kolona, uokvirena u tabeli. Kriterijum Rausa glasi:

Dovoljan uslov stabilnosti sistema je da su svi članovi Rausove kolone istog znaka. Ako članovi Rausove kolone nisu istog znaka, sistem je nestabilan, a broj promena znaka u Rausovoj koloni jednak je broju desnih korena karakterističnog polinoma [30].

### Zadatak 3.2

Ispitati stabilnost sistema datog sa sledećom prenosnom funkcijom [30]:

$$G(s) = \frac{1}{s^4 + 6s^3 + 13s^2 + 12s + 4}$$

**Rešenje:**

Odgovarajuća Rausova tabela je:

$s^4$	1	13	4
$s^3$	6	12	0
$s^2$	11	4	
$s^1$	9.8	0	
$s^0$	4		

Prema tome, sistem je asimptotski stabilan.

### Zadatak 3.3

Ispitati stabilnost sistema datog sa sledećom prenosnom funkcijom:

$$G(s) = \frac{2s + 1}{s^6 + s^5 + 3s^4 + 2s^3 + s^2 + 2s + 1}$$

Odgovarajuća Rausova tabela je:

$s^6$	1	3	1	1
$s^5$	1	2	2	0
$s^4$	1	-1	1	
$s^3$	3	1	0	
$s^2$	-1.33	1		
$s^1$	3.25	0		
$s^0$	1			

Prema tome, može se zaključiti da je sistem nestabilan [30].

Teorema:

Broj promena znaka u prvoj koloni koeficijenata Rausove tabelle određuje broj nestabilnih polova.

Prednost kriterija stabilnosti je, u opštem slučaju, mogućnost analize stabilnosti sistema u funkciji nepoznatog parametra.

### Zadatak 3.4

Odrediti parametar  $K$  tako da sistem dat prenosnom funkcijom:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^4 + 2s^3 + Ks^2 + s + 3}$$

bude asimptotski stabilan [30].

**Rešenje:**

Za dati sistem se formira sledeća Rausova tabela:

$s^4$	1	$K$	4
$s^3$	2	1	0
$s^2$	$\frac{2K-1}{2}$	3	
$s^1$	$\frac{2K-13}{2K-1}$	0	
$s^0$	3		

Da bi sistem bio stabilan potrebno je da budu ispunjeni sledeći uslovi:

$$\frac{2K-1}{2} > 0 \text{ i } \frac{2K-13}{2K-1} > 0$$

Odavde sledi  $K > 6.5$ . Prema tome sistem je stabilan za vrednosti parametra  $K > 6.5$ .

Prilikom primene Rausovog kriterija je moguća pojava nultih elemenata u prvoj koloni koeficijenata. Pored ovoga, moguće je da se pojavi i kompletan nulti red. U oba slučaja sistem nije asimptotski stabilan, ali je interesantno razmatrati ove slučajeve u cilju otkrivanja da li je sistem možda marginalno stabilan ili nestabilan.

U slučaju da se pojavi nulti element u prvoj koloni koeficijenata, tada se umesto nula zameni sa nekim malim pozitivnim brojem  $\varepsilon$  i procedura se dalje nastavi. Na kraju se potraži  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$  i izvrši klasična naliza prve kolone koeficijenata [30].

### Zadatak 3.5

Ispitati stabilnost sistema datog sledećom prenosnom funkcijom:

$$G(s) = \frac{6s + 1}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 5s + 6}$$

**Rešenje:**

Za dati sistem formira se Rausove tabela:

$s^5$	1	3	5	0
$s^4$	2	4	6	0
$s^3$	1	2	0	
$s^2$	$\varepsilon$	6		
$s^1$	$\frac{2\varepsilon - 6}{\varepsilon}$	0		
$s^0$	1			

U trećem redu Rausove kolone se pojavila nula koja se zamenjuje sa  $\varepsilon$  (gde je  $\varepsilon > 0$ ). Rausova tabela kada se pusti  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+}$  dobija sledeći oblik:

$s^5$	1	3	5	0
$s^4$	2	4	6	
$s^3$	1	2	0	
$s^2$	$0_+$	6		
$s^1$	$-\infty$	0		
$s^0$	1			

Prema tome, uočavaju se dve promene predznaka pa se može zaključiti da je sistem nestabilan i da ima dva nestabilna pola (u desnoj  $s$  poluravni) [30].

U slučaju kada se pojavi kompletan nulti red sistem nije asimptotski stabilan, ostaje da se ispita da li je eventualno marginalno stabilan. Procedura je sledeća:

1. Kada se pojavi nulti red formira se pomoćni parni (neparni) polinom  $d(s)$  od koeficijenata reda iznad nultog reda.

2. Nađe se  $\frac{d}{ds}(d(s))$ , a zatim koriste koeficijenti ovog polinoma umesto dobijenih nultih koeficijenata.
3. Nastavi se standardno formiranje tabele

$$P(s) = P'(s)d(s)$$

### Zadatak 3.6

Ispitati stabilnost sledećeg sistema [30]:

$$G(s) = \frac{1}{s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

### Rešenje:

Prva tri reda Rausove tabele:

$s^5$	1	2	1	0
$s^4$	1	2	1	0
$s^3$	0	0	0	

U ovom slučaju u trećem redu se pojavljuje nulti red, pa se formira pomoćni polinom

$$d(s) = s^4 + 2s^2 + 1$$

Dalje je:

$$\frac{d}{ds}(d(s)) = 4s^3 + 4s$$

sada Rausova tabela poprima sledeći oblik:

$s^5$	1	2	1	0
$s^4$	1	2	1	0
$s^3$	4	4	0	
$s^2$	1	1		
$s$	0	0		



Sada se ponovo pojavljuje nulti red, sada u petom redu tabele. Ponovo se formira pomoćni polinom:

$$d_1(s) = s^2 + 1$$

diferenciranjem se dobija:

$$d_1'(s) = 2s$$

Konačno tabela ima sledeći izgled:

$s^5$	1	2	1	0
$s^4$	1	2	1	0
$s^3$	4	4	0	
$s^2$	1	1		
$s^1$	2	0		
$s^0$	1			

S obzirom da je:

$$d_1(s) = s^2 + 1 = 0 \Rightarrow s_{1/2} = \pm j$$

$$d(s) = (d_1(s))^2 = 0 \Rightarrow s_{1/2} = \pm j, s_{3/4} = \pm j$$

sistem je nestabilan jer na imaginarnoj osi postoje polovi  $\pm j$  višestrukosti 2 [30].

## Najkvistov kriterijum stabilnosti

### Poseban Najkvistov kriterijum

Teorema . Ako je otvoreno kolo sistema regulisanje stabilno, onda bi sistem regulisanja bio stabilan, potrebno je i dovoljno da deo hodografa frekventne karakteristike  $F_{ok}(j\omega)$  otvorenog kola pri promeni učestanosti  $\omega \in [0 + \infty]$  ne obuhvati ,i ne prođe kroz tačku  $C[-1, j0]$ .

Ako ovaj uslov nije ispunjen sistem regulisanja nije stabilan. On tada može biti granično stabilan ili nestabilan.

Broj polova prenosne funkcije otvorenog kola sa pozitivnim realnim delom jednak je nuli, što se obeležava sa  $P=0$ , otvoreno kolo je stabilno.

Sada se može zaključiti da je jedino sistem regulisanja, sa frekventnim karakteristikama otvorenog kola  $F_{ok}(j\omega)$  stabilan, jer ista ne obuhvata i ne prolazi kroz tačku  $C[-1, j0]$ .

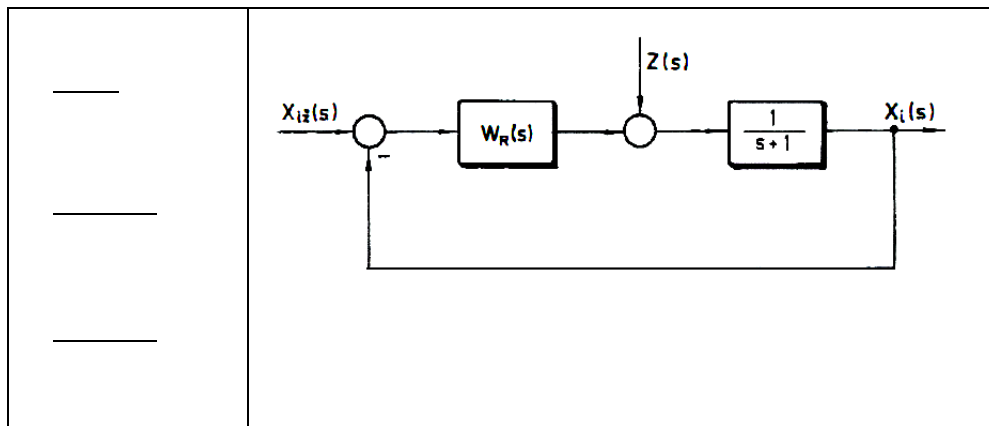
### Opšti Najkvistov kriterijum

#### Teorema

Ako prenosna funkcija otvorenog kola  $W_{ok}(s)$  sistema regulisanja ima  $P$  polova sa pozitivnim realnim delom, onda, da bi taj sistem regulisanja bio stabilan, potrebno je i dovoljno da pri promeni učestanosti  $\omega \in [+\infty, -\infty]$  hodograf frekventne karakteristike  $F_{ok}(j\omega)$  otvorenog kola tog sistema regulisanja tačno  $P$  puta obuhvati kritičnu tačku  $C[-1, j0]$  u negativnom matematičkom smeru i da ni jedanput ne prođe kroz nju.

#### Zadatak 3.7.

Ispitati stabilnost sistema regulisanja, prikazanog na sl.3.1, ako je objekat prvog reda proporcionalnog ponašanja regulisan sledećim regulatorima[25]:



Slika 3.1

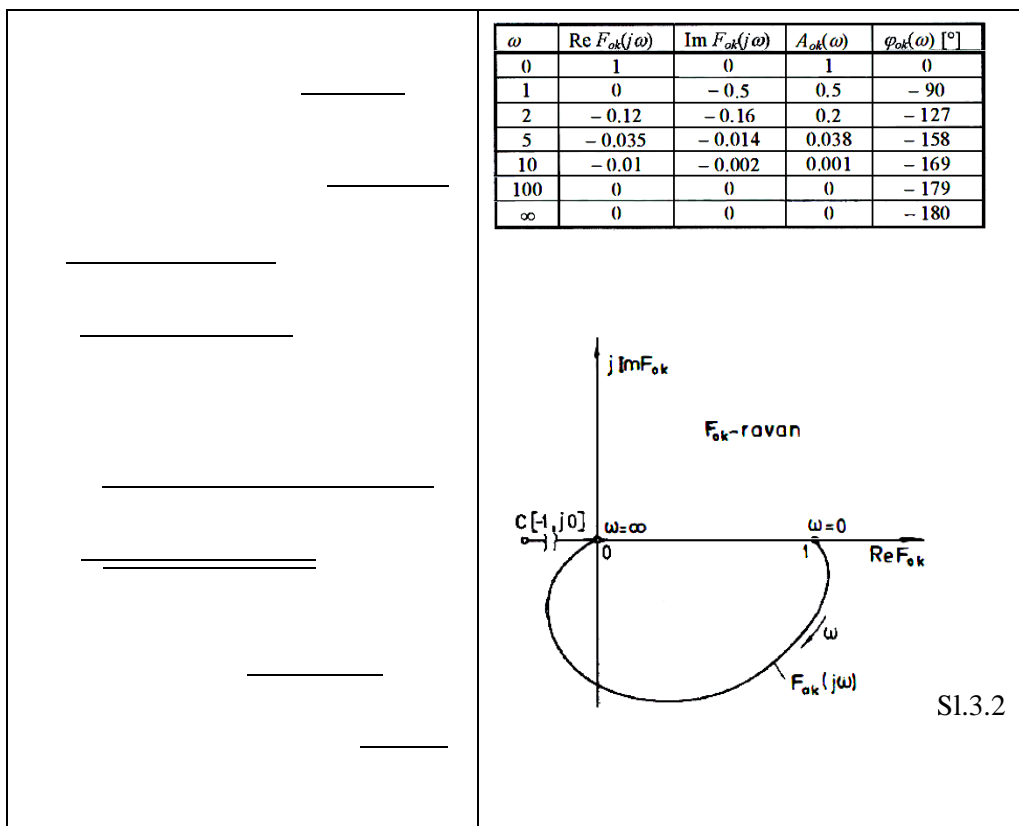
Koristiti Najkvistov kriterijum stabilnosti.

#### Rešenje:

U svim ovim slučajevima, lako se zaključuje da su sva otvorena kola datih sistema regulisanja stabilna. Ovo proističe iz činjenice da su i objekat i regulator pojedinačno stabilni, a da su redno spregnuti. Znači, u svim ovim slučajevima treba primeniti poseban Najkvistov kriterijum.

Pri primeni Najkvistovog kriterijuma sve ulazne veličine isključene su iz razmatranja [25]

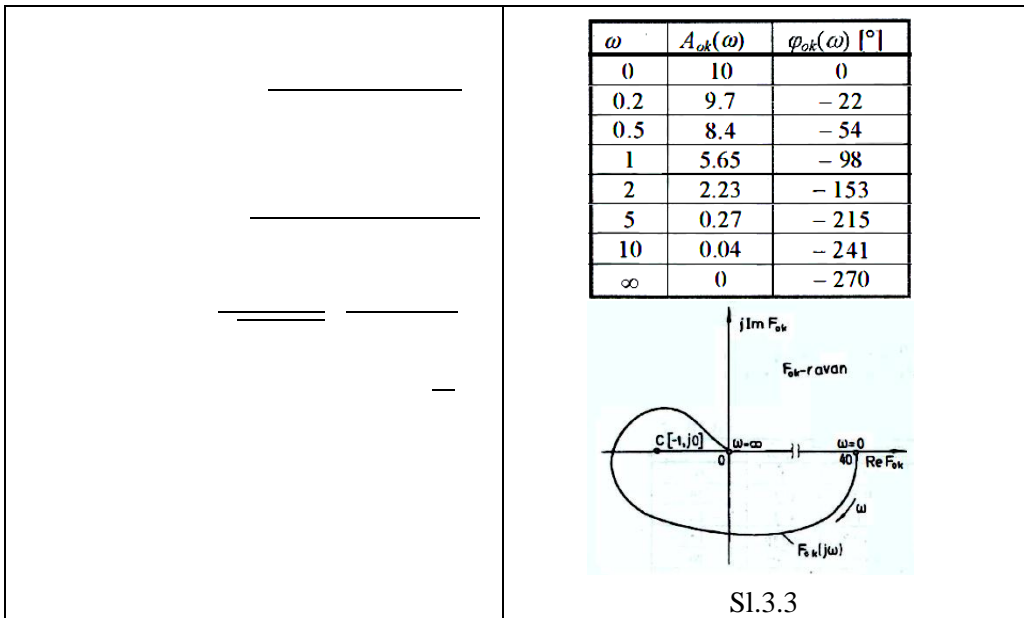
a)



Na sl. 3.2 prikazan je deo hodografa frekventne karakteristike otvorenog kola, , za promenu učestanosti .

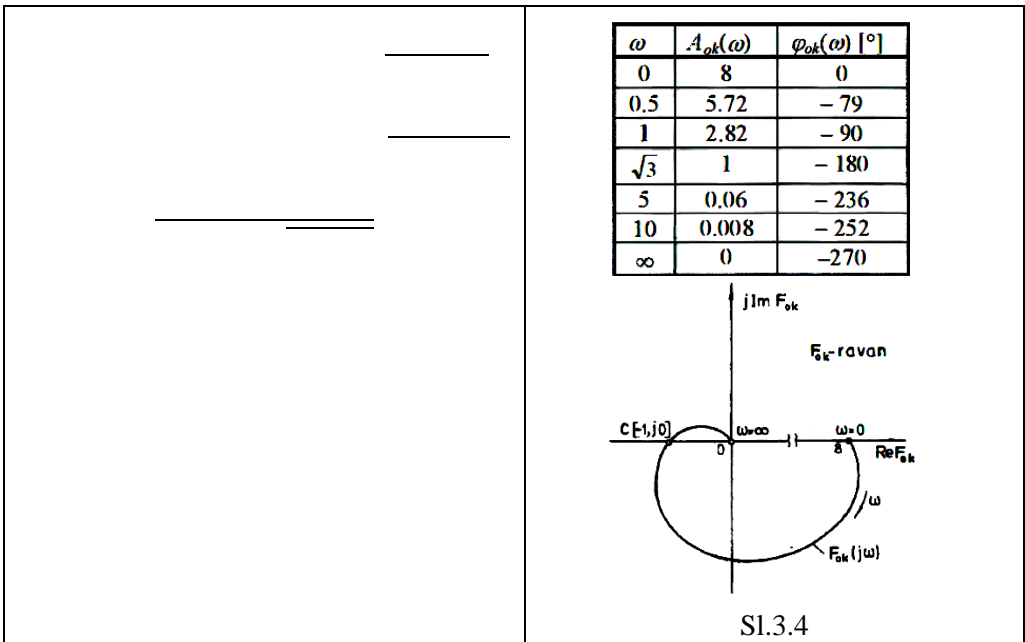
Kako hodograf niti obuhvata niti prolazi kroz kritičnu tačku , odgovarajući sistem regulisanja je stabilan.

b)



U ovakvim prilikama, kada je dato u vidu proizvoda tipičnih prenosnih organa, lakše je izraziti na način kako je to ovde dato. U priloženoj tablici dat je odgovarajući proračun, a na sl.3.3 deo hodografa za pramenu učestanosti . Kako hodograf obuhvata kritičnu tačku , odgovarajući sistem regulisanja je nestabilan [25].

c)

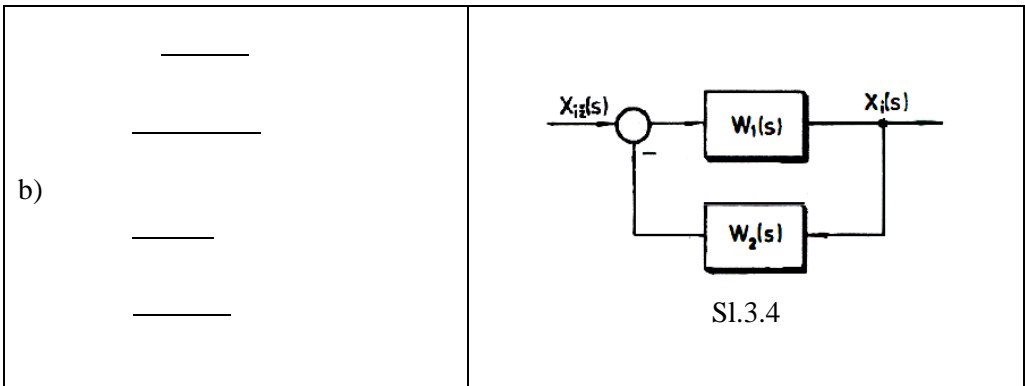


Deo hodografa \_\_\_\_\_ za promenu učestanosti \_\_\_\_\_ prolazikroz kritičnu tačku \_\_\_\_\_, pa je odgovarajući sistem regulisanja na granici stabilnosti.

*Komentar.* Slučajevi izneti pod b) i c) jasno ukazuju da se zatvaranjem sprege mogu dobiti sistemi regulisanja *koji nisu stabilni*, iako su im otvorena kola bila stabilna

**Zadatak 3.8.**

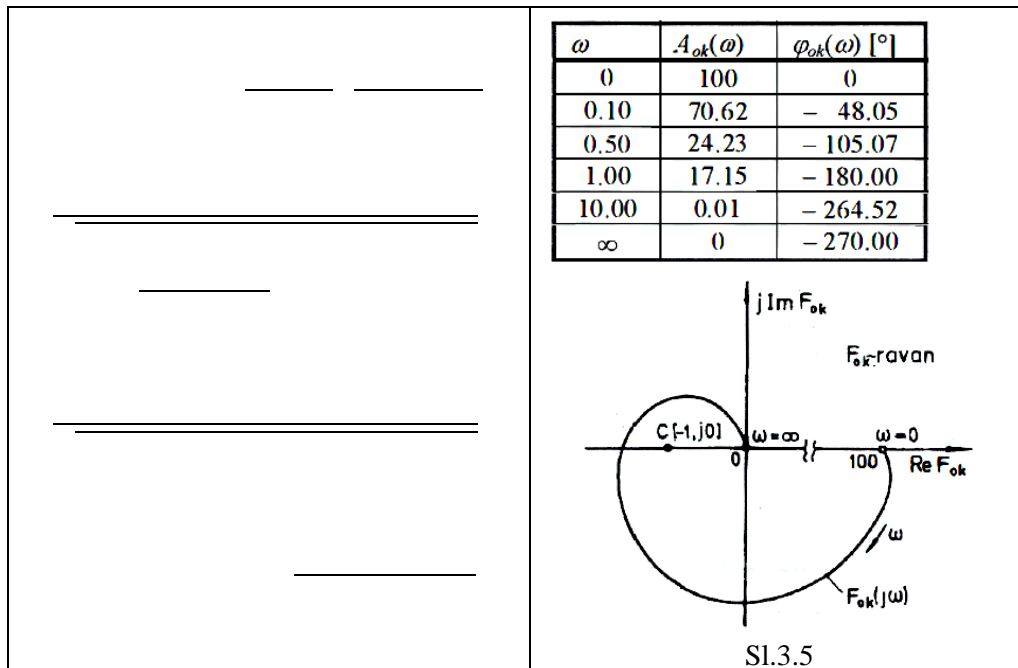
Ispitati stabilnost datih zatvorenih sistema automatskog upravljanja, poznate strukture u kojima su:



Koristiti Najkvistov kriterijum stabilnosti [25].

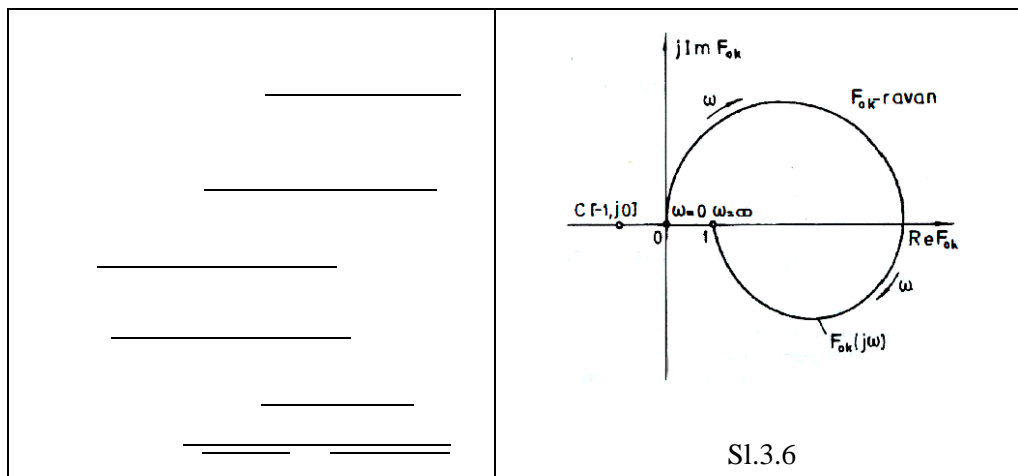
**Rešenje:**

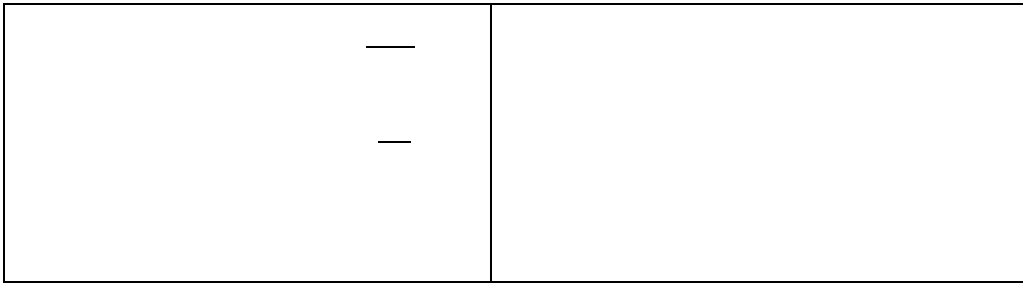
a) Sa slike lako se uočava da je:



Deo hodografa prikazan je na sl. 3.5 , a na bazi proračuna iznetog u datoj tablici, Otvoreno kolo je stabilno. Deo hodografa obuhvata kritičnu tačku, pa je odgovarajući zatvoreni SAU nestabilan.

b)





Na sl. 3.6. prikazan je deo hodografa frekventne karakteristike otvorenog kola za promenu učestanosti . Kako Najkvistova kriva ne obuhvata niti prolazi kroz kritičnu tačku , zatvoreni SAU je stabilan.

### MATLAB NAREDBE

Neka je prenosna funkcija otvorene petlje zadata u obliku razlomka:

—————

Matlab naredbe za proračun i crtanje Nyquistovog dijagrama:

```
>> nyquist (num,den)      % crta Najkvistov dijagram
>> nyquist (num,den,w)  % crta Najkvistov dijagram za frekvencije zadate
                        % vektorom w (frekvencijski vektor najčešće
                        % prethodno
                        % zadajemo rednom matricom s jednako
                        % razmaknutim
                        % frekvencijama
>> [Re,Im,w] = nyquist (num,den)  % računa realni (Re) i imaginarni
(Im) deo
                                % kompleksne prenosne funkcije i
                                % vektor
                                % frekvencije (npr. ako nije zadat)
```

### Zadatak 3.9

Za sistem s negativnom jediničnom povratnom vezom zadata je prenosna funkcija otvorene petlje:

—————

Nacrtati polarni i Najkvistov dijagram i zaključiti o stabilnosti sistema. Odrediti prenosnu funkciju zatvorene petlje (  $G(s) = \frac{5}{s^2 + 0.2s + 1}$  ) i naći vremenski odziv sistema na jediničnu pobudu[43].

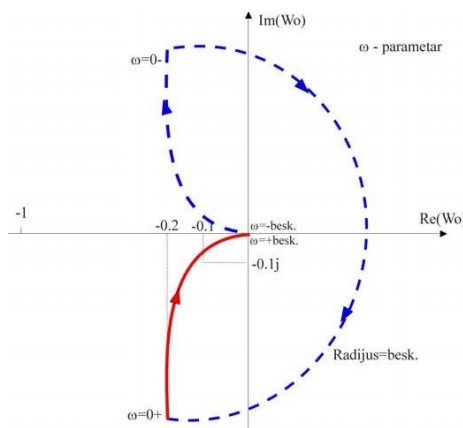
**Rešenje:**



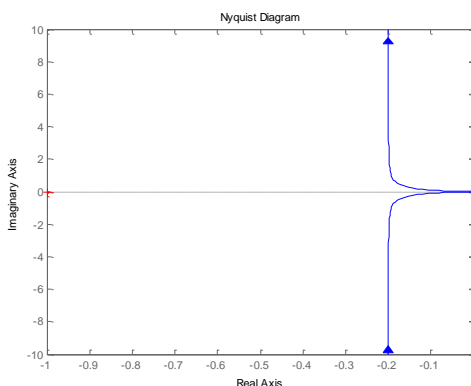
Polarni dijagram se crta za  $0 \leq \omega \leq +\infty$ . Zato uvek treba uzeti  $\omega = 0$  i  $\omega = \infty$ , zatim one  $\omega$  za koje je  $\text{Re} = 0$  i  $\text{Im} = 0$ , i još poneku tačku između.

$\omega$	0	1	5	$\infty$
$\text{Re}(W_0)$	-0.2	-0.1923	-0.1	0
$\text{Im}(W_0)$	$-\infty$	-0.9615	-0.1	0

Slika 3.7. prikazuje skicirani polarni dijagram (puna crvena linija) i dopunu do Najkvistovog dijagrama (isprekidana plava linija).



Sl.3.7 [43]



Sl.3.8 [43]

```
>> num_Wo=[5];
>> den_Wo=[1 5 0];
>> nyquist(num_Wo,den_Wo) % crta Najkvistov dijagram, prikazan
                           % na slici 3.8. Naravno,
```



```

% na grafu nije moguće prikazati polukrug
% beskonačnog radijusa koji spaja
% tačke frekvencija  $-\infty$  i  $+\infty$ 

>> [Re, Im]=nyquist(num_Wo, den_Wo, 1) % računa realni i imaginarni deo za
w=1
Re =
    -0.1923
Im =
    -0.9615

>> [Re, Im]=nyquist(num_Wo, den_Wo, 5) % računa realni i imaginarni deo za
w=5
Re =
    -0.1000
Im =
    -0.1000

>> [Re, Im]=nyquist(num_Wo, den_Wo, inf) % za w=beskonačno
Re =
     0
Im =
     0

>> [Re, Im]=nyquist(num_Wo, den_Wo, 0) % za w=0; dolazi do pojave
singularnosti
% i netačnog proračuna

Re =
Inf
Im =
     0

>> [Re, Im]=nyquist(num_Wo, den_Wo, 0.0001) % zato ćemo umesto w=0 uzeti
% vrednost blisku 0 (tj.
0.0001):

Re =
    -0.2000
Im =
    -1.0000e+004 % Im teži u  $-\infty$ 

```

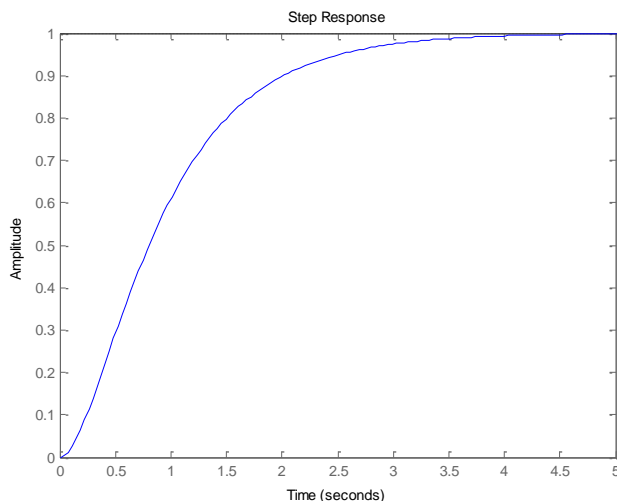
Budući da Najkvistov dijagram nijednom ne obilazi tačku  $-1+0j$ , a prenosna funkcija otvorene petlje nema polova u desnoj poluravnini, zaključujemo da je sistem stabilan ( $P=N=0$ ).

Pronađimo sada prenosnu funkciju sistema i vremenski odziv na jediničnu pobudu, i na osnovu odziva uverimo se o stabilnosti sistema:

Budući da je povratna veza jedinična ( $H=1$ ), važiće:

Vremenski odziv sistema odredićemo pomoću Matlaba:

```
num_Wo=[5];  
den_Wo=[1 5 5];  
step(num_Wo, den_Wo)  
% odziv sistema na step funkciju, prikazan slikom 3.9
```



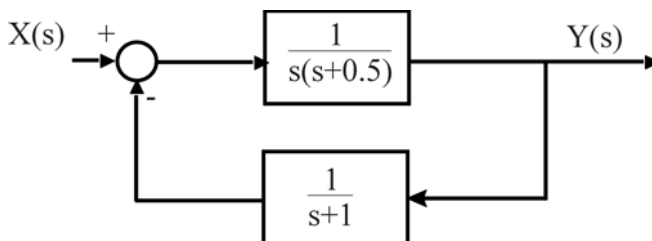
Slika 3.9

Na osnovu slike 3.9 koja prikazuje odziv sistema na step funkciju, vidimo da se radi o stabilnom sistemu jer na konačnu pobudu daje konačan odziv.

Vremenski odziv potvrđuje nam zaključak o stabilnosti do kojeg smo došli na osnovu Najkvistovog dijagrama

**Zadatak 3.10**

Zadat je sistem na donjoj slici. Nacrtati polarni i Najkvistov dijagram i zaključiti o stabilnosti sistema. Odrediti prenosnu funkciju zatvorene petlje (  $T(s) =$  ) i naći vremenski odziv sistema na jediničnu pobudu [43].



**Rešenje:**

\_\_\_\_\_

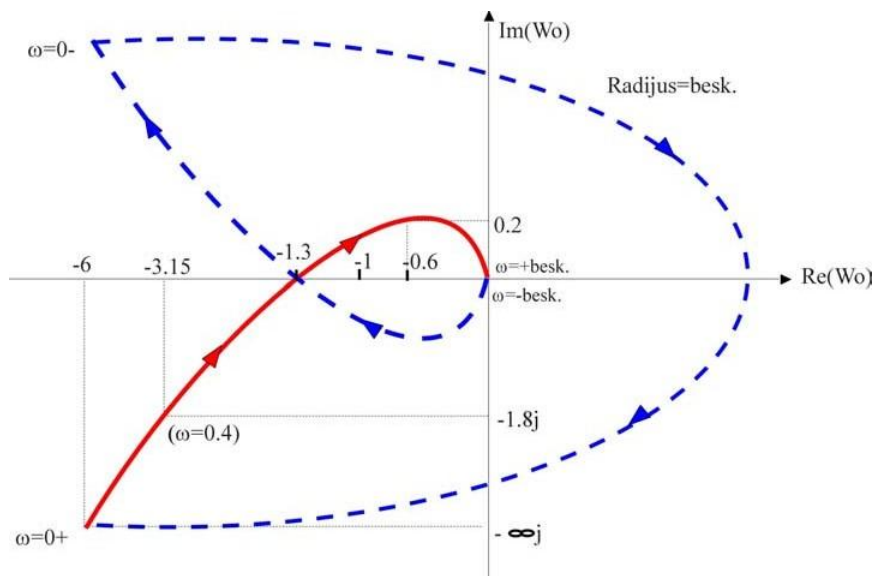
\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

	0	0.4	—	1	
Re	-6	-3.15	-1.33	-0.6	0
Im	-	-1.78	0	0.2	0

Sl. 3.10 prikazuje polarni dijagram i dopunu do Najkvistovog dijagrama.



Sl.3.10 [43]

Postupak u Matlabu:

```

>> num_G=[1]; den_G=[1 0.5 0];
>> num_H=[1]; den_H=[1 1];
>> num_Wo=conv(num_G,num_H);           % računanje pr. f-je otvorene
petlje
>> den_Wo=conv(den_G,den_H);
>> nyquist(num_Wo, den_Wo,[0.3:0.001:10]) % crta dijagram,prikazan na slici 3.11
                                           % za frekv. opseg od 0.3 do
                                           10rad/s

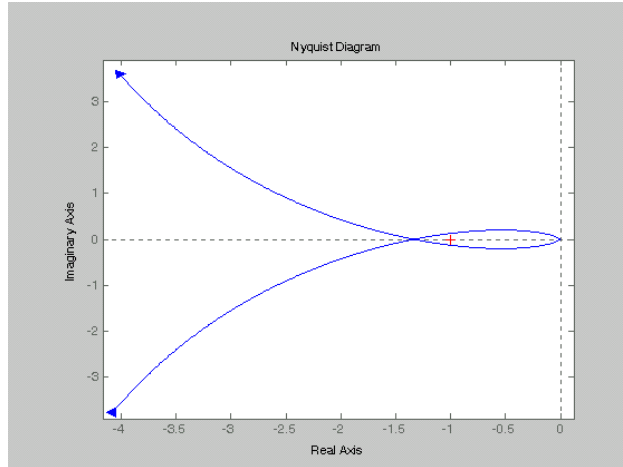
>> [Re, Im]=nyquist(num_Wo, den_Wo, 0.0001) % računa realni i imaginarni
                                           % deo za w≈0

Re =
-6.0000
Im =
-2.0000e+004
>> [Re, Im]=nyquist(num_Wo, den_Wo, sqrt(0.5)) % za w= √
Re =
-1.3333
Im =
1.3956e-016
>> [Re, Im]=nyquist(num_Wo, den_Wo, inf)      % za w= ∞
Re =

```

$\begin{matrix} 0 \\ \text{Im} = \\ 0 \end{matrix}$
---

Slika 3.11. Prikazuje Najkvistov dijagram prenosne funkcije otvorene petlje:



Sl.3.11 [43]

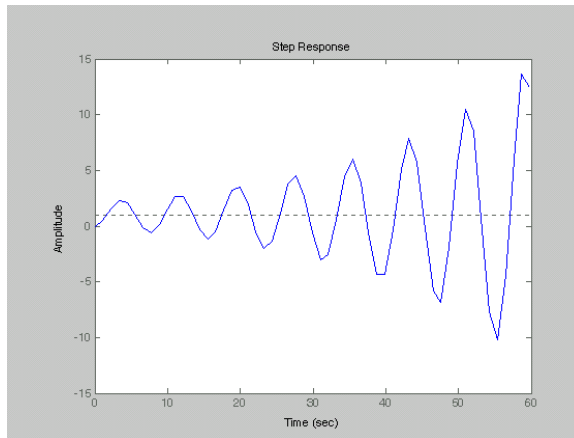
Prema slici 3.10, Najkvistov dijagram dva puta obilazi tačku  $-1+0j$ , u smeru kazaljke na satu, tj.  $N=2$ . Prenosna funkcija otvorene petlje nema polova u desnoj poluravni,  $P=0$ . Budući da je  $P \neq -N$ , sistem je nestabilan.

Pronađimo prenosnu funkciju sistema i vremenski odziv na jediničnu pobudu:

\_\_\_\_\_

Vremenski odziv sistema nacrtan pomoću Matlaba:

```
>> [num_W,den_W]=feedback(num_G, den_G, num_H, den_H)
num_W =
    0    0    1    1 den_W =
    1.0000    1.5000    0.5000    1.0000
>> step(num_W, den_W) % odziv sistema na step funkciju, prikazan slikom
3.12
```



Sl.3.12 [43]

Iz odziva sistema na step funkciju (sl.3.12) vidimo da se radi o nestabilnom sistemu (beskonačan odziv na konačnu pobudu), što odgovara zaključku na osnovu Najkvistovog dijagrama.

### Amplitudna i fazni pretek kao mere relativne stabilnosti

Većina sistema u praksi ne sadrži nestabilne polove u prenosnoj funkciji otvorene petlje (tj. polove koji se nalaze u desnoj poluravni). Zato, da bi sistem bio stabilan, Najkvistov dijagram prenosne funkcije otvorene petlje ne sme da obilazi tačku  $-1$ .

Da bismo to utvrdili, nije ni potrebno nacrtati kompletan Najkvistov dijagram. Dovoljno je nacrtati polarni dijagram za koji raste od  $0$  do  $+\infty$ . U slučaju stabilnog sistema, tačka  $-1$  ležaće s leve strane polarnog dijagrama ako se duž dijagrama krećemo u smeru rastućeg  $\omega$ .

Ako kriva polarnog dijagrama prolazi kroz tačku  $-1$ , sistem je na granici stabilnosti. Da bismo imali zadovoljavajuću relativnu stabilnost, nameće se potreba da kriva ne prolazi isuviše blizu tačke  $-1$ .

Amplitudni (AP) i fazni (FP) pretek uobičajene su mere za specifikaciju udaljenosti krive od tačke  $-1$  tj. mere relativne stabilnosti sistema.

AP i FP mogu se određivati na više različitih načina (analitičkom metodom, na temelju polarnog ili Bodeovog dijagrama) [43].

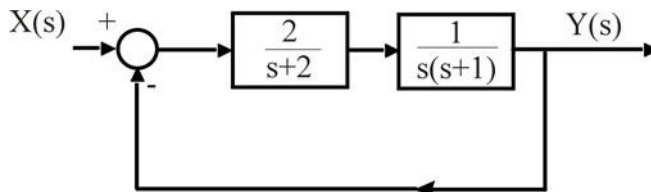
### Zadatak 3.11.

Sistem je zadat blok dijagramom. Odrediti AP i FP:

- a) na osnovu polarnog dijagrama

b) analitički

Zaključiti o stabilnosti sistema [43].



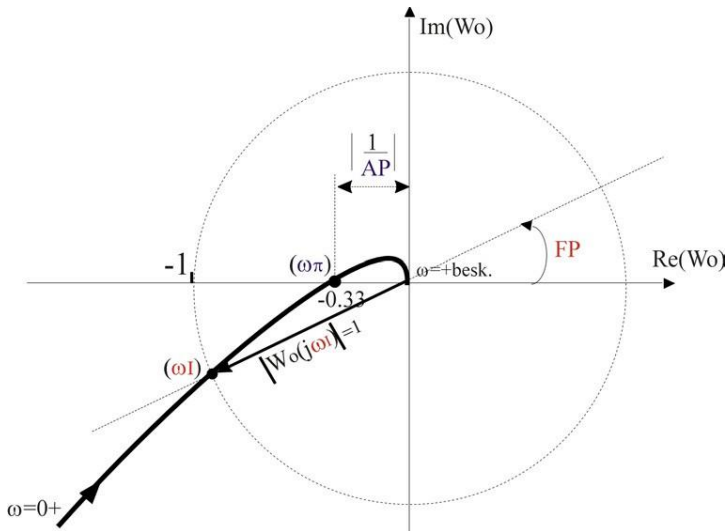
**Rešenje:**

Prvo ćemo formirati prenosnu funkciju otvorene petlje:

$$G(s) = \frac{2}{s+2} \cdot \frac{1}{s(s+1)}$$

$\omega$	0	0.5	1	$\infty$	2	$\infty$
Re	-1.5	-1.13	-0.6	-0.33	-0.15	0
Im	$-\infty$	-1.32	-0.2	0	0.05	0

Slika 3.13 prikazuje polarni dijagram. Na temelju dijagrama odmah možemo zaključiti da se radi o stabilnom sistemu jer prenosna funkcija otvorene petlje ne sadrži nestabilne polove, a tačka  $-1$  leži s leve strane polarnog dijagrama (tj. Najkvistov dijagram je neće obilaziti).



Sl.3.13 [43]

a) određivanje AP i FP na osnovu polarnog dijagrama:

- Amplitudni pretek određuje se kao recipročna vrednost udaljenosti između ishodišta i tačke u kojoj polarni dijagram seče realnu osu. Na slici 3.13. možemo očitati:

$$\text{---} = 0.33 \rightarrow \text{AP} = \text{---}$$

AP obično se definiše u decibelima, tj. biće:

$$\text{AP [dB]} = 20 \log(3) = 9.54 \text{ dB}$$

- Fazni pretek određuje se kao ugao koji s pozitivnim delom realne ose zatvara pravac koji prolazi kroz ishodište i tačku preseka polarnog dijagrama i kružnice radijusa 1. S grafika na slici 3.13. približno možemo očitati vrednost faznog preteka:

$$\text{FP} \approx 30^\circ \text{ (preciznu vrednost odredićemo analitičkim putem) [43]}$$

b) određivanje AP i FP analitičkim putem:

Prvo ćemo definisati sledeća dva pojma:

- Frekvencija kritične amplitude ( ): definiše se kao frekvencija pri kojoj modul prenosne funkcije otvorene petlje ima vrednost 1 tj. pri kojoj polarni dijagram seče kružnicu radijusa 1 (videti sliku 3.13).

$$\text{Važiće: } | \quad | = 1$$



Frekvencija kritične faze ( $\omega_c$ ): definiše se kao frekvencija pri kojoj imaginarni deo prenosne funkcije otvorene petlje ima vrednost 0 tj. pri kojoj polarni dijagram seče realnu osu (videti sliku 3.13) [43].

Važiće:  $\text{Im}[W_o(j\omega_c)] = 0$

AP i FP definišu se na sledeći način:

Amplitudni pretek definiše se kao recipročna vrednost realnog dela prenosne funkcije otvorene petlje pri frekvenciji kritične faze (videti sliku 3.13):

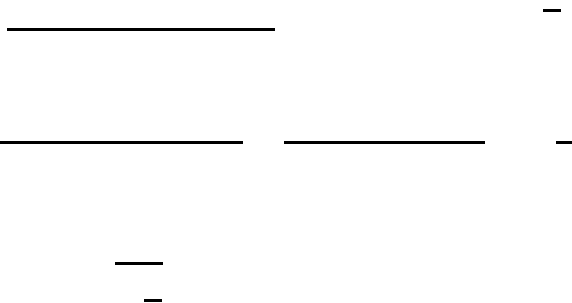
\_\_\_\_\_

Fazni pretek definiše se kao zbir ugla  $180^\circ$  i argumenta prenosne funkcije otvorene petlje pri frekvenciji kritične faze (videti sliku 3.13):

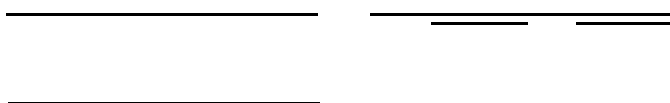
$$\text{FP}[\omega_c] = 180^\circ + \text{argument}[W_o(j\omega_c)]$$

Odredimo  $\omega_c$  i AP na osnovu navedenih relacija:

$$\text{Im}[W_o(j\omega_c)] = 0 \Rightarrow$$



Odredimo još  $\text{AP}$  i FP:



Dobili smo jednačinu 6-tog stepena čije ćemo korene odrediti pomoću Matlab [43]

```
>> roots([1 0 5 0 4 0 -4])
ans =
    0.0000 + 1.8872i
    0.0000 - 1.8872i
    0.0000 + 1.4142i
    0.0000 - 1.4142i
    0.7494
   -0.7494
```

Jedini realni pozitivan koren je 0.7494. Zato je  $\omega = 0.7494 \text{ rad/s}$ .

$$\begin{aligned} \text{FP}[\text{rad}] &= \omega + \arg [W_o(j\omega)] = \omega + (-\pi/2 - \arctg(\omega/1) - \arctg(\omega/2)) \\ &= \pi/2 - 0.35\text{rad} - 0.64\text{rad} = 0.5808 \text{ rad} = 33^\circ \end{aligned}$$

Možemo zaključiti sledeće:

Za stabilan sistem uvek će važiti:  $\text{AP}(\text{dB}) > 0$  i  $\text{FP}(\text{°}) > 0$ . Tačan iznos AP i FP ukazuje na relativnu stabilnost sistema tj. koliko je polarni dijagram otvorene petlje sistema udaljen od tačke  $-1$  (drugim rečima, koliko je sistem udaljen od granice stabilnosti). Porastom AP ili FP raste i relativna stabilnost sistema tj. polarni dijagram se udaljava od tačke  $-1$ .

Za nestabilne sisteme vredeće:  $\text{AP}(\text{dB}) < 0$  i  $\text{FP}(\text{°}) < 0$ .

Za računanje vrednosti  $\omega$  te AP i FP koristi se sledeća Matlabova naredba [43]:

```
>> [AP, FP, w_pi, w_I]=margin(num, den) % gde su:
                                     % br i naz: brojilac i imenilac
                                     % pr.
                                     % f-je otv. petlje
                                     % AP: amplitudni pretek,
                                     % nije prikazano u dB
                                     % w_pi: fr. kritične faze
                                     % w_I: fr. kritične amplitude
```

U našem slučaju će biti:

```
>> [AP, FP, w_pi, w_I]=margin([2],[1 3 2 0])
AP =
3.0000
```

```

FP =
32.6133 w_pi =
1.4142 w_I =
0.7494
>> AP_dB=20*log10(AP)      % pretvaranje AP u decibele
AP_dB =
9.5424

```

### Utvrđivanje stabilnosti sistema po Bodeovom kriterijumu

Stabilnost sistema sa zatvorenim povratnim vezom, opisanog prenosnom funkcijom  $W_o(s)$ , određuje se na temelju amplitudne i fazne Bodeove karakteristike nacrtane za prenosnu funkciju otvorene petlje,  $W_o(s)$ .

Određivanje AP i FP na osnovu Bodeovih dijagrama:

- Frekvencija kritične amplitude,  $\omega_1$ : frekvencija pri kojoj amplitudni Bodeov dijagram prenosne funkcije otvorene petlje seče frekvencijsku osu.

Za  $\omega_1$  će važiti:  $|W_o(j\omega_1)|=1$  (tj. 0dB) [43]

- Frekvencija kritične faze,  $\omega_2$ : frekvencija pri kojoj fazni Bodeov dijagram prenosne funkcije otvorene petlje seče pravac od  $-180^\circ$ .

Za  $\omega_2$  će važiti:  $\text{Im}(W_o(j\omega_2))=0$

- Amplitudno osiguranje, AP(dB):

Može se odrediti na osnovu Bodeovog amplitudnog dijagrama prenosne funkcije otvorene petlje. AP se određuje kao udaljenost od amplitudnog dijagrama do frekvencijske ose, pri frekvenciji kritične faze [43].

- Fazno osiguranje, FP( $^\circ$ ):

Može se odrediti na osnovu Bodeovog faznog dijagrama prenosne funkcije otvorene petlje. FP se određuje kao udaljenost od pravca  $-180^\circ$  do faznog dijagrama, pri frekvenciji kritične amplitude.

Pravilo za utvrđivanje stabilnosti sistema po Bodeovom kriteriju:

Sistem sa zatvorenom povratnom vezom opisan prenosnom funkcijom biće stabilan ako amplitudni Bodeov dijagram prenosne funkcije otvorene petlje  $W_o(s)$  seče frekvencijsku osu pre nego fazni Bodeov dijagram seče pravac  $-180^\circ$  (tj. ako je  $\phi < -180^\circ$ ). U tom slučaju AP i FP će imati pozitivne vrednosti [43].

### MATLAB NAREDBE

Za računanje vrednosti  $\phi$  te AP i FP koristi se sledeća Matlabova naredba:

```
>> [AP, FP, w_pi, w_I]=margin(num, den) % gde su:
                                     % br i naz: brojilac i imenilac
                                     % pr. f-je otv. petlje
                                     % AP: amplitudno osiguranje,
                                     % nije prikazano u dB
                                     % w_pi: frekvencija kritične
                                     % faze
                                     % w_I: frekvencija kritične
                                     % amplitude

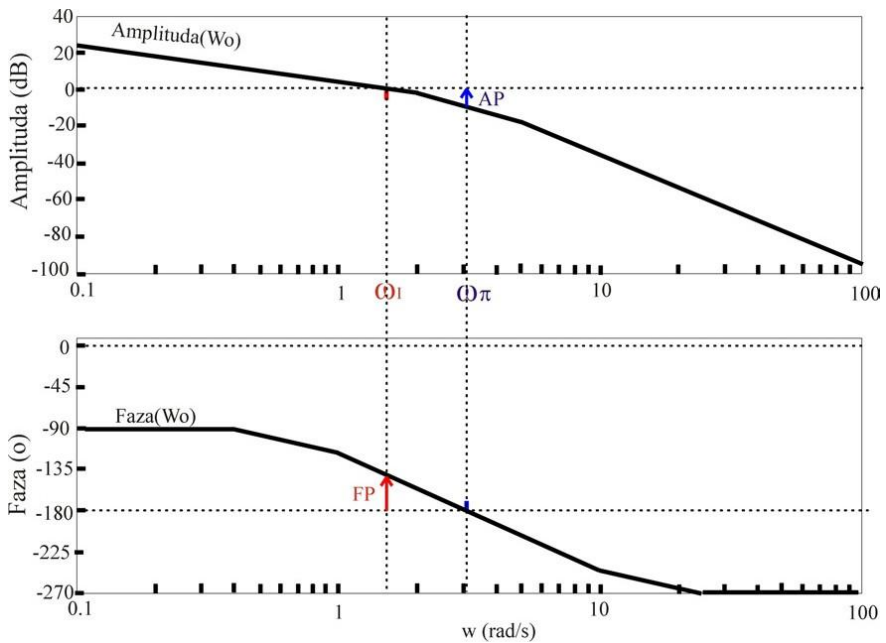
>> margin(num, den) % naredba crta Bodeove dijagrame i na grafikonu
označava AP i FP.
```

### Zadatak 3.12

Na osnovu Bodeovih dijagrama odrediti  $\phi$ , AP i FP i zaključiti da li je regulacioni sistem stabilan. Prenosna funkcija otvorene petlje je:



Slika 3.14. prikazuje amplitudni i fazni Bodeov dijagram i ucrtane  $\phi$ , AP i FP [43].



Sl.3.14 [43]

Iz grafikona možemo približno očitati željene vrednosti:

$$\approx 1.5 \text{ rad/s}$$

$$\approx 3 \text{ rad/s}$$

Amplitudno osiguranje određujemo tako da nacrtamo vektor usmeren od amplitudnog grafa do frekvencijske ose, pri  $\omega_I$ . Ako je vektor usmeren 'prema gore', AP ima pozitivan predznak.

Dakle, biće:  $AP \approx 10 \text{ dB}$

Fazno osiguranje određujemo tako što nacrtamo vektor usmeren od pravca  $-180^\circ$  do faznog grafa, pri  $\omega_\pi$ . Ako je vektor usmeren 'prema gore', FP ima pozitivan predznak. Dakle, biće:

$$FP \approx 40^\circ$$

Budući da je  $\sigma < 0$ , radi se o stabilnom sistemu. Dok smo sa slike 3.14. tek približno mogli da očitamo željene parametre, Matlab će nam precizno izračunati njihove vrednosti:

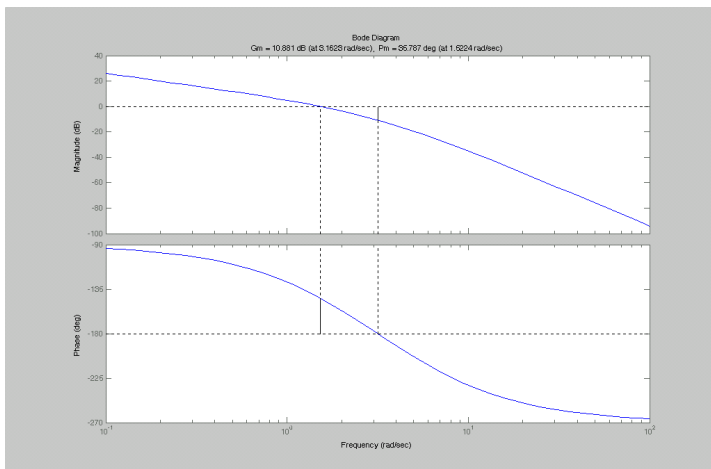
```
>> [AP, FP, w_pi, w_I]=margin([20],[1 7 10 0])
AP =
      % AP nije prikazana u decibelima
3.5000
```

```

FP =
    35.7873 w_pi =
    3.1623 w_I =
    1.5224
>>AP_dB=20*log10(AP)      % pretvaranje AP u decibele
AP_dB =
    10.8814

>> margin([20],[1 7 10 0]) % naredba za crtanje Bodeovih dijagrama i
određivanje
% AP i FP
% Rezultat je prikazan na slici 3.15. Obratiti pažnju na naslov
% slike: AP je označena s Gm, a FP s Pm

```



Sl.3.15 [43]

## **4. KRITERIJUM ZA ANALIZU I SINTEZU SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA**

U cilju poređenja različitih sistema upravljanja definisane su standardne karakteristične veličine kojima se, posredno ili neposredno, opisuju performanse sistema (kriterijumi za ocenu kvaliteta ponašanja). Sa aspekta načina prikaza modela sistema ove veličine se mogu podeliti na:

- karakteristične veličine u vremenskom domenu
- karakteristične veličine u frekvencijskom domenu
- karakteristične veličine u kompleksnom domenu

Sa druge strane, sa gledišta performansi sistema ove veličine se mogu podeliti na:

- karakteristične veličine koje definišu osobine sistema i kvalitet prenosa (filtarska svojstva) ulaznog signala u ustaljenom stanju
- karakteristične veličine koje definišu prelaznu pojavu
- karakteristične veličine koje definišu osetljivost sistema na promenu parametara
- integralne kriterijume

Analiza sistema se svodi na određivanje brojnih vrednosti skupa karakterističnih veličina. U zadacima sinteze brojne vrednosti karakterističnih veličina su zadate, pa je potrebno odrediti matematički model fizički ostvarljivog sistema koji zadovoljava postavljene zahteve. Međusobne zavisnosti pojedinih karakterističnih veličina su vrlo složene i ne mogu se iskazati analitički, sem u jednostavnim slučajevima [21].

### **4.1. Karakteristične veličine za ocenu kvaliteta prenosa ulaznog signala u ustaljenom stanju**

#### **A) Karakteristične veličine u vremenskom domenu**

##### **a) statička greška ustaljenog stanja**

gde je  $u(t)$  ulazni signal a  $y(t)$  izlaz sistema. Za sistem sa direktnom povratnom spregom (negativna jedinična povratna sprega) je:

, gde je

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

$G(s)$  je funkcija povratnog prenosa a veličina  $r$  red astatizma.

**b) konstante greške**

Konstanta položaja : implicitno definiše statičku grešku ustaljenog stanja na jedinični odskočni ulazni signal:

\_\_\_\_\_

Brzinska konstanta : posredno definiše statičku grešku ustaljenog stanja za nagibni ulazni signal:

\_\_\_\_\_

Konstanta ubrzanja : implicitno definiše statičku grešku ustaljenog stanja na parabolični ulazni signal:

**B) Karakteristične veličine u frekventnom domenu**

**a) rezonantni vrh**

Definiše maksimalno odstupanje amplitudne frekventne karakteristike funkcije spregnutog prenosa:

od frekventne karakteristike = 1 idealnog sistema koji verno reprodukuje ulazni signal. Učestanost na kojoj se dešava rezonantni vrh naziva se rezonantna učestanost. Generalno je poželjno da sistem nema



značajniji rezonantni vrh, s obzirom da veliki rezonantni vrh označava veliki preskok u normalnom odskočnom odzivu sistema.

### **b) propusni opseg sistema**

Učestanost  $\omega$  za koju amplitudna frekvencijska karakteristika spregnutog prenosa ima vrednost:

$$\omega = \omega_0$$

$$\omega = \omega_0$$

Sistem relativno verno prenosi harmonike ulaznog signala u opsegu  $\omega_0 \pm \Delta\omega$ , dok slabi signale poremećaja čiji je frekvencijski sadržaj van propusnog opsega. Brzina reagovanja sistema direktno je srazmerna veličini propusnog opsega.

### **c) selektivnost**

Selektivnost se meri kao veličina nagiba amplitudske frekvencijske karakteristike  $M(\omega)$  u tački  $\omega_0$  i izražava se u [dB/dekadi]. Ova veličina predstavlja meru sposobnosti sistema da eliminiše poremećaj čiji je frekvencijski sadržaj (spektar) skoncentrisan van propusnog opsega.

## **4.2. Karakteristične veličine za ocenu prelazne pojave i relativne stabilnosti sistema**

### **Karakteristične veličine u vremenskom domenu**

Dinamička svojstva sistema se ocenjuju na osnovu karakterističnih veličina koje karakterišu odskočni odziv sistema  $x(t)$ , uz nulte početne uslove.

### **preskok $\Delta x$ i vreme preskoka $t_p$**

Razlika prvog maksimuma u normalnom odskočnom odzivu  $x(t)$  (odziv na ulazni signal  $u(t)$  kada su svi početni uslovi nula) i veličine odziva u stacionarnom stanju naziva se preskokom i obeležava sa  $\Delta x$ :

vreme kašnjenja  $t_d$

Vreme kašnjenja je vreme za koje normalni odskočni odziv dostigne jednu polovinu stacionarne vrednosti:

Za idealni sistem, čija je amplitudska frekvencijska karakteristika konstantna u propusnom opsegu a nula van datog intervala (0,  $\infty$ ), vreme kašnjenja je  $\tau$ , gde je  $\tau$  grupno kašnjenje a  $\omega$  propusni opseg [21].

### **vreme uspona**

Vreme uspona je vreme za koje normalni odskočni odziv poraste od 10% na 90% svoje stacionarne vrednost:

Za idealan sistem važi  $\tau_r = \tau$  (je učestanost propusnog opsega), dok za većinu realnih sistema za koje je preskok  $<10\%$  važi empirijska formula  $\tau_r = \tau \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}$  gde je  $\tau$  vreme uspona.

### **vreme smirenja**

Kao vreme smirenja se definiše ono vreme koje je potrebno da amplituda oscilacija u normalnom odskočnom odzivu opadne na vrednost manju od 2% (ili 5%) od vrednosti odziva u stacionarnom stanju:

### **perioda oscilacija**

Perioda oscilacija se definiše kao vreme između dva sukcesivna maksimuma u normalnom odskočnom odzivu sistema.

### **dominantna vremenska konstanta**

Dominantna vremenska konstanta je vremenska konstanta eksponencijalne funkcije koja predstavlja anvelopu normalnog odskočnog odziva

$\tau_d$  predstavlja vreme potrebno da anvelopa normalnog odskočnog odziva opadne na 37% ( $1/e$ ) svoje početne vrednosti za  $t = 0$ , tj

Veza sa vremenom smirenja je sledeća

## B) Karakteristične veličine u frekventnom domenu

### pretek faze

Pretek faze definiše pretek (rezervu) stabilnosti i dat je izrazom:

gde je  $\sigma$  presečna učestanost pojačanja, određena iz uslova (sa  $G(s)$  je označena funkcija povratnog prenosa sistema ).

Ukoliko je sistem u otvorenoj sprezi stabilan i pri tome minimalne faze ( sve nule funkcije prenosa se nalaze u levoj poluravni s - ravni ) između preteka faze i stabilnosti sistema u zatvorenoj sprezi postoji uska veza. Naime, stabilnost sistema u zatvorenoj sprezi je zadovoljena ukoliko je pretek faze veći od nule, pretek faze koji je jednak nuli označava graničnu stabilnost sistema u zatvorenoj sprezi, dok negativan pretek faze karakteriše nestabilne sistema u zatvorenoj sprezi. Ukoliko je sistem u otvorenoj sprezi nestabilan ili neminimalne faze, tada se pretek faze ne može koristiti kao indikator stabilnosti sistema u zatvorenoj sprezi ( u takvoj situaciji je neophodno koristiti neki od kriterijuma stabilnosti, recimo Nyquistov) [21].

### pretek pojačanja d

Pretek pojačanja se koristi kao alternativna mera preteka stabilnosti i definiše se izrazom:

---

gde je  $\sigma$  presečna učestanost faze definisana relacijom  $\arg\{G(s)\} = -\sigma$  (  $G(s)$  je funkcija povratnog prenosa ). Ukoliko je sistem u otvorenoj sprezi minimalne faze i stabilan, pretek pojačanja veći od jedan ukazuje na stabilan sistem u zatvorenoj sprezi, pretek pojačanja jednak jedinici ukazuje na granično stabilan sistem u zatvorenoj sprezi, dok vrednost preteka pojačanja manja od jedan se odnosi na nestabilan sistem u zatvorenoj sprezi. Pretek pojačanja nije merilo stabilnosti sistema u zatvorenoj sprezi ukoliko sistem u otvorenoj sprezi nije bio stabilan i minimalne faze [21].

## A) Karakteristične veličine u kompleksnom domenu

Karakteristične veličine sistema u kompleksnom domenu su zapravo veličine koje karakterišu položaj dominantnih polova sistema u kompleksnoj s - ravni. Pod dominantnim polovima se podrazumeva par konjugovano kompleksnih polova ili realan pol koji dominantno utiče na ponašanje sistema. Shodno tome, najčešće korišćena definicija je ona kojom se za dominantne polove smatra par konjugovano kompleksnih ili realni pol najbliži imaginarnoj osi. Tada se položaj dominantnih polova . karakteriše sledećim veličinama: **faktor relativnog prigušenja** se definiše preko

ugla koji zaklapa poteg od koordinatnog početka do dominantnog pola sa negativnim delom realne ose ( ). Za stabilne polove faktor ima pozitivne vrednosti, za realne stabilne polove vrednost ovog faktora je veća od jedan, dok se za par konjugovano kompleksnih polova ova vrednost kreće u opsegu (0,1). **Neprigušena prirodna učestanost para dominantnih konjugovano kompleksnih polova** se definiše kao odstojanja ovih polova od koordinatnog početka. Dominantna vremenska konstanta sistema  $T_d$  se definiše kao gde je realni deo dominantnog pola. Bilo koje dve od ove tri veličine na jednoznačan način određuju položaj dominantnih polova sistema. Ukoliko je u pitanju realan pol tada je:

;

dok se u slučaju para dominantnih konjugovano kompleksnih polova može pisati:

$$\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

#### Zadatak 4.1

Funkcija spregnutog prenosa sistema sa jediničnom povratnom spregom je:

$$\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Odrediti vezu između brzinske konstante, prosečne učestanosti pojačanja, propusnog opsega i preteka faze sa karakterističnim veličinama u kompleksnom domenu [21].

#### Rešenje:

Kako dati sistem poseduje samo dva pola, njegovi dominantni polovi su određeni nulama polinoma u funkciji spregnutog prenosa. Shodno tome, karakteristične veličine u kompleksnom domenu su faktor relativnog prigušenja  $\zeta$  i neprigušena prirodna učestanost  $\omega_n$ . Funkcija spregnutog prenosa se dobija na osnovu funkcije povratnog prenosa iz relacije:

$$\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

pa se odavde lako dobija izraz za funkciju povratnog prenosa

$$\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Iz ovog izraza se za brzinsku konstantu dobija  $\tau$ . Presečna učestanost pojačanja se dobija iz definicionog izraza:

što je ekvivalentno jednačini

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} \sqrt{1 + \zeta^2}$$

Odavde se dobija

$$\tau = \tau_0 \sqrt{1 + \zeta^2}$$

Lako se pokazuje da za  $\zeta < 0,35$  važi  $\tau \approx \tau_0 (1 + \frac{1}{2}\zeta^2)$ . Dalje, na osnovu definicije preteka faze možemo pisati:

$$\tau = \frac{1}{\omega} \sqrt{1 + \zeta^2}$$

odnosno

$$\tau_0 \omega = \sqrt{1 + \zeta^2}$$

Za male vrednosti parametra  $\zeta$  ( $\zeta < 0,35$ ) zavisnost preteka faze od ovog paramtera je približno linearna. Ukoliko se ova zavisnost linearizuje u okoline tačke  $\zeta = 0$  dobija se:

Na osnovu definicije učestanosti propusnog opsega

$$\omega = \frac{1}{\tau}$$

dobija se jednačina

$$\tau_0 = \tau \sqrt{1 + \zeta^2}$$

Rešavanjem ove jednačine, koja se posle kvadriranja svodi na bikvadratnu, dobija se rešenje za popusni opseg

$$\zeta = \sqrt{\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^2 - 1}$$

**Zadatak 4.2.**

Funkcija povratnog prenosa sistema automatskog upravljanja je \_\_\_\_\_ . Odrediti pojačanje K tako da pretek faze sistema bude \_\_\_\_\_ .

Koliki je tada pretek pojačanja [21]?

**Rešenje:**

Prvo je potrebno odrediti zavisnost presečne učestanosti pojačanja od pojačanja K:

$$\frac{K}{\omega} = \dots$$

Iz izraza za pretek faze

$$\dots$$

dobija se da je

$$\dots$$

odnosno

$$\dots$$

Pretek pojačanja se računa na osnovu presečne učestanosti faze :

što je ekvivalentno jednačini

$$\dots$$

Oдавde se dobija vrednost presečne učestanosti faze \_\_\_\_\_ , na osnovu čega se dobija veličina preteka pojačanja

$$\dots$$

**Zadatak 4.3.**

Funkcija povratnog prenosa sistema sa jednačinom povratnom spregom je

$$\dots$$

Odrediti pretek faze, pretek pojačanja, propusni opseg, vremensko kašnjenje i rezonantni vrh ovog sistema [21].

**Rešenje:**

Da bismo odredili pretek faze neophodno je prethodno odrediti presečnu učestanost pojačanja. U tu svrhu potražimo izraz za amplitudsku karakteristiku funkcije povratnog prenosa

\_\_\_\_\_

Na osnovu definicije presečne učestanosti pojačanja, iz jednačine

\_\_\_\_\_

dobijamo da je

Dakle, presečna učestanost pojačanja je \_\_\_\_\_ pa se pretek faze jednostavno izračunava:

Za određivanje preteka pojačanja potrebna nam je presečna učestanost faze, koja se izračunava na osnovu argumenta funkcije povratnog prenosa:

Ova jednačina je ekvivalentna jednačini

iz koje se direktno dobija rešenje

—

Na osnovu ove vrednosti presečne učestanosti faze, za pretek pojačanja se dobija

Za određivanje propusnog opsega neophodno je naći funkciju spregnutog prenosa:

\_\_\_\_\_

Prema definiciji propusnog opsega

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{d^2x}{dt^2} + x = F \cos \omega t$$

dobija se jednačina

Uvedimo smenu  $x = y \cos \omega t$ . Tada gornja jednačina postaje

Iz dve iteracije Newton-Raphsonovim postupkom za određivanje nula nelinearnih funkcija dobija se rešenje

Vreme kašnjenja  $\tau$  se definiše kao negativni izvod faze

$$\tau = -\frac{d\phi}{d\omega}$$

gde je faza

$$\phi = \arctan \frac{\omega^2 - 1}{\omega}$$

Oдавde se za vreme kašnjenja dobija

$$\tau = \frac{1}{\omega^2 + 1}$$

Rezonantni vrh, odnosno rezonantna učestanost, je maksimalna vrednost amplitudske karakteristike sistema u zatvorenoj sprezi, odnosno učestanost za koju se taj maksimum dosiže

$$\omega_{res} = 1$$

Ova relacija je ekvivalentna jednačini

Fizički ostvarljivo rešenje koje odgovara rezonantnoj učestanosti je

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \omega t$$

Visina rezonantnog vrha je

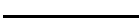


## Geometrijsko mesto korena

Metoda se zasniva na uspostavljanju odnosa između polova i nula funkcija povratnog i spregnutog prenosa sistema sa povratnom spregom. Ova metoda pruža mogućnost podešavanja polova, nula i faktora pojačanja funkcije povratnog prenosa, tako da polovi i nule funkcije spregnutog prenosa dobiju željene vrednosti, odnosno da sistem pri zatvorenoj povratnoj sprezi dobije željene dinamičke karakteristike. Uočena je direktna zavisnost karaktera odziva, tačnosti rada sistema u stacionarnom stanju, stabilnosti sistema i sl. od položaja polova sistema u kompleksnoj  $s$ -ravni. Sa druge strane, položaj polova u kompleksnoj  $s$ -ravni zavisi od parametara sistema, koji mogu biti promenljivi ili konstantni. Iz dosad pomenutog se može zaključiti da je veoma korisno poznavati zavisnost položaja polova u kompleksnoj  $s$ -ravni od vrednosti parametara sistema jer se na taj način može uspostaviti direktna veza između vrednosti parametara i određenih karakteristika sistema (na primer: veza između pojačanja  $K$  funkcije povratnog prenosa i stabilnosti ili preskoka u oscilatornom odskočnom odzivu SAU).

Za potpunu ocenu ponašanja sistema u vremenskom domenu potrebno je poznavanje polova i nula funkcije spregnutog prenosa sistema. Pri tome uvek imamo u vidu stabilan sistem, jer nema smisla procenjivati ponašanje nestabilnog sistema. U realnom sistemu, usled promene parametara, menjaju se koreni karakteristične jednačine, a samim tim i osobine sistema. S druge strane, pri projektovanju se uvek nastoji da se izaberu neki parametri čijom se varijacijom (podešavanjem) vrši optimalizacija ponašanja sistema. I u fizički realizovanom sistemu takvi elementi za podešavanje skoro uvek postoje. Ti promenljivi ili podešljivi parametri izazivaju migraciju korena karakteristične jednačine sistema. Skokovita izmena parametara uzrokuje skokovite promene, dok kontinualna - do kontinualne promene korena karakteristične jednačine [44].

### Zadatak 4.4:

Funkcija povratnog prenos sistema je  Skicirati GMK sistema [44].

### Rešenje:

1. Broj grana GMK je jednak redu sistema,  $n=3$ .
2. Polovi sistema su:  $p_1=0$ ;  $p_2=-2$ ;  $p_3=-3$ .
3. Konačnih nula nema,  $m=0$ .
4. GMK je simetrično u odnosu na Re-osu.
5. Asimptote GMK.

Tačka preseka asimptota: \_\_\_\_\_ -

Uglovi asimptota:

\_\_\_\_\_,  $k=0,1,2$ . \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_ -

**6.** Ugao polaska grana iz polova.

Za pol  $p_1=0$  ugao polaska grane GMK je  $\beta(p_1)$ . Pol  $p_1$  se iz polova  $p_2=-2$  i  $p_3=-3$  vidi pod uglom  $0^\circ$ , tako da je:  $\beta(p_1) = -180^\circ - (0^\circ + 0^\circ) = -180^\circ$ .

Za pol  $p_2=-2$  ugao polaska grane GMK je  $\beta(p_2)$ . Pol  $p_2$  se iz pola  $p_1=0$  vidi pod uglom  $180^\circ$  i iz pola  $p_3=-3$  vidi pod uglom  $0^\circ$ , tako da je:  $\beta(p_2) = -180^\circ - (180^\circ + 0^\circ) = -360^\circ = 0^\circ$ .

Za pol  $p_3=-3$  ugao polaska grane GMK je  $\beta(p_3)$ . Pol  $p_3$  se iz polova  $p_2=-2$  i  $p_1=0$  vidi pod uglom  $180^\circ$ , tako da je:  $\beta(p_3) = -180^\circ - (180^\circ + 180^\circ) = -540^\circ = -180^\circ$ .

**7.** Nema konačnih nula sistema, sve grane završavaju u beskonačnosti.

**8.** Intervali preklapanja grana GMK i Re ose su  $[0,-2] \cup [-3,\infty)$ .

**9.** Tačke spajanja i razdvajanja grana GMK i Re ose.

\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_

$\sigma = -2.55$ . Tačka \_\_\_\_\_ ne pripada geometrijskom korenu sistema, tako da je tačka razdvajanja grana GMK i Re ose  $\sigma = -0.785$ .

**10.** Nema višestrukih polova i nula.

**11.** Presek grana GMK i Im ose.

Karakteristični polinom sistema je  $= s^3 + 5s^2 + 6s + K$ . Rausova šema koeficijenata je

$$\begin{array}{l|ll} R_1 s^3 & 1 & 6 \\ R_2 s^2 & 5 & K \\ R_3 s^1 & \text{---} & \\ R_4 s^0 & & k \end{array}$$

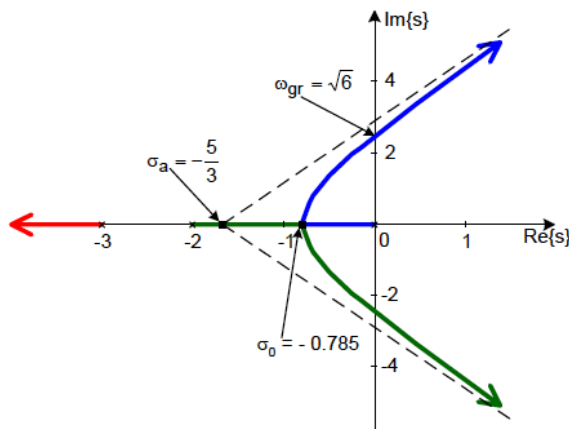
Napomena. Kada se Rausov kriterijum primenjuje u okviru metode GMK, ne množi se cela kolona nekim pozitivnim brojem!!!

Na osnovu elemenata Rausove kolone, sistem je granično stabilan kada je  $K_{gr}=0$  i  $K_{gr}=30$ .

$K_{gr}=0$  odgovara graničnom, početnom stanju, odnosno polu  $P_1=0$ , tako da se ova vrednost ne razmatra. Granično pojačanje je  $K_{gr}=30$ . Dalje je  $a_0=K_{gr}=30$ ,  $R_{n-1}=R_2=5$ , pa je

$$\frac{30}{5} = \frac{6}{k}$$

Skica GMK je:



#### Zadatak 4.5

Funkcija povratnog prenos sistema je \_\_\_\_\_ Skicirati  
GMK sistema [44].

**Rešenje:**

1. Broj grana GMK je jednak redu sistema,  $n=3$ .
2. Polovi sistema su:  $p_1 = -1$ ;  $p_{2,3} = -3 \pm j1$ .
3. Broj konačnih nula je  $m=1$ ;  $z_1 = -2$ .
4. GMK je simetrično u odnosu na Re-osu.
5. Asimptote GMK.

Tačka preseka asimptota:

Uglovi asimptota: \_\_\_\_\_ ,  $k=0,1$ .

**6. Ugao polaska grana polova**

Za pol  $p_1 = -1$  ugao polaska grane GMK je  $\beta(p_1)$ . Pol  $p_1$  se iz pola  $p_2 = -3+j1$  vidi pod uglom  $-26.56^\circ$  i iz pola  $p_3 = -3-j1$  pod uglom  $26.56^\circ$ . Pol  $p_1$  se iz nule  $z_1 = -2$  vidi pod uglom  $0^\circ$ . Sada je:  $\beta(p_1) = -180^\circ - (-26.56^\circ + 26.56^\circ) + 0^\circ = -180^\circ$ .

Za pol  $p_2 = -3+j1$  ugao polaska grane GMK je  $\beta(p_2)$ . Pol  $p_2$  se iz pola  $p_1 = -1$  vidi pod uglom  $153.44^\circ$  i iz pola  $p_3 = -3-j1$  vidi pod uglom  $90^\circ$ . Pol  $p_2$  se iz nule  $z_1 = -2$  vidi pod uglom  $135^\circ$ . Sada je:  $\beta(p_2) = -180^\circ - (153.44^\circ + 90^\circ) + 135^\circ = -288.44^\circ = 71.56^\circ$ .

Za pol  $p_3 = -3$  ugao polaska grane GMK je \_\_\_\_\_ Zbog simetrije je: \_\_\_\_\_ = -  
\_\_\_\_\_ =  $-71.56^\circ$ .

**7. Postoji jedna konačna nula sistema, u njoj se završava jedna grana GMK, dok preostale dve grane završavaju u beskonačnosti.**

Za nulu  $z_1 = -2$ , ugao ulaska grane GMK je  $\alpha(z_1)$ . Nula  $z_1$  se iz pola  $p_1 = -1$  vidi pod uglom  $180^\circ$ , iz pola  $p_2 = -3+j1$  vidi pod uglom  $-45^\circ$  i iz pola  $p_3 = -3-j1$  pod uglom  $45^\circ$ .

Sada je  $\alpha(z_1) = 180^\circ + (0^\circ - 45^\circ + 45^\circ) = 180^\circ$ .

8. Interval preklapanja grana GMK i Re ose je  $[-1, -2]$ .

9. Tačke spajanja i razdvajanja grana GMK i Re ose ne moraju da se određuju pošto na intervalu preklapanja grana GMK i Re ose postoji samo jedna grana, i ona mora ostati na Re osi.

10. Nema višestrukih polova.

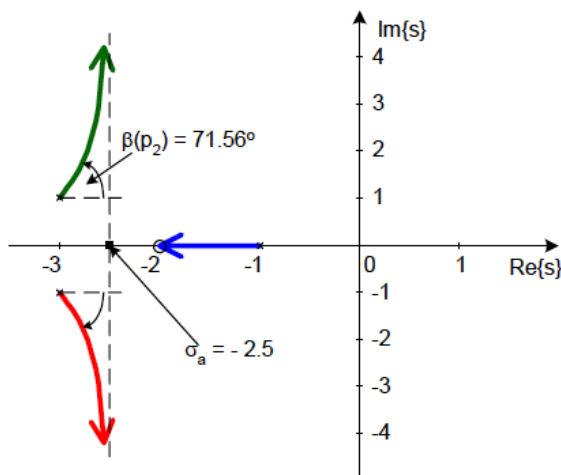
11. Presek grana GMK i Im ose.

Karakteristični polinom sistema je  $s^3 + 7s^2 + (16+K)s + 10 + 2K$ .  
Rausova šema koeficijenata je:

$R_1$	$s^3$	1	16+K
$R_2$	$s^2$	7	10+2K
$R_3$	$s^1$	—	
$R_4$	$s^0$	10+2K	

Na osnovu elemenata Rausove kolone vidi se da je  $\forall K > 0$  sistem stabilan, tako da preseka grana GMK i Re ose nema.

Skica GMK je:



### Zadatak 4.6:

Funkcija povratnog prenos sistema je \_\_\_\_\_ . Metodom GMK odrediti pojačanje K za koje je odskočni odziv sistema kritično (granično) aperiodičan [44].

#### Rešenje:

1. Broj grana GMK je jednak redu sistema,  $n=3$ .

2. Polovi sistema su:  $p_1 = 0$ ;  $p_2 = p_3 = -11$ .

3. Broj konačnih nula je  $m=1$ ;  $z_1 = -32$ .

4. GMK je simetrično u odnosu na Re-osu.

5. Asimptote GMK.

Tačka preseka asimptota: \_\_\_\_\_ .

Uglovi asimptota:  $\varphi_{0,1} = \pm 90^\circ$  .

6. Ugao polaska grana iz polova. \_\_\_\_\_  $= -180^\circ$  .

7. Ugao ulaska grana u konačne nule. \_\_\_\_\_  $= 180^\circ$  .

8. Interval preklapanja grana GMK i Re ose je  $[0, -32]$ .

9. Tačke spajanja i razdvajanja grana GMK i Re ose.

$$- + \text{---} - \text{---} = 0 \Rightarrow + 48 + 176 = 0 \Rightarrow \sigma_{01} = -4 \text{ i } \sigma_{02} = -44.$$

Tačka  $\sigma_{02} = -44$

Ne pripada geometrijskom korenu sistema, tako da je tačka razdvajanja grana GMK i Re ose  $\sigma_0 = -4$ .

10. Uglovi izlaska grana GMK iz dvostrukog pola  $p_{2,3} = -11$ .

$$= \text{---} ; k = 0, 1; r = 2. \quad = 0^\circ, \quad = 180^\circ .$$

11. Presek grana GMK i Im ose.

Karakteristični polinom sistema je  $s^3 + 22s^2 + (121+K)s + 32K$ .  
 Rausova šema koeficijenata je:

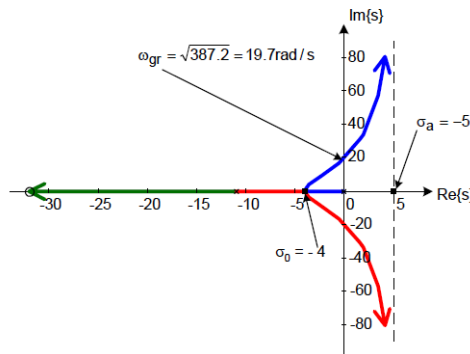
$R_1$	$s^3$	1	$121+K$
$R_2$	$s^2$	22	$32K$
$R_3$	$s^1$		
$R_4$	$s^0$	$32K$	

Na osnovu elemenata Rausove kolone, sistem je granično stabilan kada je  $K_{gr} = 0$  i  $K_{gr} = 266.2$ .

$K_{gr} = 0$  odgovara graničnom, početnom stanju, odnosno polu  $P_1 = 0$ , tako da se ova vrednost ne razmatra. Granično pojačanje je  $K_{gr} = 266.2$ . Dalje je  $a_0 = 32$ ,  $K_{gr} = 8518.4$ ,  $R_{n-1} = R_2 = 22$ , pa je

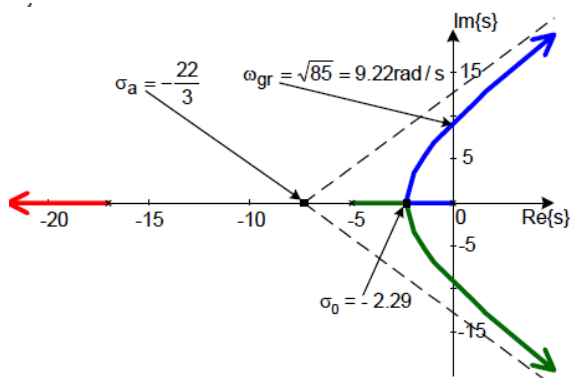
$$\frac{22}{32} = \frac{K_{gr}}{8518.4}$$

Skica GMK je:



Odskočni odziv sistema je aperiodičan ako su svi polovi realni. Oscilatoran odziv nastaje ako postoje i konjugovano kompleksni polovi. Kritično (granično) aperiodičan odziv predstavlja granicu između aperiodičnog i oscilatornog odziva i nastaje ako sistem poseduje polove koji su na granici između realnih i konjugovano kompleksnih vrednosti. Na skici GMK ta situacija odgovara tački razdvajanja (spajanja) grana GMK i Re ose. Ovde je to tačka  $\sigma_0 = -4$ . Pojačanje  $K_{\sigma_0}$  koje odgovara toj tački predstavlja traženo pojačanje za koje sistem ima kritično aperiodičan odziv. Pojačanje  $K_{\sigma_0}$  se

određuje primenom izraza za određivanje pojačanja u proizvoljnoj tački  
GMK





## **5. SINTEZA LINEARNIH SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA**

Zadatak sinteze ogleda se u izboru strukture i određivanju vrednosti podesivih parametara sistema prema postavljenim kriterijumima tako da sistem upravljanja, dobije unapred zadate (željene), karakteristike u domenu stacionarnog i prelaznog režima rada.

Kod projektovanja obično se zahteva da sistem bude dovoljno tačan i da ima što veću brzinu reagovanja, da na svom izlazu što vernije reprodukuje date ulazne veličine sa što manje oscilovanja i što manjom osetljivošću na šumove.

Kao prvi korak da se uradi sinteza sistema potrebno je postavljene tehničke zahteve izraziti u pogodnom vidu za proračun vrednosti kriterijuma kvaliteta ponašanja sistema, sa kojima se u procesu projektovanja može dalje matematički operisati. Rešenje se najčešće dobija kao kompromis između želje za zadovoljenjem postavljenih tehničkih zahteva i praktičnog interesa za što većim pojednostavljenjem računskog aspekta primene metode za analizu ili sintezu sistema.

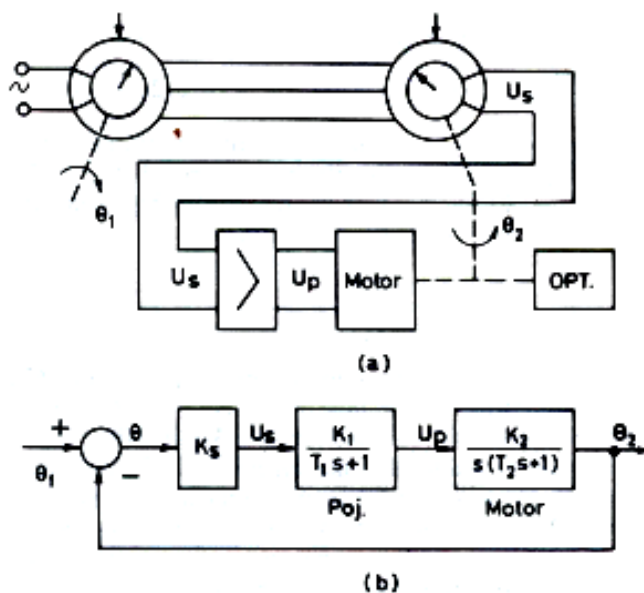
### **5.1 Sinteza kompenzatora primenom Bodeove metode**

Metoda sinteze SAU pomoću Bodeovih dijagrama (t.j. pomoću logaritamskih amplitudno-frekventnih i fazno-frekventnih karakteristika) našla je široku primenu u inženjerskoj praksi zbog svoje jednostavnosti i preglednosti. Ideja metode zasniva se na postojanju veze između prelaznog procesa i logaritamsko-frekventne karakteristike, koja se izražava na veoma jednostavan način. Naime, kad se zna željeni oblik prelaznog procesa onda se vrlo lako može nacrtati željena logaritamska karakteristika koja odgovara tom procesu. A kada se zna oblik željene logaritamske karakteristike onda se nastoji da se njenom obliku približi stvarna logaritamska karakteristika datog (nekorigovanog) sistema. U najvećem broju slučajeva stvarna (polazna) logaritamska karakteristika ne može se približiti željenoj karakteristici bez uvođenja odgovarajućih korekcionih elemenata, ili - kako se još nazivaju – uskladnika(kompenzatora).

Željena logaritamsko-frekventna karakteristika otvorenog kola (Bode-ov dijagram) crta se prema polaznim zahtevima za projektovanje sistema i prema osnovnim pokazateljima procesa. Osnovni zahtevi obično obuhvataju - traženu tačnost sistema uslovljenu potrebnim koeficijentom pojačanja, vreme smirenja prelaznog procesa, traženu rezervu stabilnosti po fazi i modulu, odnosno određeni preskok, propusni opseg i dr.

### Zadatak 5.1

Dat je selsinski pozicioni servomehanizam za prenos ugla na daljinu i njegov strukturni blok dijagram kao na slici [39].



Slika 5.1 Servomehanizam za prenos ugla na daljinu i njegov strukturni blok dijagram [39]

Kada predajna osovina ima konstantnu uglovnu poziciju, tada izlazna osovina na prijemnoj strani servomehanizma treba takođe da zauzima konstantnu uglovnu poziciju. Pri tome se zahteva da u stacionarnom režimu razlika predajnog i prijemnog ugla bude jednaka nuli. Kada se predajna osovina obrće konstantnom ugaonom brzinom od  $\omega$  ili jedan obrt u sekundi, tada u stacionarnom režimu i izlazna osovina treba da se obrće istom brzinom. Pri tome greška uglovnih položaja predajne i prijemne osovine u svakom trenutku ne sme biti veća od  $\theta_{max}$ .

Od sistema se zahteva da :

- bude dovoljno stabilan da mu pretek faze bude  $\phi_{pf} = 45^0$ ,
- brzinska konstanta sistema da bude  $K_v \geq 20 \text{ sec}^{-1}$ .

- zahteva se da sistem bude sposoban za praćenje dovoljno brzih promena ulaznog ugla, tj. potrebno je da presečna učestanost pojačanja bude  $\omega_1 \geq 1 \text{ rad/sec}$ . (Napomena: povećanjem propusnog opsega povećava i presečna učestanost pojačanja, koja je niža od i obrnuto - smanjenjem propusnog opsega snižava se i. Stoga se zahtev za određenom brzinom reagovanja može izraziti specifikacijom odgovarajuće vrednosti za presečnu učestanost pojačanja [39].

### Rešenje:

Usvojimo selsinski pozicioni servomehanizam sa slike 5.1. Koeficijent osetljivosti transformatorske veze selsina je  $K_s$ , a funkcije prenosa pojačavača i naizmeničnog dvofaznog servomotora su, respektivno,  $G_p(s) = U_p(s)/U_s(s) = \dots$  i  $G_m(s) = \dots = \dots$ , gde su  $\dots$ .

Na osnovu strukturnog blok dijagrama, datih zahteva i podataka njegova funkcija povratnog prenosa je:

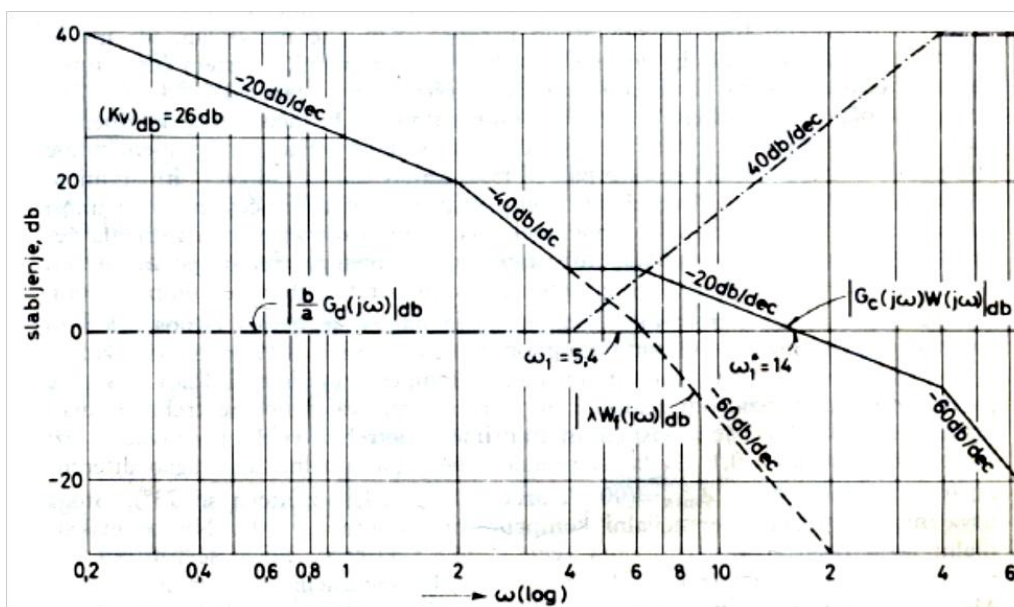
$$W_f(s) = \frac{2}{s(1+s/2)(1+s/6)}$$

Ispitajmo da li sistem sa usvojenim fiksnim komponentama ispunjava postavljene zahteve. Već prvi zahtev nije ispunjen, jer je brzinska konstanta sistema  $2 \text{ sec}^{-1}$ , a zahteva se  $K_v \geq 20 \text{ sec}^{-1}$ . Ovaj zahtev će biti ispunjen ako u sistem unesemo dodatno pojačanje  $\lambda = 10$ . tako da je sad

$$\lambda W_f(s) = \frac{20}{s(1+s/2)(1+s/6)}$$

Da bismo ispitali da li sistem, funkcije povratnog prenosa datog poslednjim izrazom ispunjava postavljene zahteve u pogledu preteka faze i presečne učestanosti pojačanja, konstruišimo logaritamski dijagram slabljenja za funkciju  $\lambda W_f(s)$ . Logaritamski dijagram slabljenja za ovu funkciju je prikazan na sl. 5.2. Vidi se da on seče log osu pod nagibom od  $-60 \text{ db/dec}$  i da je presečna učestanost pojačanja približno jednaka  $5,4 \text{ rad/sec}$ . (Ova učestanost se može proceniti i na osnovu asimptotskog log dijagrama slabljenja. Naime, ovaj dijagram omogućava da se dovoljno tačno proceni gde bi tačan log dijagram slabljenja presekao log osu.). Stoga je pretek faze neusklađenog sistema

$$\phi_{pf} = 180^\circ + \arg W_f(j5.4) = 90^\circ - \arctg(5.4)/2 - \arctg(5.4)/6 = -28^\circ$$



Sl. 5.2. Ilustracija postupka sinteze diferencijalnog kompenzatora [39]

Prema tome, drugi zahtev, da pretek faze bude  $45^\circ$ , nije ispunjen. Neusklađeni sistem, funkcije povratnog prenosa, je nestabilan, jer mu je pretek faze negativan. Da bi postavljeni zahtevi bili ispunjeni, u sistem je potrebno uneti kaskadni elemenat upravljanja koji treba da izvrši popravku faze od  $28^\circ + 45^\circ = 73^\circ$ . Ovo se može postići diferencijalnim kompenzatorom. Primena ovog kompenzatora povećava propusni opseg, tj. presečna učestanost pojačanja kompenziranog sistema će biti veća od  $5,4 \text{ rad/sec}$  pa će i treći zahtev ( $\omega_1 \geq 1 \text{ rad/sec}$ ) biti ispunjen.

Iz tabele date u knjizi ovog predmeta se vidi da diferencijalni kompenzator pri niskim učestanostima unosi slabljenje jednako odnosu  $a/b$ . Zbog toga, da bi brzinska konstanta zadržala željenu vrednost i posle unošenja diferencijalnog kompenzatora, u sistem će biti potrebno uneti dodatno pojačanje, koje će kompenzovati slabljenje kompenzatora.

Pri određivanju parametara kompenzatora najpre se usvaja odnos  $a/b$  i to na osnovu jednačine  $\phi_{\max} = (90^\circ - 2\arctg\sqrt{a/b})$  i potrebne popravke u fazi. Ukoliko je ovaj odnos manji, fazni ugao diferencijalnog kompenzatora je veći. Radi praktične potrebe za lakšom fizičkom realizacijom parametara, ovaj odnos ne treba usvajati manjim od 0.1. Pošto je u posmatranom primeru potrebna velika popravka u fazi ( $73^\circ$ ), usvajamo  $a/b=0.1$ . Tada je, prema ( $\phi_{\max} = (90^\circ - 2\arctg\sqrt{a/b})$ ), maksimalni fazni ugao diferencijalnog kompenzatora jednak  $54,8^\circ$  (zahteva se  $73^\circ$ ). Stoga usvaja dvostruki diferencijalni kompenzator, odnosa  $a/b=0.1$ . Njegov maksimalni fazni ugao

će biti dva puta veći,  $2(54,8^\circ)=109,6^\circ$ . Pošto se zahteva popravka u fazi od  $73^\circ$ , izgleda da je ovakva kompenzacija predimenzionisana. Međutim, treba imati u vidu da je zahtevana fazna popravka od  $73^\circ$  izračunata za presečnu učestanost pojačanja  $\omega_1 = 5.4 \text{ rad/sec}$  nekompensovanog sistema, a posle primene diferencijalnog kompenzatora presečna učestanost pojačanja kompenzovanog sistema neće više biti  $5,4 \text{ rad/sec}$ , već viša i za nju pretek faze treba da bude jednak zahtevanom  $45^\circ$ . Zbog toga, izbor tipa diferencijalnog kompenzatora (jednostruki, dvostruki, itd.) i njegovog odnosa  $a/b$  treba vršiti tako da  $\phi_{\max}$  bude veće od zahtevane popravke u fazi, izračunate za presečnu učestanost nekompensovanog sistema.

Funkcija prenosa usvojenog diferencijalnog kompenzatora, zajedno sa pojačavačem za kompenzaciju slabljenja kompenzatora, ima oblik

$$[10G_d(j\omega)]^2 = \left( \frac{1 + j\omega/a}{1 + j\omega/10a} \right)^2$$

Sledeći korak u određivanju vrednosti parametara kompenzatora je usvajanje njegove donje prelomne učestanosti  $\omega = a$ . Ovo je važan korak, jer ako se ova učestanost usvoji previše nisko ili suviše visoko, učiniće se promašaj u kompenzaciji. Efekat dejstva diferencijalnog kompenzatora će se manifestovati za dati sistem u adekvatnom opsegu učestanosti, ako se donja prelomna učestanost usvoji tako da u rezultatu asimptotski log dijagram slabljenja kompenzovanog sistema seče  $\log \omega$  osu pri što je moguće širem opsegu pod nagibom od  $-20 \text{ db/dec}$ . Znači da seče  $\log \omega$  osu tako da linearni segmenti, nagiba  $-20 \text{ db/dec}$ , sa leve i desne strane neposredno uz tačku preseka log dijagrama slabljenja kompenzovanog sistema budu dovoljno dugački i približno jednake dužine. U skladu sa tim, sa sl. 5.2 se vidi da se donja prelomna učestanost može usvojiti  $a=4 \text{ rad/sec}$ . Na taj način, funkcija prenosa diferencijalnog kompenzatora postaje

$$[10G_d(j\omega)]^2 = \left( \frac{1 + j\omega/4}{1 + j\omega/40} \right)^2$$

Logaritamski dijagram slabljenja i faze dodatog diferencijalnog kompenzatora konstruisan je na sl. 5.2. Njegovim sabiranjem sa dijagramom slabljenja nekompensovanog sistema dobijena je frekventna karakteristika slabljenja i faze kompenzovanog sistema. Do učestanosti  $\omega = 4 \text{ rad/sec}$  logaritamski dijagrami slabljenja nekompensovanog i kompenzovanog sistema se poklapaju. Dijagramu slabljenja kompenzovanog sistema odgovara presečna učestanost pojačanja  $\omega_{1d} \approx 14 \text{ rad/sec}$ .

Frekventna funkcija povratnog prenosa kompenzovanog sistema ima oblik

$$W(j\omega) = \lambda [10G_d(j\omega)]^2 W_f(j\omega) = \frac{20(1 + j\omega/4)^2}{j\omega(1 + j\omega/40)^2(1 + j\omega/2)(1 + j\omega/6)}$$

a pretek faze ovog sistema je

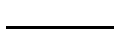
$$\phi_{pf} = 180^\circ + \arg \lambda [10G_d(j14)]^2 W_f(j14) = 50^\circ$$

Funkcija prenosa

$$G_c(s) = \lambda [10G_d(s)]^2 = 1000 \left( \frac{1 + s/4}{1 + s/40} \right)^2$$

kaskadnog elementa upravljanja, koga treba uneti u sistem uključuje u sebi kompenzator zajedno sa pojačavačem, pojačanja  $(b/a)^2 = 100$ , za kompenzaciju slabljenja diferencijalnog kompenzatora, i pojačavač pojačanja  $\lambda = 10$ , za povećanje brzinske konstante sistema [39].

### Zadatak 5.2

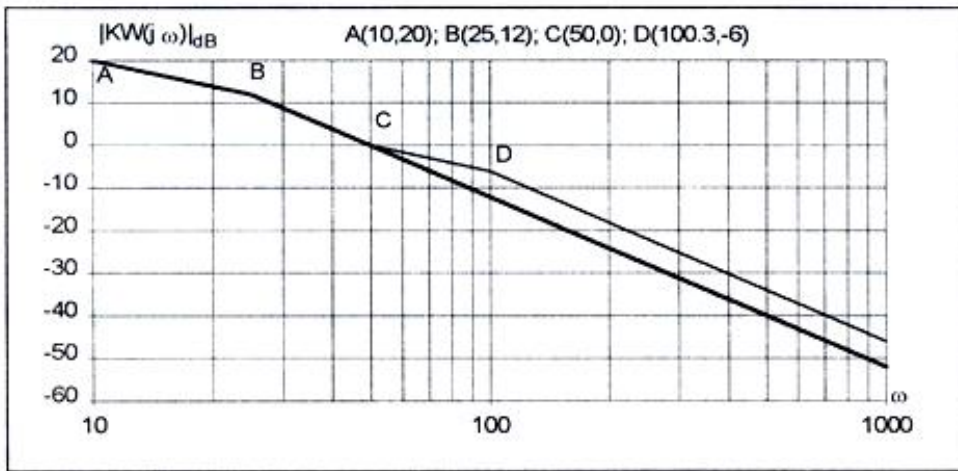
Dat je sistem funkcije povratnog prenosa: . Projektovati redni kompezator tako da se zadovolje sledeći uslovi sistema u zatvorenoj sprezi: brzinska konstanta \_\_\_\_\_, pretek faze \_\_\_\_\_.

### Rešenje:

U cilju povećanja brzinske konstante sistema neophodno je uvesti pojačanje: \_\_\_\_\_ (sa \_\_\_\_\_ je označena brzinska

konstanta nekompensovanog sistema). Zatim se crta asimptotska amplitudska frekventna karakteristika sistema \_\_\_\_\_ (slika 5.3, karakteristika je izvučena debljom linijom)

Neposrednim proveravanjem preteka faze vidi se da zahtev nije ispunjen \_\_\_\_\_, te se pristupa projektovanju diferencijalnog kompezatora:



Slika 5.3 Ilustracija postupka sinteze diferencijalnog kompenzatora [21]

Za nulu diferencijalnog kompenzatora usvojimo vrednost  $\omega_c$ . Kako je presečna učestanost pojačanja nekompensovanog sistema takođe  $\omega_c$ , ovakvim izborom nule diferencijalnog kompenzatora će i presečna učestanost pojačanja kompenzovanog sistema ostati ista. Na osnovu uslova za željenu vrednost preteka faze određuje se pol kompenzatora

— — —

Dakle funkcija prenosa kompenzatora postaje:

———. Na slici 5.3 je data i frekventne karakteristike slabljenja kompenzovanog sistema i izvučena je tanjom linijom [21].

### Zadatak 5.3

Zahteva se sinteza servosistema astatizma prvog reda u kome brzinska konstanta treba da ima vrednost  $K_v=5$ . Zahteva se dalje da prelazni proces bude okarakterisan pretekom faze od  $45^\circ$  i presečnom učestanošću pojačanja ne većom od 1,5 rad/sec. Funkcija povratnog prenosa ne kompenzovanog sistema je [39]:

$$W_f(s) = \frac{K_v}{s(1+s/2)(1+s/6)}$$

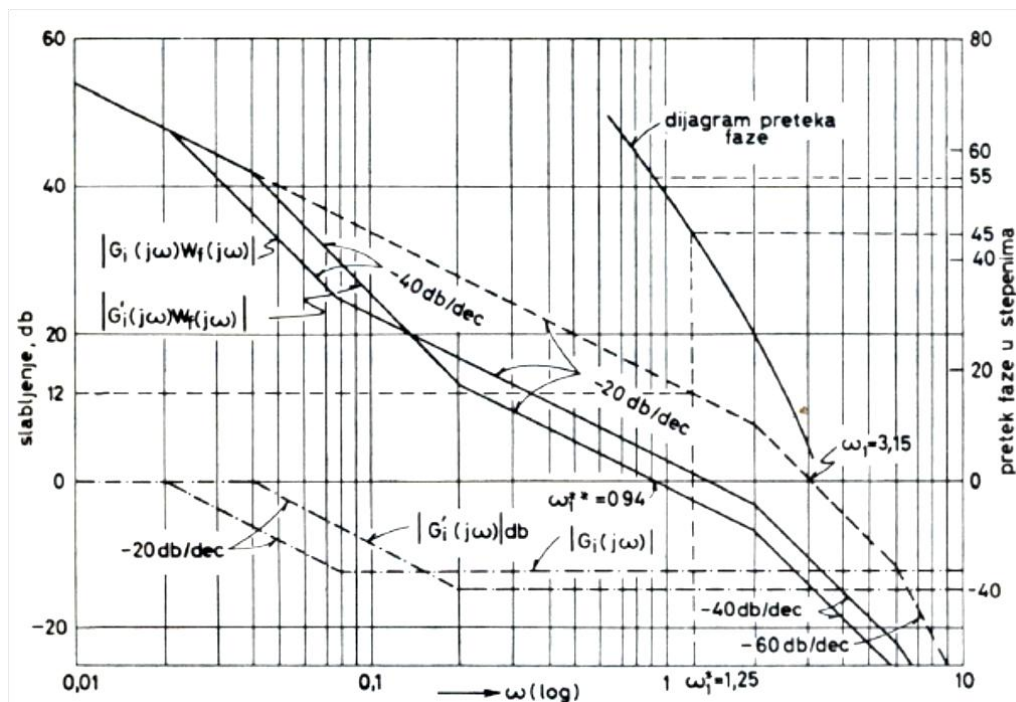
### Rešenje:

Ako se faktori pojačanja funkcija prenosa fiksnih komponenti sistema usvoje tako da prvi zahtev bude ispunjen ( $K_v=5$ ), tada će frekventna funkcija povratnog prenosa biti

$$W_f(j\omega) = \frac{5}{j\omega(1+j\omega/2)(1+j\omega/6)}$$

Logaritamski dijagram slabljenja za datu frekventnu funkciju povratnog prenosa prikazan je linijom obeležena sa  $W_f$  na slici 5.4. Dijagram seče  $\log \omega$  osu pri  $\omega_1 = 3.15 \text{ rad/sec}$ , pa je pretek faze nekompenzovanog sistema

$$\phi_{pf} = 180^\circ + \arg W_f(j3.15) = +4.7^\circ$$



Sl. 5.4. Ilustracija postupka sinteze integralnog kompenzatora u dve varijante izvedbe [39]



Pošto je pretek faze pozitivan, nekompensirani sistem je stabilan. Međutim, pretek stabilnosti je mali, što znači da ovaj sistem ima izrazito oscilatoran prelazni proces sa velikim preskokom i vremenom smirenja. Postoji više postupaka da se kompenzacija sistema izvrši integralnim kompenzatorom. Ovde će biti izložena dva postupka, od kojih svaki direktno vodi ispunjenju postavljenih zahteva i to bez obzira na red sistema koji se kompenzuje. Postupci, su u osnovi isti, s tom razlikom što drugi vodi računa i o tome da vrednosti parametara dobijenog kompenzatora budu pogodniji za fizičku realizaciju.

Pošto je pretek faze pozitivan, nekompensovanog sistem je stabilan. Međutim, pretek stabilnosti je mali, što znači da ovaj sistem ima izrazito oscilatoran prelazni proces sa velikim preskokom i vremenom smirenja.

Postoji više postupaka da se kompenzacija sistema izvrši integralnim kompenzatorom. Postupci, koji će biti izloženi, su u osnovi isti, s tom razlikom što drugi vodi računa i o tome da vrednosti parametara dobijenog kompenzatora budu pogodniji za fizičku realizaciju.

U prvom postupku treba učiniti sledeća četiri koraka:

1. Konstruiše se asimptotski log dijagram slabljenja nekompensovanog sistema, kod koga je faktor pojačanja funkcije povratnog prenosa podešen tako da ovaj sistem ispunjava prvi zahtev, u pogledu veličine odgovarajuće konstante greške. Zatim se za ovaj sistem konstruiše i dijagram preteka faze i to u opsegu učestanosti koji se nalazi u okolini presečne učestanosti pojačanja nekompensiranog sistema. U slučaju u posmatranog sistema, ovaj dijagram se može konstruisati pomoću jednačine

$$\phi_{pf} = 180^0 + \arg W_f(j\omega) = 90^0 - \arctg(\omega/2) - \arctg(\omega/6)$$

2. Na krivoj preteka faze fiksira se tačka kojoj odgovara pretek faze jednak zahtevanom. U preseku normale iz ove tačke na log  $\omega$  osu i log  $\omega$  ose očita se presečna učestanost pojačanja  $\omega_1^*$  kompenzovanog sistema. Ako kompenzovani sistem bude imao ovu presečnu učestanost pojačanja, tada će njegov pretek faze biti jednak zahtevanom, pod uslovom da se posle unošenja kompenzatora dijagrami preteka faze nekompensovanog i kompenzovanog sistema poklapaju i to u opsegu učestanosti u bliskoj okolini  $\omega_1^*$ . Ovaj uslov će biti ispunjen ako je primenjeni kompenzator integralnog tipa i ako je njegova gornja prelomna učestanost dosta niža od  $\omega_1^*$ .

Naime, sa sl. 5.4 se vidi da je pri učestanostima koje su znatno više od gornje prelomne učestanosti  $\omega = b$  integralnog kompenzatora fazni ugao ovog kompenzatora zanemarljivo mali.

3. Odabere se gornja prelomna učestanost kompenzatora za 4 oktave niža od presečne učestanosti pojačanja  $\omega_1^*$  kompenzovanog sistema. Na osnovu sl. 5.4 ili jednačine za fazu kompenzatora se može videti da će fazni ugao integralnog kompenzatora biti praktično zanemarljiv pri učestanosti koja je za 4 oktave viša od gornje prelomne učestanosti kompenzatora  $\omega = b$ . Podsetimo da „za oktavu niža učestanost“ znači dva puta niža učestanost, za dve oktave - četiri puta - , za tri oktave – osam puta - itd. Drugim rečima, ako je, na primer, neka učestanost  $\omega_a$  za n oktava niža od  $\omega_b$  tada važi relacija  $\omega_a = \omega_b / (2)^n$ . Prema tome, pošto je u posmatranom primeru presečna učestanost pojačanja kompenzovanog sistema  $\omega_1^* = 1.25 \text{ rad / sec}$ , za gornju prelomnu učestanost kompenzatora treba usvojiti

$$b = \frac{1.25}{(2)^4} = \frac{1.25}{16} = 0.078 \text{ rad / sec}$$

4. Usvaja se slabljenje integralnog kompenzatora tako da log dijagram slabljenja kompenzovanog sistema preseče log  $\omega$  osu u tački kojoj odgovara  $\omega = \omega_1^*$ . Potrebno slabljenje integralnog kompenzatora u dB se očitava kao negativna vrednost ordinate log dijagrama slabljenja nekompenzovanog sistema za učestanost  $\omega_1^*$  na apscisnoj osi. Sa sl. 5.4 a iz dijagrama se vidi da je potrebno slabljenje kompenzatora  $(a/b)db$  jednako -12 db, pa je

$$20 \log\left(\frac{a}{b}\right) = -12 \rightarrow \frac{b}{a} = 10^{12/20} \rightarrow \frac{b}{a} \approx 4 \rightarrow a = \frac{b}{4} = \frac{0.078}{4} = 0.0195 \text{ rad / sec} \approx 0.02 \text{ rad / sec}$$

Funkcija prenosa kompenzatora ima oblik

$$G_{i1}(s) = \frac{1 + s/b}{1 + s/a} = \frac{1 + s/0.078}{1 + s/0.02} = \frac{1 + 12.8s}{1 + 50s}$$

a funkcija povratnog prenosa kompenzovanog sistema je

$$W_1(s) = G_{i1}(s)W_f(s) = \frac{5(1 + s/0.078)}{s(1 + s/0.02)(1 + s/2)(1 + s/6)}$$

Sličnim postupkom, samo sa manjim vremenskim konstantama se dobije prenosna funkcija integralnog kompenzatora

$$G_{i2}(s) = \frac{1 + s/0.2}{1 + s/0.04} = \frac{1 + 5s}{1 + 25s}$$

Na slici 5.4 je data ilustracija postupka sinteze integralnog kompenzatora u dve varijante izvedbe integralnog kompenzatora kao i odgovarajuće

slabljenje i faze prenosne funkcije povratnog prenosa kompenzovanih sistema[39].

#### **Zadatak 5.4.**

Funkcija prenosa procesa je \_\_\_\_\_ . Projektovati redni kompenzator tako da budu zadovoljeni sledeći zahtevi: brzinska konstanta pretek faze \_\_\_\_\_ i pretek pojačanja \_\_\_\_\_

#### **Rešenje:**

U sistem se mora uneti pojačanje  $K$  takvo da je: \_\_\_\_\_ a

potom se nacрта frekventna karakteristika slabljenja sistema sa prethodno određenim pojačanjem  $K$ , koja je prikazana na slici 5.5. Ispitivanjem faze u pojedinim tačkama zaključuje se da je \_\_\_\_\_ te je

dovoljno da se za učestanost preteka faze usvoji \_\_\_\_\_

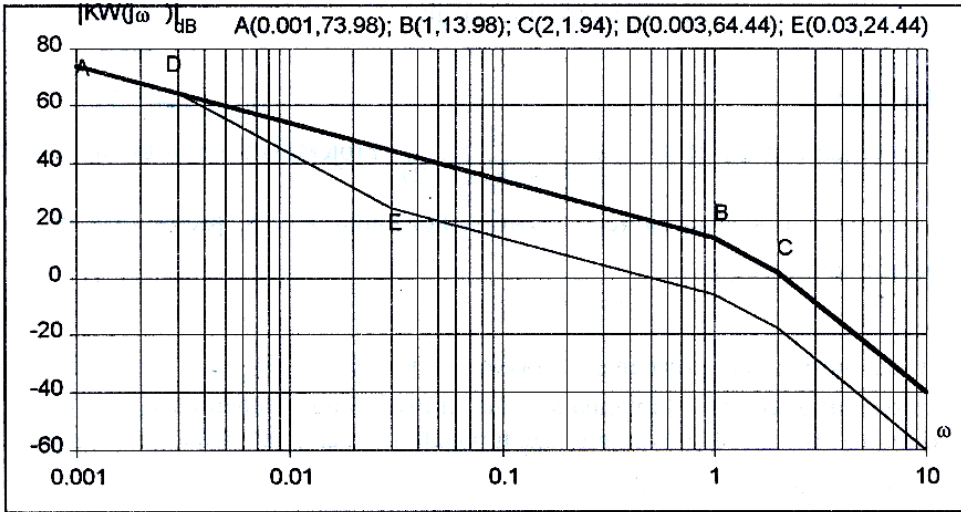
Nula kompenzatora određuje se iz uslova da ona bude dovoljno udaljena od presečne učestanosti pojačanja kako bi integralni kompenzator što manje uticao na fazu kompenzovanog sistema:

—

Grafičkim postupkom se određuje pol integralnog kompenzatora na sledeći način: počev od tačke \_\_\_\_\_ crta se amplitudska karakteristika u smeru opadanja učestanosti, dakle u levo, koja je u segmentima paralelna sa početnom krivom ( puna linija ), sve do vrednosti učestanosti \_\_\_\_\_ , odnosno do tačke E. Od ove tačke na levo potrebno je povući pravu pod nagibom za 20dB manjim (pol integralnog kompenzatora smanjuje nagib karakteristike slabljenja za 20 decibela po dekadi) od nagiba početne krive na tim učestanostima, dakle pod nagibom od -40 dB po dekadi. U preseku ove prave i početne karakteristike dobija se vrednost pola integralnog kompenzatora u tački \_\_\_\_\_ . Proverom se ustanovljava da se usklađeni sistem \_\_\_\_\_ Još je važno proveriti pretek pojačanja.

Kako je:

zaključuje se da je učestanost preteka pojačanja veća od učestanosti , znači da je vrednost slabljenja na učestanosti manja nego na učestanosti . ( amplitudska karakteristika je opadajuća funkcija na višim učestanostima, kao i fazna karakteristika ). Samim tim je i pretek pojačanja veći od . Amplitudska karakteristika kompenzovanog sistema data je na slici 5.5. tanjom linijom.



Slika 5.5.[21]

**Zadatak 5.5:**

Zadati deo sistema opisan je funkcijom prenosa. Izvršiti sintezu rednog kompenzatora

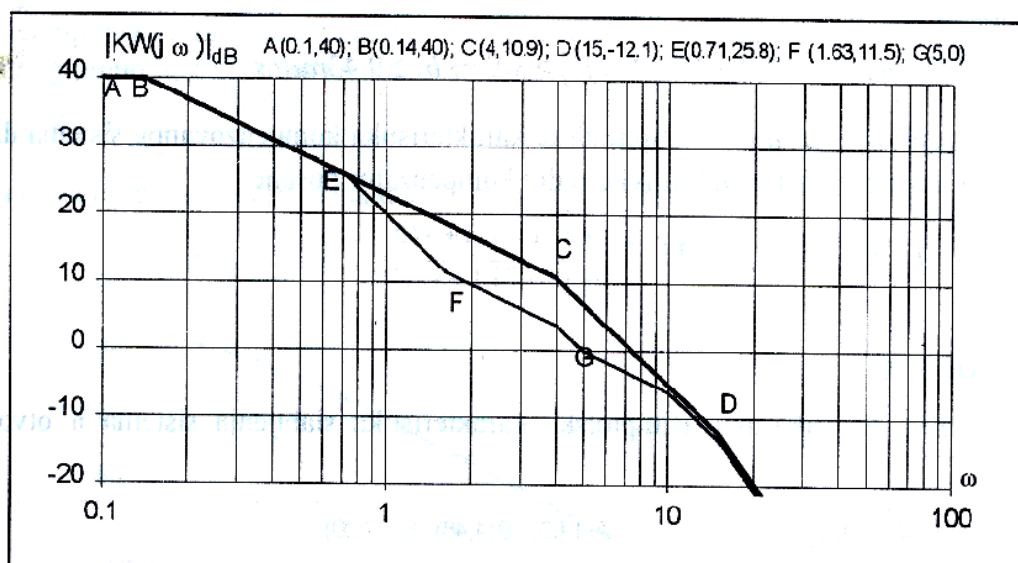
tako da usklađeni sistem zadovoljava sledeće zahteve:

- konstanta greške položaja
  - pretek faze ;
  - presečna učestalost pojačanja ;
  - slabljenje u opsegu niskih učestanosti za
- svako [21]

**Rešenje:**

Kompensator mora da sadrži dodatno statičko pojačanje  $K$  jer je postojeća konstanta položaja u sistemu manja od željene. Otuda se ovo pojačanje računa kao količnik željene i postojeće konstante položaja:

Na slici 5.6 je debljom linijom nacrtana amplitudska asimptotska karakteristika nekompenzovanog sistema sa dodatim pojačanjem  $K$ .



Slika 5.6.[21]

Zahtev za postiže se integralnim kompensatorom. Kako je potrebno da integralni kompensator bude što udaljeniji od ove učestanosti, da bi njegov uticaj na pretek faze bio što manji, a kako, sa druge strane, zabranjena oblast u opsegu niskih učestanosti iz postavke zadatka uslovljava položaj amplitudske karakteristike, jedan od načina projektovanja integralnog kompensatora je da amplitudska karakteristika kompenzovanog sistema prolazi kroz teme zabranjene oblasti . Deo karakteristike koja sadrži tačku temena mora imati nagib za 20dB manji od nagiba početne karakteristike na toj učestanosti. U preseku ovog dela novoformirane karakteristike sa početnom dobija se tačka E, na osnovu koje se očitava pol integralnog kompensatora . Da bi se odredila i nula integralnog kompensatora potrebno je crtati segmente amplitudske karakteristike u levo, počevši od

tačke G, jer je to željena tačka presečne učestanosti pojačanja, koji su paralelni sa segmentima početne amplitudske karakteristike, sve do preseka F sa segmentom koji prolazi kroz teme zabranjene oblasti. Tačka F definiše nulu integralnog kompenzatora i njena apscisa određuje nulu integralnog kompenzatora. Na taj način se grafičkom metodom određuje funkcija prenosa integralnog kompenzatora:

\_\_\_\_\_

Ukoliko se proveriti faza, videće se da taj zahtev nije zadovoljen, pa je potrebno uvesti diferencijalni kompenzator oblika: \_\_\_\_\_.

Diferencijalni kompenzator određen sa dva parametra, a kako postoji samo jedan zahtev koji oni treba da zadovolje, a to je zahtevani pretek faze, postoji jedan stepen slobode. Uobičajeno je da se usvoji nula diferencijalnog kompenzatora i neka je to vrednost. Iz uslova za pretek faze numerički se određuje pol diferencijalnog kompenzatora:

Može se usvojiti. Amplitudske karakteristika kompenzovanog sistema data je na slici 5.6. tanjom linijom. Definitivno redni kompenzator postaje:

\_\_\_\_\_

## **5.2. Sinteza kompenzatora pomoću metode geometrijskog mesta korena.**

U osnovi se može reći da principi sinteze kompenzatora ostaju isti, bez obzira da li se sinteza vrši pomoću frekventne metode ili u s-ravni, tj. korišćenjem geometrijskog mesta korena. Kod oba slučaja potrebno je izabrati strukturu i parametara kompenzatora, koga treba uneti u sistem, tako da se postignu neki unapred postavljeni zahtevi u pogledu kvaliteta prelaznog procesa i maksimalno dozvoljene greške stacionarnog režima. Kada se sinteza kompenzatora želi izvršiti pomoću frekventne metode, pomenuti zahtevi se moraju izraziti u vidu vrednosti odgovarajuće konstante greške, preteka faze ili preteka pojačanja i propusnog opsega ili vrednosti

prosečne učestanosti pojačanja kompenzovanog sistema o kojima se govorilo u prethodnim poglavljima[39].

Pri sintezi sistema pomoću metode geometrijskog mesta korena zahtevi u pogledu tačnosti rada, potrebnog preteka stabilnosti i brzine reagovanja sistema se izražavaju preko željenih lokacija polova i nula funkcije spregnutog prenosa kompenzovanog sistema u  $s$ -ravni jer karakter prelaznog procesa sistema i parametri ovog odziva su u najvećoj meri određeni lokacijom para dominantnih polova funkcije spregnutog prenosa, tj. konjugovano kompleksnim korenima karakteristične jednačine sistema, koji se nalaze najbliže imaginarnoj osi  $s$ -ravni. Lokaciju ovih polova je određena faktorom relativnog prigušenja  $\xi$  i neprigušenom prirodnom frekvencijom  $\omega_n$  (alternativno  $\xi$  i  $T_d$ , gde je  $T_d$  dominantna vremenska konstanta,  $T_d \leq 1/\xi\omega_n$ ).

Kao što je rečeno ovi paramtri tačno definišu karakter i brzinu odziva sistema drugog reda i približno sistema višeg reda s izraženim dominantnim polovima. Oni dakle definišu prelazni režim.

Ustaljeno stanje sistema je određeno greškom u stacionarnom stanju, odnosno odgovarajućim konstantama greške ( $K_p$ ,  $K_v$  ili  $K_a$ ). Prema tome, tehnički zahtevi za zadovoljenje za stacionarno i prelazno stanje sadrže ova tri parametra  $\xi$ ,  $\omega_n$ ,  $K_g$ , gde je  $K_g$  - zahtevana konstanta greške.

Proces projektovanja započinje ispitivanjem ispunjenosti tehničkih zahteva. Najpre se proverava da li polazni, nekompenzovani sistem, zadat funkcijom povratnog prenosa  $W_f(s)$ , ispunjava zadate dinamičke tehničke uslove:  $\zeta$  i  $\omega_n$ . Par  $(\zeta, \omega_n)$  definiše položaj dominantnog pola funkcije spregnutog prenosa kompenzovanog sistema u  $s$ -ravni. Shodno metodi GMK, tačke na granama GMK definišu polove spregnutog prenosa sistema za odgovarajuće pojačanje. Prema tome, sistem će ispuniti zadate dinamičke zahteve ako pol, definisan sa

$$s_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

pripada GMK sistema. Kao što je poznato, tačke na granama GMK ispunjavaju osnovni fazni kriterijum

pa se kontrola ispunjenja dinamičkih zahteva svodi na proveru uslova

$$\phi(s_1) = \arg W_f(s_1) = -\pi$$

Ako je ovaj uslov ispunjen, sistem će zadovoljiti zadane tehničke uslove u pogledu dinamike, s tim što se mora odrediti pojačanje GMK u tački  $s_1$  i ono podesiti u funkciji povratnog prenosa sistema. Ako poslednji uslov nije ispunjen, potrebno je u sistem uneti diferencijalni kompenzator.

Kada su zadovoljeni zadati dinamički uslovi, pristupa se proveru ispunjenosti zadatih tehničkih uslova u pogledu statičke tačnosti. Ta provera se odvija proverom ispunjenosti relacije

$$K_g = \lim_{s \rightarrow 0} s^r W_f(s) \geq K_{gz}$$

gde eksponent  $r$  označava stepen astatizma sistema, a  $K_{gz}$  je tražena vrednost odgovarajuće konstante greške (položaja ( $r=0$ ), brzine ( $r=1$ ) ili ubrzanja ( $r=2$ )). Ako poslednja relacija nije ispunjena, u sistem se mora uneti integralni kompenzator.

Iz prethodnog izlaganja jasno je da se, kada polazni sistem ne zadovoljava dinamičke, a zadovoljava statičke zahteve, projektuje samo diferencijalni kompenzator. U suprotnom slučaju, projektuje se samo integralni kompenzator. Ako, pak, polazni sistem ne zadovoljava ni dinamičke niti statičke zahteve, tada se prvo projektuje diferencijalni, a zatim integralni kompenzator.

Tehnika sinteze sistema u  $s$ -ravni je jednostavnija u poređenju sa sintezom sistema pomoću frekvente metode i to zbog toga što se u primeni ove tehnike grafički i analitički operiše sa korenima karakteristične jednačine, što je pogodnije u poređenju sa manipulacijama na frekventnim karakteristikama [39].

### Zadatak 5.6

Od sistema čija je funkcija povratnog prenosa



se zahteva: da relativni faktor prigušenja para dominantnih polova funkcije spregnutog prenosa kompenzovanog sistema bude:  $\zeta = 0,6$  i da dominantna vremenska konstanta bude  $T_d = 1/3$  sec [39].

### Rešenje:

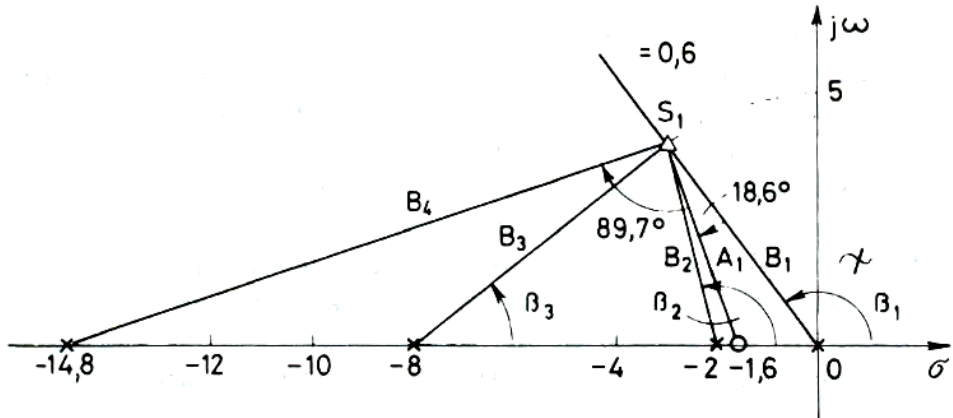
Potrebno je postaviti par dominantnih konjugovano kompleksnih polova na pravoj  $\zeta = 0,6$  i krugu  $\omega_n = 5$  (jer je  $\omega_n = 1/\zeta T_d = 5$  rad/sec i  $T_d = 1/\zeta \omega_n$ ), odnosno u tačkama  $s_{1,2}$  :



$\xi$  $\xi$ 

kao na donjoj slici.

Ugao  $\gamma = \arccos(-\zeta) = 127^\circ$ .



Sl. 5.7. Sinteza diferencijalnog kompenzatora za sistem funkcije povratnog prenosa[39]

Ako proverimo argument funkcije  $W_f(s)$  u tački  $s_1$  dobije se

$$\phi = W_f(s_1) = -(\angle s_1) - (\angle (s_1 + 2)) - (\angle (s_1 + 8)) = -\beta_1 (= -\psi) - \beta_2 - \beta_3 = -127^\circ - 104^\circ - 38,7^\circ = -269,7^\circ,$$

Postaje jasno da se tačke u kojima želimo da lociramo dominantne konjugovano kompleksne polove ne nalaze na geometrijskom mestu korena (inače bi argument iznosio  $180^\circ$ ). Shodno tome, prva “popravka“ koju kompenzator treba da izvrši jeste da unese priraštaj od:

$$\lambda = -\phi - 180^\circ = 269,7^\circ - 180^\circ = 89,7^\circ,$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(\psi - \lambda) = \frac{1}{2}(127^\circ - 89,7^\circ) = 18,6^\circ,$$

$$\lambda + \gamma = 108,3^\circ.$$

Na osnovu izračunatih vrednosti za uglove  $\gamma$  i  $\lambda + \gamma$  i primenjujući izloženi postupak, na sl. 5.7 se očitavaju vrednosti  $a=1,6$  i  $b=14,8$ . Prema tome, kompenzator ima funkciju prenosa

pa je funkcija povratnog prenosa  $W(s)$  kompenzovanog sistema

gde je  $K = 16K_f$ .

Vrednost faktora pojačanja  $K$ , pri kojoj će karakteristična jednačina kompenzovanog sistema  $1 + W(s) = 0$  imati par korena  $s_{1,2}$ , se može odrediti na osnovu svojstva geometrijskog mesta korena:

gde su  $B_1, B_2, B_3, B_4$  i  $A$ , veličine odgovarajućih potega na sl. 5.7, koji povezuju kritične frekvencije kompenzovanog sistema sa tačkom  $s_i$ . Izračunavanjem (ili merenjem) ovih veličina i zamenom u poslednju jednačinu dobija se

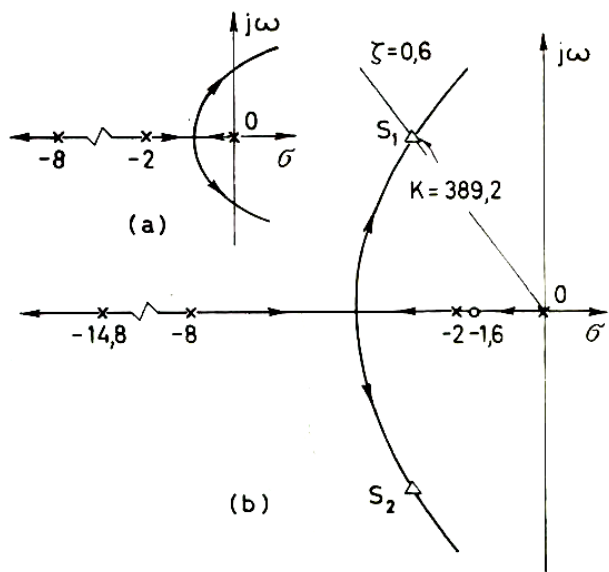
Odredimo, na kraju, i brzinsku konstantu sistema

Parametri diferencijalnog kompenzatora  $a$  i  $b$  se mogu takođe odrediti na osnovu analitičkog izraza preuzet iz navedene literature[] je.

$$(a, b) = 5 \left[ 0.6 + \frac{\sqrt{1-0.6^2}}{\operatorname{tg} \left( \frac{180^\circ - 53.13^\circ}{2} \mp \frac{-269.56^\circ + 180^\circ}{2 \cdot 1} \right)} \right] = (1.684; 14.849)$$

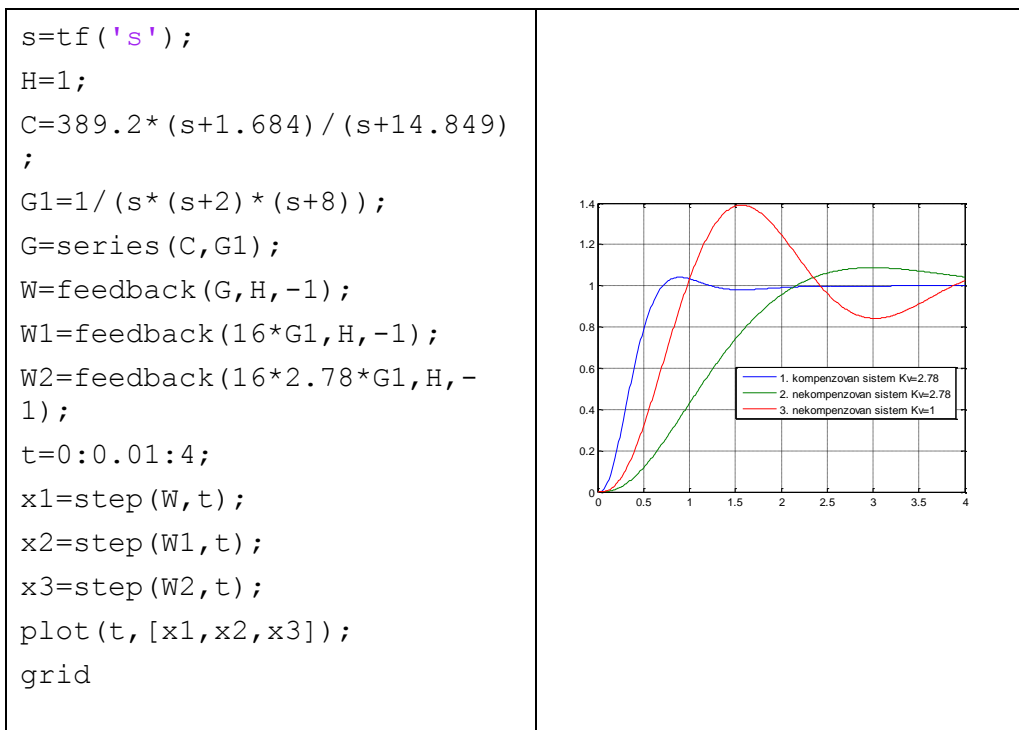
Funkcija povratnog prenosa kompenzovanog sistema je

Na sl. 5.8 (a) i (b) prikazana su geometrijska mesta korena, respektivno nekompenzovanog i kompenzovanog sistema.



Sl. 5.8. Geometrijsko mesto korena: a) nekompenzovanog, b) kompenzovanog sistema u primeru

Na narednoj slici je dat odskočni odziv nekompenzovanog i kompenzovanog sistema iz poslednjeg primera.



Slika 5.9 Odskočni odziv sistema iz poslednjeg primera [27]

Na slici se vidi efekat uticaja unesenog diferencijalnog kompenzatora na oblik prelaznog procesa sistema (karakteristika 1).

Napomenimo da se zadatak u prethodnom primeru mogao rešiti jednostavnije, ne primenjujući dati, opšti postupak sinteze diferencijalnog kompenzatora. Naime, u izvesnim slučajevima kompenzacija se može izvršiti *postupkom skraćivanja*. Ovaj postupak se zasniva na usvajanju nule diferencijalnog kompenzatora da bude jednaka jednom od polova funkcije povratnog prenosa nekompenzovanog sistema. Postupak skraćivanja se može primenjivati samo u onim slučajevima, gde se pomeranjem jednog pola funkcije povratnog prenosa nekompenzovanog sistema može postići da geometrijsko mesto korena prođe kroz željenu tačku u s-ravni.

Ako se za nulu ovog kompenzatora usvoji vrednost  $a_d = 2$  (postupak skraćivanja pola funkcije prenosa), pol  $b_d$  se može odrediti na osnovu željenog priraštaja faze u tački  $s_1$  :

$$\Delta\phi = \arg(s + 2) - \arg(s + b_d) \Rightarrow 104^\circ - 89.7^\circ = \arg(s_1 + b_d) \Rightarrow b_d = 19.77$$

Ovakvim izborom diferencijalnog kompenzatora obezbeđeno je da GMK sadrži željeni položaj dominantnih polova, međutim treba odrediti potrebno pojačanje  $K$  kako bi se polovi sistema u zatvorenoj sprezi nalazili tačno u tim tačkama. Takvo pojačanje  $K$  se određuje iz sledeće relacije (uslov modula):

$$|KG_d(s_1)W_f(s)| = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{|G_d(s_1)W_f(s)|} = \frac{|s_1||s_1 + 8||s_1 + 19.77|}{16} = 42.26$$

Konačno, funkcija prenosa diferencijalnog kompenzatora postaje:

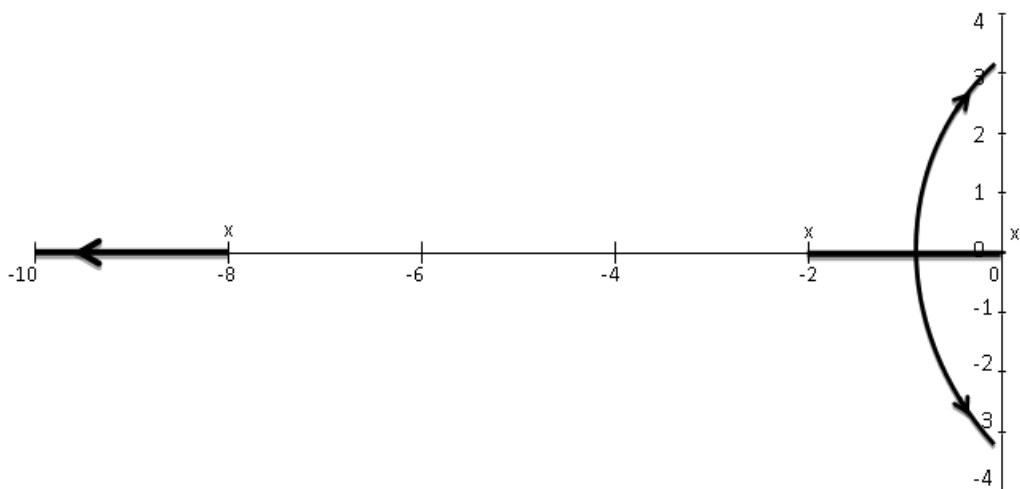
$$G_d(s) = 42.26 \frac{s + 2}{s + 19.77}$$

### Zadatak 5.7

Funkcija prenosa sistema je \_\_\_\_\_ . Projektovati kompenzator tako da faktor relativnog prigušenja para dominantnih konjugovano kompleksnih polova funkcije spregnutog prenosa bude \_\_\_\_\_ , a da dominantna vremenska konstanta bude \_\_\_\_\_ - [21]

### Rešenje

Geometrijsko mesto korena nekompenzovanog sistema prikazanje na sledećoj slici



Slika 5.10 [21]

Potrebno je postaviti par dominantnih konjugovano kompleksnih polova na pravoj ima vrednost kosinusa ugla između prave koja spaja koordinatni početak i dominantni pol i negativnog dela realne ose) i krugu  $r = 5$ , odnosno u tačkama :

$$\underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

Ako se proverí argument funkcije  $W(s)$  u tački , dobija se:

Postaje jasno da se tačke u kojima želimo da lociramo dominantne konjugovano kompleksne polove ne nalaze se na geometrijskom mestu korena ( inače bi argument iznosio  $-180^\circ$  ). Shodno tome, prva 'popravka' koju kompenzator treba da izvrši jeste da unese priraštaj faze od , kako bi grane GMK kompenzovanog sistema sadržale željene dominantne polove. U tom cilju uvodimo diferencijalni kompenzator:

$$\underline{\hspace{2cm}}$$

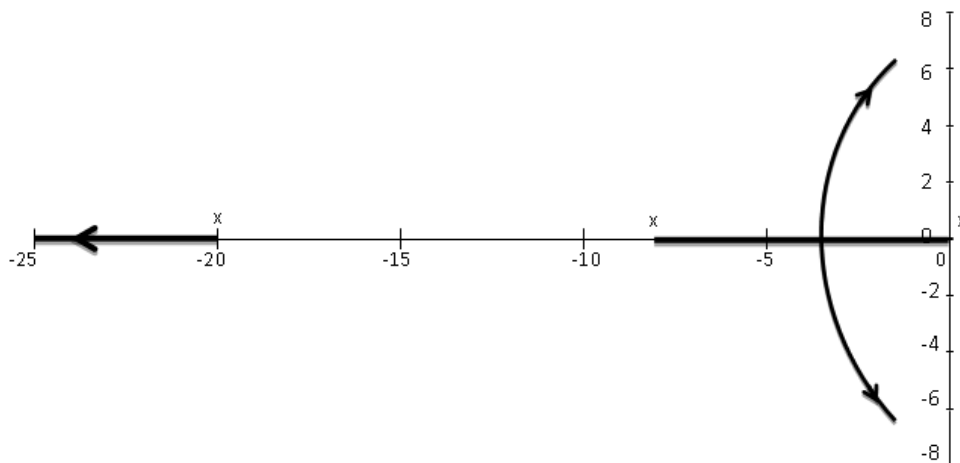
Ako se za nulu ovog kompenzatora usvoji vrednost  $\tau = 2$  (postupak skraćivanja pola funkcije prenosa ), pol se može odrediti na osnovu željenog priraštaja faze u tački :

Ovakvim izborom diferencijalnog kompenzatora obezbeđeno je da GMK sadrži željeni položaj dominantnih polova, međutim treba odrediti potrebno pojačanje  $K$  kako bi se polovi sistema u zatvorenoj sprezi nalazili tačno u tim tačkama. Takvo pojačanje  $K$  se određuje iz sledeće relacije ( uslov modula):

$$\frac{K}{\dots} = \dots$$

Konačno, funkcija prenosa kompenzatora postaje: \_\_\_\_\_

Geometrijsko mesto korena kompenzovanog sistema prikazano je na sledećoj slici



Slika 5.11 [21]

### Zadatak 5.9

Za sistem funkcije povratnog prenosa \_\_\_\_\_ zahteva se projektovanje kompenzatora tako da koeficijent relativnog prigušenja para dominantnih konjugovano kompleksnih polova iznosi \_\_\_\_\_, dominantna vremenska konstanta sistema \_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_; propusni opseg \_\_\_\_\_ rad/sec i brzinska konstanta \_\_\_\_\_. [21]

## Rešenje

U preseku prave  $\omega = \omega_0$  i prave  $\omega = \omega_0$  — — — — —  
— — — — — dobijaju se tačke položaja željenih dominantnih  
konjugovano kompleksnih polova:

—

Kako je neprigušena prirodna učestanost dominantnih polova  $\omega_0$  — — — — —  
možemo zaključiti da je propusni opseg sigurno manji od vrednosti  
 $3\text{rad/sec}$  (frekventna karakteristika slabljenja u tački  $\omega_0$  ima pad nagiba od  $-40\text{dB/dekadi}$ , te je vrednost propusnog opsega malo veća od neprigušene prirodne učestanosti, što zadovoljava postavljeni zahtev). Ukoliko se proveriti argument funkcije  $W(s)$  u tački  $s = s_1$  dobija se:

Očigledno je potrebno uvesti diferencijalni kompenzator koji će doprineti priraštaju faze od  $90^\circ$ . Ako se za nulu diferencijalnog kompenzatora usvoji  $s = -\omega_0$  (postupak skraćivanja), na osnovu zahteva za potrebnim priraštajem faze određuje se položaj pola diferencijalnog kompenzatora:

Potrebno pojačanje koje treba uvesti u sistem se računa na osnovu uslova modula:

Tako kompenzovan sistem ima brzinsku konstantu  $K_v$ , koja je manja od željene. Zbog toga je potrebno uvesti integralni kompenzator

—————

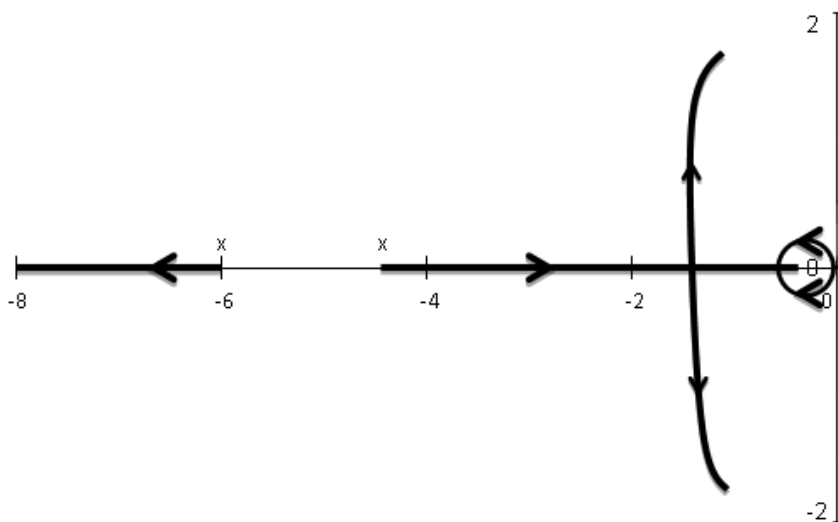
Ako se usvoji  $s = -\omega_0$  — — — — —, na osnovu željene brzinske konstante dobija se

— — — — —

Konačno, funkcija prenosa kompenzatora postaje:

————— Geometrijsko mesto korena

kompenzovanog sistema je prikazano na sledećoj slici



Slika 5.14 [21]

### Zadatak 5.10

Funkcija prenosa procesa je \_\_\_\_\_ . Isprojektovati redni kompenzator tako da budu zadovoljeni sledeći zahtevi :  
[21]

#### Rešenje:

Na osnovu zahtevanog koeficijenta relativnog prigušenja i neprigušene prirodne učestanosti, određuje se par dominantnih konjugovano kompleksnih polova:

\_\_\_\_\_

Kako je \_\_\_\_\_ potrebno je uvesti diferencijalni kompenzator koji će uvesti priraštaj faze u tački \_\_\_\_\_. Usvajanjem nule diferencijalnog kompenzatora \_\_\_\_\_ = 1 (postupkom skraćivanja), iz uslova argumenta dobija se pol \_\_\_\_\_ = 9.188. Potrebno pojačanje koje treba uvesti u sistem računa se na osnovu uslova modula:

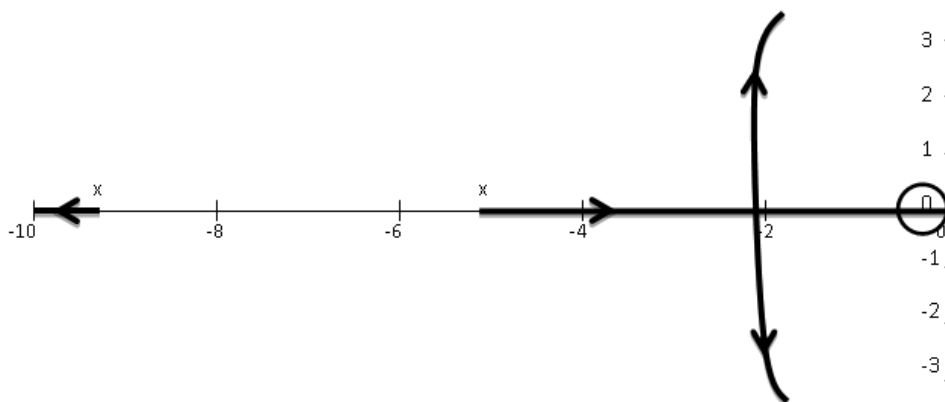
Još je potrebno proveriti ostvarenu brzinsku konstantu:



Kako je ona manja od zadate, potrebno je uvesti integralni kompenzator čiji će količnik nule i pola biti jednak 10. Usvajanjem nule integralnog kompenzatora  $\tau_i = 0.1$  za njegov pol se dobija  $\tau_p = 0.01$ . Konačno, funkcija prenosa kompenzatora je

\_\_\_\_\_

Geometrijsko mesto korena kompenzovanog sistema prikazano je na sledećoj slici.



Slika 5.15 [21]

### Zadatak 5. 11

Funkcija povratnog prenosa sistema automatskog upravljanja je  $W(s) = \frac{K}{(s-1)(s^2+5s+10)}$ ,  $K > 0$  **a)** Skicirati geometrijsko mesto korenova, a zatim odrediti karakteristične tačke i naznačiti ih na grafiku GMK. **b)** Odrediti pojačanje  $K = K_1$  u sistemu tako da dominantna vremenska konstanta sistema u zatvorenoj povratnoj sprezi bude minimalna. **c)** Na osnovu GMK odrediti opseg pojačanja  $K$  za koje je sistem u zatvorenoj sprezi stabilan. **d)** Isprojektovati redni kompenzator minimalnog reda ako je  $K = 1$  i to prema sledećim zahtevima: faktor relativnog prigušenja  $\zeta = 0.6$  i dominantna vremenska konstanta  $T_d \leq (3/2)\text{sec}$ . [15]

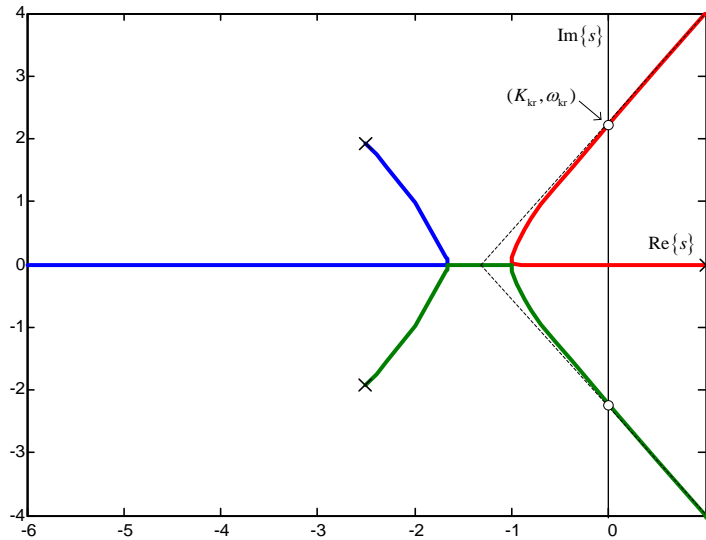
**Rešenje:**

a) Kako je funkcija povratnog prenosa  $W(s) = \frac{K}{(s-1)(s^2+5s+10)}$ ,  $K > 0$ , na

osnovu koje određujemo polove sistema  $p_1=1$  i  $p_{2,3} = -\frac{5}{2} \pm j\frac{\sqrt{15}}{2}$ ,

asimptote  $\begin{cases} \Theta_i = \frac{i\pi}{3}, i=1,3,5 \\ \sigma_a = -\frac{4}{3} \end{cases}$  i uz uvažavanje ostalih pravila za crtanje GMK

imamo



Slika 5.16.[15]

Tačke odvajanja  $\frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{W(s)} \right]_{s=\sigma_0} = 0 \Rightarrow \sigma_{01} = -1$  i  $\sigma_{02} = -5/3$ . Kritično pojačanje i kritičnu učestanost možemo odrediti na više načina, tako na primjer na osnovu GMK imamo

$$(s-1)(s^2+5s+10)+K \equiv (s^2+\omega_{kr}^2)(s+a), \quad a > 0 \quad \Rightarrow \omega_{kr} = \sqrt{5} \text{ sec}^{-1} \text{ i } K_{kr} = 30.$$

b) Na osnovu GMK se uočava da je  $T_{d\min} = -1/\sigma_{01}$  za  $K_1 = \frac{1}{|W(j\sigma_{01})|} = 12$ .

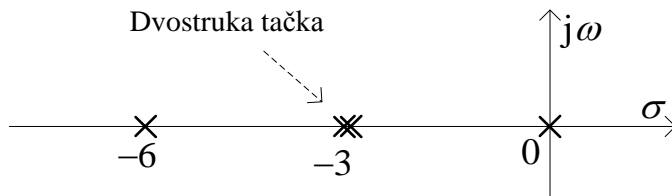
c) Opseg pojačanja za koje je sistem u zatvorenoj sprezi stabilan je  $K \in (K_0, K_{kr})$ . Vrijednost  $K_0$  se jednostavno određuje na osnovu GMK

$$(s-1)(s^2+5s+10)+K \equiv s(s^2+bs+c), \quad b, c > 0 \Rightarrow K_0 = 10$$

d) Na osnovu GMK i uslova zadatka se zaključuje da je dovoljno uvesti kompenzator sa proporcionalnim dejstvom  $G_c(s) = K_c$ . Tražena tačka  $s_1 = \lambda(-0,6 + j0,8)$  koja mora ležati na GMK i  $T_d = \frac{1}{0,6\lambda} < \frac{3}{2} \Rightarrow \lambda > 10/9$ . Kako je  $\arg\{W_1(s_1)\} = -180^\circ \Rightarrow \lambda = 1,16$  a sada iz uslova modula  $|K_c W_1(s_1)| = 1 \Rightarrow K_c = 13,5$  [15]

### Zadatak 5. 12

Posmatra se sistem sa negativnom povratnom spregom. Na slici 5.17 data je konfiguracija kritičnih učestanosti (polova **x** i nula **o**) funkcije povratnog prenosa  $W(s)/K$ ,  $K > 0$ .



Slika 5.17.

Odrediti: a) Funkciju povratnog prenosa  $W(s)$  i na osnovu nje skicirati geometrijsko mesto korenova za  $K > 0$ , a zatim odrediti karakteristične tačke i naznačiti ih na grafiku GMK; b) Isprojektovati kaskadni kompenzator minimalnog reda za  $K = 1$ , tako da sistem u zatvorenoj povratnoj sprezi ima par dominantnih polova određenih sa  $\zeta = 0,6$  i  $\omega_n = 5 \text{ sec}^{-1}$ . [15]

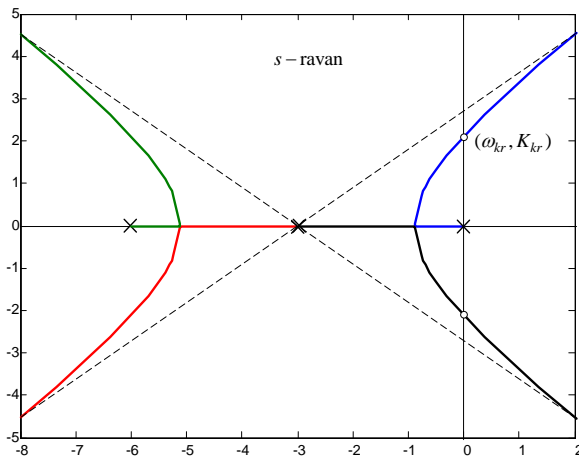
### Rešenje:

a) Na osnovu rasporeda kritičnih učestanosti formira se funkcija povratnog prenosa u obliku  $W(s) = \frac{K}{s(s+3)^2(s+6)}$ . Tražene karakteristične tačke su: tačke

odvajanja od realne ose  $\sigma_{01} = -3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$  i  $\sigma_{02} = -3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$ , zatim tačka presjeka

asimptota sa realnom osom i ogovarajući uglovi  $\begin{cases} \Theta_i = \frac{(2i+1)\pi}{4}, i = 0,1,2,3 \\ \sigma_a = -3 \end{cases}$ ,

kritično pojačanje  $K_{kr} = 729/4$  i kritična učestanost  $\omega_{kr} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{sec}^{-1}$  se dobija iz identiteta:  $s(s+3)^2(s+6) + K_{kr} \equiv (s^2 + \omega_{kr}^2)(s^2 + as + b)$



Slika 5.18 [15]

**b)** Kako je  $W_1(s) = \frac{1}{s(s+3)^2(s+6)}$  i  $s_1 = -3 + j4$  iz uslova zadatka imamo da je  $\phi = \arg\{W_1(s_1)\} = -360^\circ$ ,  $\lambda = -\phi - 180 = 180^\circ$ . Uvodimo dvostruki diferencijalni kompenzator  $G_d(s) = \left(\frac{1+s/a}{1+s/b}\right)^2$ , jer je  $\gamma = \frac{1}{2}(126,8^\circ - 180^\circ) = -26,6^\circ < 0$ . Ako usvojimo nulu diferencijalnog kompenzatora  $a = 1,5$ , tada iz uslova argumenta dobijamo pol diferencijalnog kompenzatora  $b$ , tj.

$$\arg\{W_1(s_1)G_d(s_1)\} = -180^\circ \Rightarrow b = 13,6.$$

Iz uslova modula sledi da moramo uvesti dodatno pojačanje  $K_0 = 34,22$ , tako da je traženi kompenzator:

$$G_c(s) = 34,22 \left( \frac{1+s/1,5}{1+s/13,6} \right)^2$$

### Zadatak 5.13

Za sistem čija je funkcija povratnog prenosa

$$W(s) = K \frac{1}{(s+2)^2(s^2+4s+8)}, \quad K > 0$$

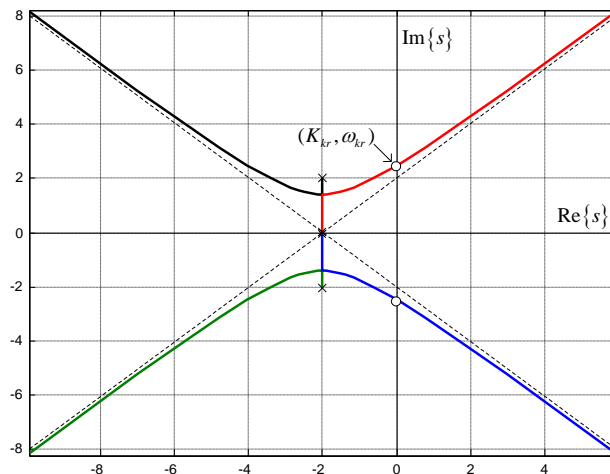
a) Skicirati geometrijsko mesto korenova i naznačiti karakteristične tačke. b) Na osnovu GMK odrediti sve vrednosti pojačanja  $K$  za koje je dominantna

vremenska konstanta sistema u zatvorenoj sprezi: b1)  $T_d = 0,5 \text{ sec}$  i b2)  $T_d > 0,5 \text{ sec}$ . [15]

**Rešenje:**

a) Kako je funkcija povratnog prenosa  $W(s) = K \frac{1}{(s+2)^2 (s^2 + 4s + 8)}$ ,  $K > 0$ , na osnovu koje određujemo polove sistema  $p_{1,2} = -2$  i  $p_{3,4} = -2 \pm j2$ , asimptote

$$\begin{cases} \Theta_i = \frac{i\pi}{4}, i=1,3,5,7 \\ \sigma_a = -2 \end{cases} \text{ i uz uvažavanje ostalih pravila za crtanje GMK imamo}$$



Slika 5.19.[15]

Tačke odvajanja  $\frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{W(s)} \right]_{s=\sigma_0} = 0 \Rightarrow \sigma_0 = -2$ . Iz ove relacije se dobijaju i tačke razdvajanja GMK ka asimptotama tj.  $s_{1,2} = -2 \pm j\sqrt{2}$ .

b) Na osnovu GMK se uočava da je  $T_d = 0,5 \text{ sec}$  za  $K \in (0, K_1]$ , gdje je  $K_1 = \frac{1}{|W(j, s_1)|} = 4$ , a za  $T_d > 0,5 \text{ sec}$  imamo  $K \in (K_1, K_{kr})$ , gdje je  $K_{kr} = 100$ .



## 7. LITERATURA

- [1] Anderson B., J. Moore, "*Optimal Control*". Prentice Hall, New Jersey, 1989.
- [2] Astrom K., B. Wittenmark, "*Computer Controlled Systems*". Prentice Hall, New Jersey, 1984.
- [3] B. Borozan, "*Sistemi automatskog upravljanja*", Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1995.
- [4] Bryson A. , Y. Ho, "*Applied Optimal Control*". Hemisphere Pub., Washington D.C., 1975.
- [5] Grujić , T. Lj. "*Zadaci sa rešenjima iz automatskog upravljanja*", Mašinski fakultet, Beograd, 1988.
- [6] Grujić, LJ., Lazić, D., "*Uvod u automatsko upravljanje* ", skripta, Mašinski fakultet, Beograd, 2007
- [7] Debeljković, Lj . D. "*Projektovanja linearnih sistema*", Mašinski fakultet, Milojković, R. B. Beograd, 1987.
- [8] Debeljković , Lj. D. "*Osnovi teorije identifikacije objekata i procesa*", Mašinski fakultet, Beograd, 1987.
- [9] Dikić, G., "*Osnove teorije automatskog upravljanja*", Visoka škola elektrotehnike i računarstva strukovnih studija, Beograd, 2011.
- [10] Elloy J. , J. Piasco, "*Classical and Modern Control with Worked Examples*". Pergamon Press, New York, 1981.
- [11] Franklin G. , J. Powelll, A. Emami-Naeini, "*Feedback Control of Dynamics .s:ystems*". Addison Wesley, Massachusetts, 1987.
- [12] Hsu J. , A. Mayer, "*Modern Control Principles and Applications*". Me Graw Hill New York, 1968.
- [13] Humo, E. "*Principi i elementi automatske regulacije* ", Svetlost, Sarajevo, 1987.
- [14] Humo, E. "*Uvod u teoriju automatskog upravljanja*", Univerzitet u Sarajevu, Sarajevo, 1975
- [15] Ispitni zadaci iz predmeta Sistema automatskog upravljanja Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu, 2006
- [16] Jacić LJ. , Nikolić G. Rančić M., Debeljković D., "*Osnovi automatskog upravljanja i regulisanja*" GIP "Kultura", Beograd, 1998
- [17] Jegeš Z., "*Sistemi automatskog upravljanja*" – Skripta – Izdavač Viša tehnička škola Subotica
- [18] Jegeš Z.,Maravić, S.,Vitasović, T., "*Zbirka zadataka iz sistema automatskog upravljanja*" – Skripta – Izdavač Viša tehnička škola Subotica, 2001
- [19] Jegeš, Z., Maravić S., Vitasović T., "*MATLAB, Uputstvo za laboratorijske vežbe*", Skripta – Izdavač Viša tehnička škola Subotica
- [20] Kailath T., "*Linear Systems*". Prentice Hall, New Jersey, 1980.
- [21] Kovačević B., Đurović Ž., "*Sistemi automatskog upravljanja, Zbornik rešenih zadataka*", ETF Beograd, 1997.

- [22] Kuljača, Lj. , Vukić, Z. "Automatsko upravljanje sistemima", Školska knjiga, Zagreb, 1985.
- [23] Melsa J. , S. Jones, "Computer Programs for Computational Assistance in the Study of Linear Control Theory". Me Graw Hill, New York, 1973.
- [24] Matlab, PC Users Guide.
- [25] Milinković S., Debeljković D., "Zbirka rešenih zadataka iz analize i sinteze sistema automatskog upravljanja", Beograd 1996
- [26] Milojković, R. B. Grujić, T. LJ., "Osnovi regulisanja", Mašinski fakultet, Beograd, 1972.
- [27] Milosavljević Č, "Teorija automatskog upravljanja – I", Univerzitet u Istočnom Sarajevu-Elektrotehnički fakultet, Istočno Sarajevo, 200
- [28] Netushil A. , "Theory o/Automatic Control". Mir Publisher, Moscow, 1978.
- [29] Phillips C., R. Harbor. "Feedback Control Systems". Prentice HalJ, New Jersey, 1988.
- [30] Prljača, N., Šehić, Z., "Automatsko upravljanje – Analiza i Dizajn", Mikroštampa Tuzla, 2008
- [31] Rakić M., "Teorija linearnih sistema automatskog upravljanja". Elektrotehnički fakultet, Beograd. 1972.
- [32] Rančić, M., Debeljković, D. Lj . "Uvod u analizu i sintezu sistema automatskog upravljanja", Viša tehnička škola, Zrenjanin, 1995.
- [33] Sage A.. C. White. "Optimum System Control". Prentice Hall, New Jersey, 1977.
- [34] Sekulić M., "Osnove teorije automatskog upravljanja-servomehanizmi", Naučna knjiga Beograd 1976
- [35] Seminarski radovi studenata Tehničkog fakulteta "Mihajlo Pupin" Zrenjanin
- [36] Simić D., "Osnovi automatskog upravljanja", Naučna knjiga Beograd, 1990.
- [37] Stengel R., "Stochastic Optimal Control". John Wiley. New York, 1986.
- [38] Stojadinović, S., "Zbirka zadataka iz automatskog upravljanje ", Fizički fakultet, Beograd, 2008
- [39] Stojić M .. "Kontinualni sistemi autmnatskog upravljanja". Naučna knjiga. Beograd, 1985.
- [40] Turajlić, R. S., Petrović, B. T. "Sistemi automatskog upravljanja - Zbirka Rešenih Zadataka", Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1985.
- [41] Šiljak D .. "Stabilnost sistema upravljanja". Elektrotehnički fakultet. Beograd. 1974.
- [42] Šupuk, T., "Frekvencijska analiza: polarni i Nyquistovi dijagrami", (vježba 6), "Frekvencijska analiza: Bodeovi dijagrami" (vježba 7), Fakultet elektrotehnike strojarstva i brodogradnje, Split
- [43] <http://ccd.uns.ac.rs/aus/sau/sau.htm>
- [44] <http://control.etfbl.net>
- [45] [elektron.tmf.bg.ac.rs/aup/OAUP/](http://elektron.tmf.bg.ac.rs/aup/OAUP/)