

Dr. Vladimir Šinik

# **AUTOMATSKO UPRAVLJANJE**

**UNIVERZITET U NOVOM SADU  
TEHNIČKI FAKULTET "MIHAJLO PUPIN"  
ZRENJANIN, 2017.**

ISBN: 978-86-7672-231-0

**dr Vladimir Šinik**

# **AUTOMATSKO UPRAVLJANJE**

**188**

**2017/2018**

**Biblioteka udžbenici**

**Univerzitet u Novom Sadu**

**Tehnički fakultet „Mihajlo Pupin“**

**Zrenjanin, 2018. god.**

dr Vladimir Šinik

## **AUTOMATSKO UPRAVLJANJE**

---

Izdavač: Univerzitet u Novom Sadu, Tehnički fakultet „Mihajlo Pupin” u Zrenjaninu

Recezeni: 1. Dr. Slobodan Janković, redovni profesor

Tehnički fakultet „Mihajlo Pupin“, Zrenjanin

2. Dr. Dalibor Dobrilović, vanredni profesor

Tehnički fakultet „Mihajlo Pupin“, Zrenjanin

Računarska obrada: Vujović Risto

Na sednici Naučno – nastavnog veća Tehničkog fakulteta „Mihajlo Pupin“ iz Zrenjanina, održanoj 15.11.2017., doneta je odluka da se udžbenik AUTOMATSKO UPRAVLJANJE štampa za potrebe studenata.

ISBN: 978-86-7672-231-0

CIP - Каталогизација у публикацији

Библиотека Матице српске, Нови Сад, 681.51(075.8)

ШИНИК, Владимир

Automatsko upravljanje [elektronski izvor] / Vladimir Šinik. - Zrenjanin : Tehnički fakultet "Mihajlo Pupin", 2018.-1 elektronski optički disk (CD-ROM); 12 cm.-(Biblioteka Udžbenici ; 188)

Nasl. s naslovnog ekrana - Bibliografija.

ISBN: 978-86-7672-231-0

a) Аутоматско управљање

COBISS.SR-ID [325368327](#)

## PREDGOVOR

Udžbenik Automatsko upravljanje namenjen je prvenstveno studentima Tehničkog fakulteta “Mihajlo Pupin” u Zrenjaninu. Predmet Automatsko upravljanje se sluša na sledećim smerovima: Industrijsko inženjerstvo, Mašinsko inženjerstvo, Informacione tehnologije-inženjerstvo, Inženjerstvo zaštite životne sredine, Industrijsko inženjerstvo u eksploataciji nafte i gasa i Informatikai tehnika u obrazovanju.

Udžbenik sadrži šest poglavlja.

U prvom poglavlju, koje ima uvodni karakter, definišu se osnovni pojmovi, daje kratak pregled istorijskog razvoja i klasifikacija SAU (Sistema automatskog upravljanja). Zatim je prikazana osnovna regulaciona kontura i njeni funkcionalni elementi.

U drugom poglavlju - Matematički modeli elemenata i sistema- definišu se načini dobijanja matematičkog modela sistema. Predstavljena je direktna i inverzna Laplasova transformacija kao i osnovne teoreme Laplasove transformacije. Predstavljene su modeli u vidu prenosne funkcije sistema, struktornog blok dijagrama sistema, grafa toka signala i modela sistema u prostoru stanja. Dade su elektromehaničke analogije sistema.

Treće poglavlje - Odzivi sistema u vremenskom i frekventnom domenu- je posvećeno nalaženju odziva sistema na osnovu funkcije prenosa. Dati su vremenski i frekventni odzivi osnovnih dinamičkih elemenata (proporcionalnog, aperiodskog, integralnog, diferencijalnog, oscilatornog i elementa čistog kašnjenja).

Četvrto poglavlje- Stabilnost linearnih SAU- je posvećeno izučavanju metoda za analizu stabilnosti sistema. Dati su kriterijumi za ocenu stabilnosti. Kao algebarski kriterijumi stabilnosti obrađeni su kriterijumi Hurvica, Rausa. Predstavljene su grafoanalitičkih kriterijuma stabilnosti (Mihajlov, Najkvistov i Bodeov). Dat je osvrt na analizu stabilnosti sistema i uvodi pretek faze i pretek pojačanja za ocenu stepena stabilnosti sistema.

Peto poglavlje - Ocena kvaliteta linearnih SAU -posvećeno je metodama za ocenu ponašanja sistema u ustaljenom stanju i u prelaznim režimima. Uvedene su konstante greške kao elementi za ocenu kvaliteta sistema u stacionarnim ustaljenim stanjima. Predstavljena je karakterizacija kontinualnih sistema u prelaznom vremenskom području kao i frekventno područje i karakteristični parametri. Data je metoda geometrijskog mesta

korena koja pruža mogućnost podešavanja parametara da sistem pri zatvorenoj povratnoj sprezi dobije željene dinamičke karakteristike. Dati su integralni kriterijumi kvaliteta sistema, osetljivost sistema, kontrolabilnost i opservabilnost sistema.

U šestom poglavlju - Sinteza linearnih SAU. Od metoda za sintezu sistema najpre je obrađena metoda sinteze u frekventnom domenu, preko Bodeovih dijagrama. Dat je analitički prilaz sinteze diferencijalnog i integralnog kompenzatora baziran na konvencionalnim grafoanalitičkim metodama. Predstavljena je sinteza kompenzatora pomoću metode geometrijskog mesta korena.

## SADRŽAJ

<b>1. UVOD .....</b>	<b>10</b>
1.1 Kratak istorijski osvrt sistema automatskog upravljanja (SAU) .....	10
1.2 Osnovni pojmovi teorije sistema i automatskog upravljanja .....	11
1.3 Sistem automatskog upravljanja (SAU), sistem automatske regulacije (SAR).....	12
1.4 Osnovni koncepti automatskog upravljanja .....	13
1.5 Klasifikacija SAU.....	16
1.6 Prosta analogna regulaciona kontura i uloga i značaj elemenata u SAU .....	17
<b>2. MATEMATIČKI MODELI ELEMENATA I SISTEMA.....</b>	<b>20</b>
2.1 Uvod .....	20
2.2 Laplasova transformacija .....	21
2.2.1 Definicija Laplasove transformacije .....	21
2.2.1 Laplasova transformacija osnovnih funkcija.....	22
2.2.2 Osnovne teoreme Laplasove transformacije .....	25
2.2.3 Inverzna Laplasova transformacija. ....	27
2.3 Prenosna funkcija sistema .....	31
2.4 Elektromehaničke analogije .....	33
2.5 Strukturni blok dijagrami sistema .....	37
2.5.1 Redna veza elemenata .....	38
2.5.2 Paralelna veza elemenata sistema.....	39
2.5.3 Povratna sprega .....	39
2.5.4 Redukcija složenih sistema .....	40
2.6 Graf toka signala. ....	42
2.6.1 Mejsonovo pravilo.....	44
2.7 Model sistema u prostoru stanja .....	44
<b>3. ODZIV ELEMENATA I SISTEMA.....</b>	<b>52</b>

3.1 Uvod.....	52
3.2. Vremenski odzivi jednostavnih - elementarnih sistema .....	54
3.2.1 Osnovni dinamički elementi .....	54
3.2.1.1 Proporcionalni element .....	54
3.2.1.1 Aperiodski element-sistem prvog reda .....	56
3.2.1.3 Kapacitivni element (integrator) .....	58
3.2.1.4 Oscilatorni element .....	59
3.2.1.5 Element sa mrtvim vremenom (element sa čistim kašnjenjem) .....	60
3.2.1.6 Diferencijalni element.....	62
3.3 Frekventne karakteristike i odzivi elemenata ili sistema .....	63
3.3.1 Logaritamska frekventna karakteristika.....	66
3.3.2. Frekventne karakteristike osnovnih dinamičkih elemenata .....	68
3.3.2.1 Proporcionalni element .....	68
3.3.2.2 Aperiodični elemenat .....	69
3.3.2.3 Oscilatorni element .....	70
3.3.2.4 Integralni element .....	72
3.3.2.5 Diferencijalni element.....	73
3.3.2.6 Element čistog kašnjanja.....	74
<b>4. STABILNOST SISTEMA .....</b>	<b>76</b>
4.1 Uvod.....	76
4.2. Definicija stabilnosti .....	78
4.2.1 Stabilnost i lokacija korenova karakteristične jednačine .....	81
4.3 Kriterijumi stabilnosti linearnih sistema automatskog upravljanja ....	82
Raus(Routh) .....	84
Hurvic(Hurwitz).....	84
Bode .....	84
4.3.1 Algebarski kriterijumi stabilnosti .....	84



Algebarski kriterijumi stabilnosti imaju opšti karakter i u tom smislu mogu se primenjivati kako za otvorene, tako i za zatvorene SAU. Za njihovu primenu dovoljno je poznavati matematički model sistema ili bar njegov karakteristični polinom. Baziraju se na izvođenju određenih algebarskih operacija nad koeficijentima karakterističnog polinoma po čemu su i dobili naziv. Svi oni navode se bez dokaza. ....	84
4.3.1.1 Hurvicov kriterijum stabilnosti .....	84
4.3.1.2 Rausov kriterijum stabilnosti.....	86
4.3.2 Frekventni kriterijumi stabilnosti .....	87
4.3.2.1 Mihajlov kriterijum stabilnosti.....	88
4.3.2.2 Najkvistov (Nyquist-ov) kriterijum stabilnosti .....	91
4.3.2.3 Bodeov kriterijum stabilnosti .....	96
4.3.3 Pretek faze i pretek pojačanja.....	97
<b>5. OCENA KVALITETA LINEARNIH SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA I KRITERIJUMI ZA SINTEZU .....</b>	<b>100</b>
5.1 Uvod .....	100
5.2. Osobine stacionarnog stanja.....	103
5.2.1 Jedinični odskočni signal na ulazu sistema (konstanta položajne greške) .....	105
5.2.2 Jedinični nagibni signal na ulazu sistema (konstanta brzinske greške) .....	106
5.2.3 Jedinični parabolični signal na ulazu sistema (konstanta greške .....	107
ubrzanja).....	107
5.3 Karakterizacija kontinualnih sistema u prelaznom režimu .....	108
5.3.1. Karakterizacija kontinualnih sistema u prelaznom vremenskom području.....	109
5.3.1.1 Zavisnost odziva sistema od rasporeda polova i nula funkcije prenosa.....	110

5.3.1.1.1 Odziv sistema kada funkcija prenosa ima samo jedan realan pol.....	111
5.3.1.1.2 Odziv sistema kada funkcija prenosa ima dva pola a nema konačnih nula .....	112
5.3.1.1.3 Odziv sistema kada funkcija prenosa ima dva pola i jednu konačnu nulu .....	119
5.3.1.1.4 Odziv sistema kada funkcija prenosa ima dva kompleksna i jedan realan pol a nema konačnih nula.....	120
5.3.3.1.1.5 Polovi i nule čiji se uticaj na prelazni proces može zanemariti.....	122
5.3.2. Frekventno područje i karakteristični parametri .....	123
5.3.2.1. Amplitudno-fazno-frekventna karakteristika (AFFK ) i ocena ponašanja sistema .....	124
5.3.2.1.1 Zavisnost koeficijenta prigušenja( $\xi$ ) i preteka faze( $\gamma_{pf}$ ) u sistemu drugog reda bez konačnih nula .....	124
5.3.2.1.2 Pokazatelj oscilatornosti i rezonantna frekvencija (relacije između tranzijentnog i frekventnog odziva sistema) ....	126
5.3.2.1.3 Propusni opseg $\omega_0$ . Relacija između brzine odziva sistema i njegovog frekventnog odziva.....	128
5.4 Metoda geometrijskog mesta korena ( GMK ) .....	129
5.4.1 Uvod i istorijat metode.....	129
5.4.2 Doprinosi metode GMK .....	129
5.4.3 Polazne osnove metode geometrijskog mesta korena.....	130
5.4.4 Pravila za konstrukcija geometrijskog mesta korena.....	132
5.5 Integralni kriterijumi kvaliteta sistema .....	136
5.6 Osetljivost sistema .....	140
5.7 Robustnost sistema.....	141
5.8 Invarijatnost sistema .....	142
5.9 Kontrolabilnost (upravljivost) i.....	142

Opservabilnost (osmotrivost) sistema .....	142
<b>6. SINTEZA LINEARNIH SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA.....</b>	<b>145</b>
6.1 Uvod .....	145
6.2 Izbor strukture i zakona upravljanja SAU .....	146
6.2.1 Zakoni upravljanja SAU.....	146
6.2.2 Vrste kompenzatora.....	151
6.3 Sinteza kompenzatora proste regulacione konture .....	153
6.3.1 Sinteza kompenzatora primenom Bodeove metode .....	154
6.3.1.1 Sinteza diferencijalnog kompenzatora primenom Bodeove metode .....	155
6.3.1.2 Sinteza integralnog kompenzatora primenom Bodeove metode .....	160
6.3.1.3 Sinteza diferencijalno-integralnog kompenzatora primenom Bodeove metode .....	163
<i>Slika.6.13 Frekventne karakteristike pre i nakon izvedbe sa diferencijalno-integralnim kompenzatora .....</i>	<b>164</b>
6.3.2 Sinteza kaskadnog kompenzatora pomoću metode.....	164
geometrijskog mesta korena ( GMK).....	164
6.3.2.1 Sinteza diferencijalnog kompenzatora. ....	166
6.3.2.2 Sinteza višestrukog diferencijalnog kompenzatora. ....	174
6.3.2.3 Sinteza inegralnog kompenzatora .....	175
6.3.2.4. Sinteza diferencijalno-inegralnog kompenzatora.....	177
<b>7. LITERATURA .....</b>	<b>178</b>

# 1. UVOD

## 1.1 Kratak istorijski osvrt sistema automatskog upravljanja (SAU)

Automatski uređaji su se koristili od davnina. Njih su konstruisali još stari Grci. U razvoju automatskih uređaja poseban značaj ima pronalazak automata s povratnom spregom. Povratna sprega postoji u prirodi. Teško je reći kada je čovek nju prvi put svesno, svrsishodno konstruisao.

Evo nekih bitnih imena, pronalazaka, metoda i godina u razvoju automatske regulacije:

- Drebelov (Drebbel) inkubator, (1624.)
- Higensov (Huygens) regulator sata sa klatnom, (1675.)
- Vatov (Watt) centrifugalni regulator, (1728.)
- Maksvelova (Maxwell) stabilizacija rada parne mašine, (1868.)
- Hurvicova (Hurwitz) algebarska metoda za ocenu stabilnosti sistema, (1895.)
- Rausova (Routh), algebarska metoda za ocenu stabilnosti sistema, (1877.)
- Ljapunova (Ljapunov) ocena stabilnosti nelinearnih sistema, (1892.)
- Blekov (Black) elektronski pojačavač s povratnom spregom, (1927.)
- Bušov (Bush) diferencijalni analizator, (1927.)
- Nikvistov (Nyquist), kriterijum stabilnosti pojačavača sa povratnom spregom, (1932.)
- Mihajlovljev (Mihailov) frekventni prilaz analizi stabilnosti SAR, (1938.)
- Vinerova (Wiener) teorija optimalne filtracije, (1942.)
- Bodeova (Bode) logaritamska amplitudno-frekventna karakteristika, (1946.)
- Teodorčikova (K.F. Teodorcik) metoda geometrijskog mesta korena analize SAR-a, (1948.)
- Ivensova (Evans) metoda geometrijskog mesta korena analize SAR-a, (1950.)

Razvoj SAU je usko povezan s razvojem računarske tehnike, koja je i ponikla u okviru automatike. Naime, počev od pomenutog diferencijalnog

analizatora iz 1927. god., u narednim decenijama, sve do 80-tih godina XX veka, značajnu ulogu u razvoju automatike odigrali su analogni računari, zasnovani na elektronskim operacionim pojačavačima i integratorima kao osnovnim elementima [27].

Digitalni računari na početku svog razvoja, 50-tih godina XX veka, su bili suviše glomazni i skupi, ali su igrali značajnu ulogu u razvoju nauke uopšte, a posebno automatike. Međutim, pojava i nagli razvoj mikroprocesora odigrali su neslućenu ulogu u razvoju svih proizvodnih snaga, a naročito automatike [27].

## **1.2 Osnovni pojmovi teorije sistema i automatskog upravljanja**

### **Sistem**

Pojam “SISTEM” je izveden iz grčke reči “to systema” što označava “celinu sastavljenu iz delova”. Upotrebljava se u mnogim oblastima, na primer s atributima: društveno-politički, pravni, ekonomski, biološki, ekološki, obrazovni, tehnički, tehnološki itd. Za nas je ovde od prvenstvene važnosti definicija sistema u tehničkom smislu. U literaturi postoji više definicija sistema. Na primer: organizovani fizički sistem predstavlja skup podsistema (elemenata, uređaja, organa, delova) međusobno povezanih u funkcionalnu celinu s ciljem da se ostvari određeni zadatak (kretanje, rad, proces) a na osnovu razmene materije i/ili energije i/ili informacija između podsistema u okviru sistema i između sistema i okoline [26]. Po svojoj prirodi sistem može da bude biološki (čovek, plantaža, ribnjak), ekonomski (banka, privredna organizacija, trgovinsko preduzeće), društveni (porodica, sportsko društvo), tehnički (rudarska, poljoprivredna, alatna mašina, avion, raketa, automobil, turbina) ili kombinovani [26]. Granice sistema su relativne, ali pri proučavanju nekog sistema one moraju da budu precizno definisane. Okolina deluje na sistem (na granice sistema), a sistem reaguje na dejstvo okoline.

Proizvodni sistem je sistem čiji je osnovni zadatak proizvodnja određenih oblika supstance, energije ili predmeta. U međusobnom odnosu sa okolinom sistem ima ulazne i izlazne veličine.

### **Proces**

Proces predstavlja tok, put i način promene supstance, energije ili informacija, dok proizvodni proces predstavlja proces u kome se materija i

energija pretvara iz jednog oblika u poluproizvode ili proizvode drugog oblika. Svaki proizvodni proces sastoji se iz dva dela:

- proizvodnog sistema i
- sistema za vođenje procesa, kojim se prati tok prerade i vrši usmeravanje procesa prema određenim zakonitostima i potrebama.

Automatski proces predstavlja proces u kojem neka mašina, uređaj ili proizvodni proces u potpunosti ne zahtevaju nikakvo učešće čoveka. Radi ostvarivanja automatskog procesa neophodno je vršiti mehanizaciju pojedinih ili svih procesa, odnosno vršiti zamenu ljudskog rada i pokreta radom mašina i mehaničkim pokretima.

### Signal

Zbog velikog broja različitih vrsta i raznolikosti prirode signala, teško je dati jednu opštu definiciju signala. Nekada se, u nekim od udžbenika može naći iskaz da je signal svaki vremenski promenljivi fizički fenomen ili pojava koja sa sobom nosi informaciju. Može se reći da pod signalima podrazumevamo sve ulaze i izlaze, kao i unutrašnje funkcije koje ovi sistemi obrađuju ili proizvode, kao što su napon, pritisak, pomeraj ili intenzitet. Uglavnom je nezavisna promenljiva ovih funkcija signala vreme, ali ne mora biti. Međutim, ono što svakako jeste zajedničko za sve ono što pod širokim pojmom signala podrazumevamo, je informacija.

### 1.3 Sistem automatskog upravljanja (SAU), sistem automatske regulacije (SAR)

Pojam regulacija (lat. *regulatio*) označava podešavanje, usklađivanje sa: propisima, zakonima, zadatim vrednostima. Pojam automatika (grčki: *automatikos=koji se kreće sam od sebe*) označava naučno-tehničku disciplinu koja proučava sisteme za regulisanje i upravljanje tehnološkim procesima[27].

Sistem automatske regulacije (SAR) je tehničko-tehnološki sistem, čiji je zadatak održavanje (stabilizacija) ili podešavanje (regulacija) izabranih veličina tehnološkog procesa bez učešća čoveka. Princip rada sistema automatskog upravljanja (SAU) i sistema automatske regulacije (SAR) se bitno ne razlikuju, pa se koristi ista teorija i isti osnovni pojmovi za analizu i jednog i drugog[27].

Treba, takođe, podvući razliku između *SAU* i *SAR*. Prvi pojam je širi. *SAU* u mnogim slučajevima sadrži (ali ne mora) jedan ili više *SAR*, pored sistema automatske kontrole (nadgledanja) procesa. *SAR* imaju jednu bitnu osobinu na osnovu koje funkcionišu: u njima je založen princip povratne sprege (*feedback*). Iako sistemi automatskog upravljanja mogu biti i bez povratne sprege, u literaturi i praksi se, obično, pod pojmom automatsko upravljanje podrazumeva sistem s povratnom spregom. Pojam automatika je širi od pojma automatsko upravljanje. Mnogi tehnološki procesi se uspešno upravljaju bez primene principa povratne sprege. Upravljački sistemi koji se tamo primenjuju su, najčešće, programabilni sekvencijalni automati koji po unapred zadatom redosledu, uz odgovarajuće provere logičkog tipa, sukcesivno (sekvencijalno) obavljaju komande. Ovakav oblik automatizacije tehnoloških procesa je veoma rasprostranjen, naročito s ekspanzijom mikroprocesora i mikroracunara, i uspešno se primenjuje u procesima gde spoljašnji uticaji na proces ne postoje ili nisu značajni [27]. U ovom kursu biće posvećena pažnja sistemima automatskog upravljanja i regulacije, dakle automatici zasnovanoj na principu delovanja s povratnom spregom.

### 1.4 Osnovni koncepti automatskog upravljanja

Sistem koji se sastoji iz objekta (O) i upravljačkog sistema (US) za taj objekt, koje povezuje upravljanje je sistem upravljanja. Objekat upravljanja predstavlja tehnološko postrojenje, njegov deo ili tehnički uređaj u kome treba da se održava nominalni režim rada. Objekat upravljanja zajedno sa uređajem za automatsko upravljanje čine jednu celinu, tj. sistem automatskog upravljanja (*SAU*) [6].

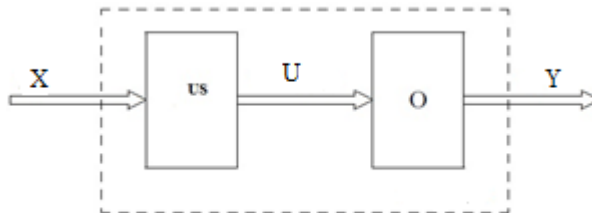
Način i skup informacija koje unutar upravljačkog sistema stvaraju odgovarajuću upravljačku veličinu odnosno odgovarajući zakon upravljanja, naziva se koncept upravljanja [25].

Prema načinu organizovanja upravljanja, odnosno prema načinu međusobnog delovanja elemenata, sistemi automatskog upravljanja se dele na:

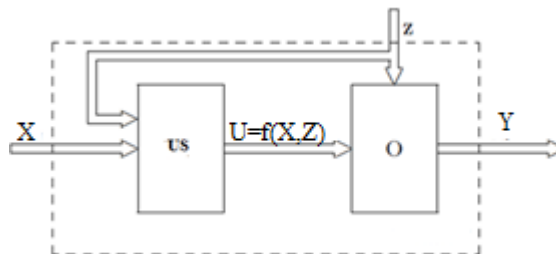
1. Otvorene sisteme automatskog upravljanja (*OSAU*),
2. Zatvorene sisteme automatskog upravljanja (*ZSAU*), koji se još nazivaju sistemi automatskog regulisanja (*SAR*),
3. Kombinovane sisteme automatskog upravljanja (*KSAU*).

U okviru otvorenih sistema automatskog upravljanja mogu da se izdvoje dve podgrupe u zavisnosti da li se kompenzuju ili ne dejstva poremećajnih veličina. Ta dva koncepta su:

1. Otvoreni sistemi automatskog upravljanja bez kompenzacije dejstva poremećaja
2. Otvoreni sistemi automatskog upravljanja sa direktnom kompenzacijom dejstva poremećaja



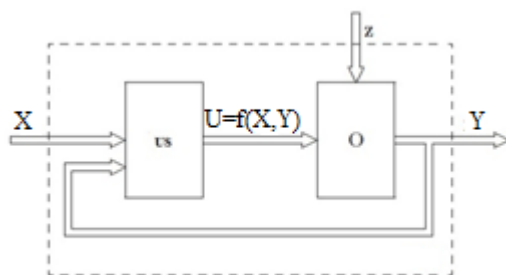
*Slika br.1.1 Otvoreni sistemi automatskog upravljanja bez kompenzacije dejstva poremećaja [6][16][25].*



*Slika br.1.2 Otvoreni sistemi automatskog upravljanja sa direktnom kompenzacijom dejstva poremećaja [6],[16],[25].*

Ako za formiranje pravilnog upravljanja objektom koristi samo informaciju o razlici između njegovog željenog ponašanja i njegovog stvarnog ponašanja, onda je sistem automatskog upravljanja tog objekta zatvoreni sistem automatskog upravljanja, tj. sistem automatskog regulisanja, slika 1.3.

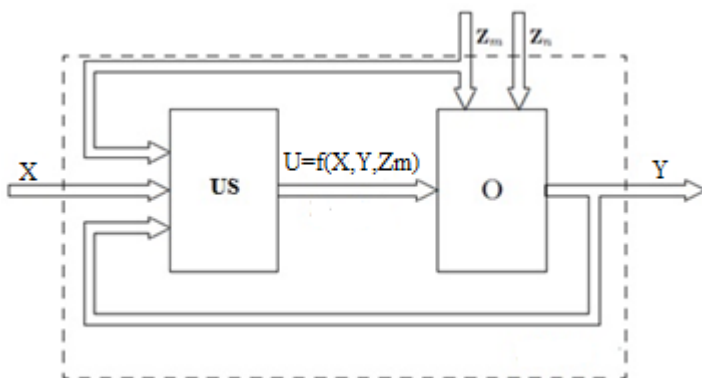




Slika br.1.3 Zatvorene sisteme automatskog upravljanja (ZSAU) [6]

U zatvorenom sistemu automatskog upravljanja se ostvaruje indirektna ili posredna kompenzacija dejstva poremećaja. Ona se postiže stvaranjem upravljanja na osnovu greške , koja predstavlja posledicu dejstva poremećaja  $Z$ , ili promene željene vrednosti .

Ako za formiranje pravilnog upravljanja objekta upravljački sistem koristi informacije i o željenom ponašanju objekta i o njegovom stvarnom ponašanju i o merenim poremećajima , onda je sistem automatskog upravljanja tog objekta kombinovani sistem automatskog upravljanja, slika 1.4 [6].



Slika br.1.4 Kombinovani sistem automatskog upravljanja (KSAU) [6].

Kombinovani sistemi automatskog upravljanja ostvaruju istovremeno i direktnu (merenih poremećaja ) i indirektnu (nemeranih poremećaja ) kompenzaciju dejstva poremećaja.

### 1.5 Klasifikacija SAU

SAU se mogu klasifikovati po različitim kriterijumima: principu delovanja, karakteru signala, matematičkom modelu, vrsti energije, itd. Prema obliku matematičkog modela možemo ih podeliti, najpre, na linearne i nelinearne. Prvi se opisuju linearnim, a drugi - nelinearnim diferencijalnim i/ili algebarskim jednačinama; na sisteme sa skoncentrisanim ili s raspodeljenim parametrima (prvi se opisuju običnim, a drugi - parcijalnim diferencijalnim jednačinama); na determinističke, kod kojih se parametri ne menjaju u vremenu i stohastičke, s vremenski promenljivim parametrima. Moguće su i kombinacije kao na primer: nelinearni stohastički sistemi s raspodeljenim parametrima [27].

Sistemi sa nagomilanim (koncentrisanim) parametrima su oni kod kojih se može smatrati da su sve procesne veličine uniformne u celoj zapremini sistema, ili u pojedinim delovima zapremine sistema i da se ne moraju posmatrati njihove promene po prostornim koordinatama, tako da je vreme jedina nezavisno promenljiva. Dinamički modeli ovakvih sistema se dobijaju u obliku jedne ili sistema običnih diferencijalnih jednačina. Tipični primeri ovakvih sistema su svi sudovi sa mešanjem (mešači, grejači sa mešanjem, reaktori sa mešanjem) [45].

Sistemi sa raspoređenim (distribuiranim) parametrima su oni kod kojih je neophodno uzeti u obzir i promene procesnih veličina po prostornim koordinatama, tako da se kao nezavisno promenljive javljaju vreme i jedna ili više prostornih koordinata. Dinamički modeli ovakvih sistema se prikazuju jednom ili sistemom parcijalnih diferencijalnih jednačina. Tipični primeri ovakvih sistema su uređaji sa klipnim ili približno klipnim strujanjem (razmenjivači toplote tipa cev u cevi ili omotač i cevi, cevni reaktor i slično), kao i uređaji sa pakovanim slojem (apsorpcione, rektifikacione i ekstrakcione kolone sa punjenjem, adsorpcione kolone, katalitički reaktori sa pakovanim slojem i slično) [45].

Prema karakteru signala svrstavamo ih u kontinualne i diskretne, uz moguću kombinaciju: kontinualno-diskretni. Diskretizacija se može izvesti po vremenu, po amplitudi ili kombinovano: po vremenu i amplitudi. U tom

slučaju govorimo: impulsnim, relejnim ili digitalnim sistemima upravljanja, respektivno. Tako, na primer, sistem može biti nelinearan (ili linearan), vremenski kontinualan (ili vremenski diskretan) [27].

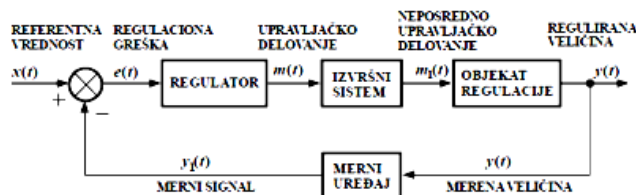
Po vrsti korišćene energije SAU se mogu podeliti na: električne, hidraulične, pneumatske i kombinovane (elektrihidrauličke, elektropneumatske itd.). U zavisnosti od broja regulisanih veličina sistemi se dele na: monovarijabilne i multivarijabilne [27]. Kod monovarijabilnih sistema se reguliše (upravlja) samo jedna veličina, dok kod multivarijabilnih - dve ili više veličina. Multivarijabilni sistemi mogu biti raspregnuti (svaki ulaz u sistem deluje samo na svoj izlaz) ili spregnuti (kada postoje unakrsne sprege tako da jedan ulaz ima uticaja na više izlaza ili na sve izlaze).

Isto tako optimalni sistemi zauzimaju istaknuto mesto u teoriji i praksi SAU, zatim robustni sistemi itd. Korišćenje računara, njegove mogućnosti logičkog zaključivanja i imitacije ljudskog intelekta, uslovalo je razvoj inteligentnih ili ekspertnih sistema, fuzzy sistema itd.

U ovom kursu analiziraće se deterministički, vremenski nepromenjeni linearni sistemi sa koncentrisanim (nagomilanim) parametrima i bez kašnjenja.

## 1.6 Prosta analogna regulaciona kontura i uloga i značaj elemenata u SAU

Svi elementi jednog regulacionog kruga mogu se predstaviti uz pomoć strukturne ili blok-šeme, sa naznačenim karakterističnim mestima i veličinama na ulazima i izlazima pojedinih delova, kao i sa njihovim smerovima delovanja. Sistem automatskog upravljalja, sastoji se od više posebnih međusobno povezanih elemenata automatike, koji čine funkcionalnu celinu. (slika 1.5).



Slika 1.5 Blok šema sistema automatskog upravljanja

Svaki elemenat se može posmatrati kao pretvarač energije, na čiji se ulaz dovodi jedna veličina a na izlazu dobija druga veličina koja karakteriše ponašanje elemenata [3].

Prema funkcijama elementi mogu biti: merni, upravljački, pojačavački i izvršni. Postoje i drugi elementi koji ulaze u sastav sistema i koji obavljaju značajne funkcije, kao što su elementi napajanja, signalizacije, modulatori i stabilizatori, kao i drugi elementi[3].

Sistem automatske regulacije kao na slici 1.5 održava željeno kretanje objekta regulacije, odnosno stabilizuje regulisanu veličinu  $y(t)$  u skladu sa zadanom (referentnom) vrednošću  $x(t)$ .

Merni uređaj (merni pretvarač) služi za pretvaranje jedne fizičke veličine u veličine druge fizičke prirode (najčešće električnu) koja je pogodnija za prenos na daljinu i obradu. Merni uređaj meri trenutnu vrednost regulisane veličine  $y(t)$ , a rezultat u formi mernog signala  $y_1(t)$  dolazi na diskriminator, gde se poredi sa referentnom vrednošću.

Diskriminator ili detektor signala greške je element sa dva ulaza i jednim izlazom. Na ulaz diskriminatora dovode se dva signala: signal proporcionalan stvarnoj (izmerenoj) vrednosti regulisane veličine  $y_1(t)$  i signal proporcionalan zadatoj (željenoj) vrednosti regulisane veličine  $x(t)$ . Poređenjem ta dva signala (na ulazu diskriminatora) obrazuje se njihova razlika (signal greške),  $e(t)=x(t)-y_1(t)$ . koja se dalje odvodi najčešće na pojačavač. S obzirom na način dobijanja signala greške, diskriminatori su dobili naziv komparatori ili upoređivači;

Upravljački sistem ili regulator služi za formiranje upravljačkog dejstva na objekat upravljanja. U zavisnosti od veličine greške, regulator na izlazu generiše manipulativni signal  $m(t)$ , koji deluje na objekat kako bi se ostvarila jednakost  $y(t)=x(t)$ . Pošto je izlazni signal  $m(t)$  iz regulatora male snage, potreban je izvršni sistem. Zahvaljujući velikom energetsom pojačanju, izvršni sistem na svom izlazu daje signal  $m_1(t)$  za neposrednu promenu toka energije ili materijala na objektu u smislu da  $e(t) \rightarrow 0$ .

Izvršni element, ostvaruje dejstvo regulatora na objekat upravljanja korišćenjem pomoćne energije.

U opštem slučaju izvršni elemenat se sastoji iz dva dela: pogonskog i izvršnog organa. Pogonski organ služi da primljenim signalom iz pojačavača deluje na izvršni organ u smeru korekcije odstupanja regulisane veličine. Izvršni organ, kao deo izvršnog elementa, pripada upravljačkom sistemu i smešten je u samom objektu upravljanja. On neposredno deluje na ulaznu veličinu objekta preko koje se menjaju mase i energija [3].

Objekat upravljalja predstavlja svaki uređaj, mašina ili proizvodno postrojenje kojim se upravlja. Na objekat deluje upravljačka veličina (kao jedan ulaz) i jedna ili više takođe ulaznih poremećajnih veličina.

## 2. MATEMATIČKI MODELI ELEMENATA I SISTEMA

### 2.1 Uvod

Sistem automatskog upravljanja (SAU) predstavlja aktivnu mrežu sačinjenu od aktivnih i pasivnih električnih kola; elektromehaničkih, mehaničkih, hidrauličnih, pneumatskih i drugih komponenata. Zbog toga pre nego što se pristupi analizi SAU potrebno je poznavati dinamičke karakteristike pojedinih njegovih delova [39]. Naučni prilaz u izučavanju osobina elemenata i sistema zasniva se na korišćenju matematičkih (apstraktnih) modela kojima se određuju kvantitativne i kvalitativne sprege elemenata i podsistema u dinamičkom sistemu. Matematički model je skup diferencijalnih i algebarskih jednačina koje s većim ili manjim stepenom aproksimacije opisuju ponašanje sistema.

Matematički modeli se dobijaju na osnovu sagledavanja i izučavanja fizičkih procesa koji se odvijaju u posmatranom elementu/sistemu, ili na osnovu eksperimentalnih podataka.

U opštem slučaju jednačine kojima opisujemo sisteme mogu biti u formi algebarske  $f(x, y) = 0$  i obične diferencijalne jednačine.

U slučaju običnih diferencijalnih jednačina postoje izvode po jednoj promenljivoj  $f(x^{(n)}, x^{(n-1)}, \dots, x(t), u(t)) = 0$ . Ovakve jednačine opisuju sisteme sa koncentrisanim parametrima. Varijable su funkcije vremena i nema prostornih koordinata [30].

Obične diferencijalne jednačine mogu biti linearne i nelinearne. Linearne diferencijalne jednačine se predstavljaju u formi:

$$\frac{d^{(n)}x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)}x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x(t) = u(t)$$

Linearne diferencijalne jednačine mogu biti sa konstantnim ili sa promjenljivim koeficijentima. Sistemi opisani linearnim diferencijalnim jednačinama sa konstantnim koeficijentima se nazivaju linearni vremenski invarijantni sistemi (tzv. LTI sistemi).

Sistemi sa distribuiranim parametrima se opisuju parcijalnim diferencijalnim jednačinama (parcijalne diferencijalne jednačine npr.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \text{ gde je } u = u(x, y, z, t) ..$$

Parametri su pored vremena ovisni i o prostornim koordinatama[30].

## 2.2 Laplasova transformacija

U ovom kursu bavićemo se, analizom ponašanja linearnih dinamičkih sistema sa koncentrisanim, vremenski nepromenljivim parametrima, koji se u najvišem delu, svodi na problem rešavanja odgovarajućeg sistema linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima. Rešavanje ovih jednačina se u mnogome pojednostavljuje primenom operacionog računa, posebno primenom Laplasove transformacije.

Direktna Laplasova transformacija omogućuje da se integro-diferencijalne jednačina sistema pretvore u algebarske jednačine dopuštajući u analizi razne vrste pobuda i omogućuje dobivanje potpunog odziva.

### 2.2.1 Definicija Laplasove transformacije

Pod *direktnom Laplasovom transformacijom* smatramo *operator* kojim se neka funkcija  $f(t)$ , definisana u vremenskom području, transformiše u funkciju  $F(s)$  kompleksne varijable  $s = \sigma + j\omega$  prema formuli:

A inverzna Laplasova transformacija se određuje po formuli

—

Za pojedine veličine i oznake u izrazima (2.1) i (2.2) uvode se sledeći termini:

$\mathcal{L}$ -operator Laplasove transformacije,

-operator inverzne Laplasove transformacije,

$s$  –kompleksna učestanost ili kompleksna promenljiva Laplasove transformacije

$F(s)$ -kompleksni lik funkcije

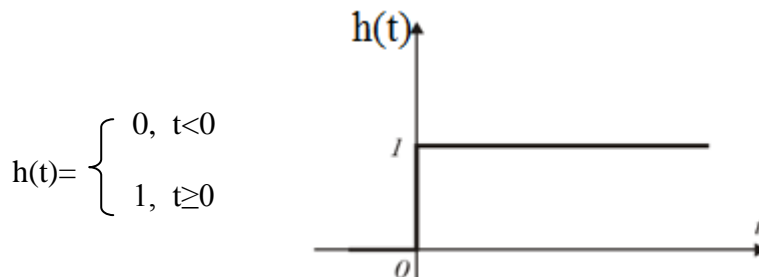
$f(t)$ -original funkcije  $F(s)$ .

Laplasova transformacija je definisana uz pretpostavku da integral (2.1) postoji. Jasno je da egzistencija ovog integrala zavisi od oblika funkcije  $f(t)$  i od vrednosti  $\text{Re } s = \sigma$ , odnosno od veličine faktora konvergencije. Prema tome, za datu funkciju  $f(t)$  kompleksni lik  $F(s)$  će biti definisan za tačno određenu oblast u ravni kompleksne promenljive Laplasove transformacije [39].

Ulazne promene koje deluju na sistem, u praksi obično nisu poznate, a često su i slučajne prirode. Da bi se dinamičko ponašanje realnih sistema moglo proučavati ili međusobno uporediti, bilo na njima samima ili korišćenjem njihovih odgovarajućih matematičkih modela, neophodno je uvesti identične uslove njihovog ispitivanja. U tom smislu uvedene su tipične ili standardne test funkcije, koji pobuđujući sistem na izlazu stvaraju odgovarajuće vremenske odzive. Iz tog razloga postupak nalaženja Laplasove transformacije ilustrovaćemo na nekoliko standardnih test funkcija.

### 2.2.1 Laplasova transformacija osnovnih funkcija

**Odskočna funkcija.** Ova funkcija je od posebnog interesa u analizi dinamičkih sistema. Jedinična odskočna funkcija,  $h(t)$  ima analitički zapis i grafički oblik



Slika 2.1 Jedinična odskočna funkciju



Najčešće korišćena test funkcija, jer poseban značaj ima odskočni odziv na jediničnu odskočnu funkciju, kojim se definiše prelazna karakteristika ispitanog elementa ili sistema.

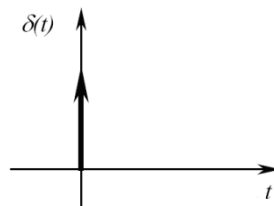
U praktičnoj primeni obično se koristi funkcija  $k \cdot h(t)$ , gde je  $k > 1$ .

Po definiciji je

–

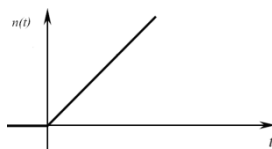
Prema tome, kompleksni lik funkcije  $kh(t)$  je  $k/s$  pod uslovom da je realni deo od  $s$  veći od nule, tj. Laplasova transformacija odskočne funkcije definisana je samo u desnoj poluravni ravni kompleksne promenljive  $s$  [39].

**Jedinična impulsna funkcija.** Jedinična impulsna funkcija je takođe funkcija od posebnog interesa za teoriju automatskog upravljanja. Razni autori definišu ovu funkciju na više načina [39]. U posebnom slučaju, kada impuls nastupa u koordinatnom početku ( $t_0=0$ ), (Sl. 2.2), i za taj slučaj je:



Slika 2.2 Impulsna funkcija

**Nagibna funkcija.** Grafik nagibne funkcije.  $n(t) = at$  dat je na slici 2.3. Kompleksni lik ove funkcije se može dobiti primenom parcijalne integracije.



Slika 2.3 Nagibna funkcija

**Prostoperiodične funkcije.** Kompleksni likovi prostoperiodičnih funkcija  $Ah(t) \sin at$  i  $Bh(t) \cos bt$  se lako određuju smenama

$$\frac{A}{2j} \left[ \frac{1}{s - ja} - \frac{1}{s + ja} \right] + \frac{B}{2} \left[ \frac{1}{s - jb} + \frac{1}{s + jb} \right]$$

Istim smenama se mogu odrediti kompleksni likovi prigušenih kvaziperiodičnih funkcija i odgovarajuće Laplasove transformacije će biti [39]:

$$\frac{A}{2} \left[ \frac{1}{s - \sigma - ja} - \frac{1}{s - \sigma + ja} \right] + \frac{B}{2} \left[ \frac{1}{s - \sigma - jb} + \frac{1}{s - \sigma + jb} \right] \quad (2.5b)$$

**Eksponecijalna funkcija.** Za eksponencijalnu funkciju  $e^{-st}$  (t) dobijamo:

$$\frac{1}{s}$$

U sledećoj tabeli su date Laplasove transformacije često upotrebljvanih funkcija

Tabela 1.1[30]

Original	Laplasova slika
Dirakov impuls: $\delta(t)$ $\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$	1
Step funkcija: $h(t)$ $h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}$

$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$te^{-at} \cos \omega t$	$\frac{(s+a)^2 - \omega^2}{((s+a)^2 + \omega^2)}$

### 2.2.2 Osnovne teoreme Laplasove transformacije

#### **Teorema linearnosti.**

Ova teorema se neposredno dobija primenom definicionog integrala Laplasove transformacije. Ona ukazuje na osobine homogenosti i aditivnosti Laplasovog operatora  $\mathcal{L}$ , tj. izražava se kao

gde su  $a$  - konstanta,  $a_1$  (s) i  $F_2$  (s) — kompleksni likovi funkcija  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$ , respektivno [39].

### Čisto vremensko kašnjenje.

### Pomeranje kompleksnog lika.

Osobina Laplasove transformacije, pogodno se koristi za nalaženje kompleksnih likova funkcija koje sadrže eksponencijalni faktor

### Teorema o izvodu originala.

—

Kompleksni lik n-tog izvoda originala je:

—

### Teorema o integralu originala.

Kompleksni lik integrala funkcije se može neposredno dobiti parcijalnom integracijom definicionog integrala Laplasove transformacije, i na kraju se dobije:

—

Sukcesivnom primenom parcijalne integracije pokazuje se da je

—

### Prva granična teorema

### Druga granična teorema

### 2.2.3 Inverzna Laplasova transformacija.

Postupak nalaženja inverzne Laplasove transformacije, koji ćemo ovde pokazati, odnosi se uglavnom na slučajeve kompleksnih likova datih u vidu realnih racionalnih funkcija kompleksne promenljive  $s$ , tj. datih odnosom dva polinoma po  $s$  sa realnim koeficijentima, odnosno [39]:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

Pored toga, ograničićemo se na slučajeve kada je stepen polinoma u imeniocu veći ili jednak stepenu polinoma u brojiocu ( $n \geq m$ ). Napomenimo da je ovo najčešći slučaj kompleksnih likova, koji se sreću u analizi i sintezi kontinualnih stacionarnih linearnih sistema sa koncentrisanim parametrima. Nule polinoma  $Q(s)$  i  $P(s)$  nazivaju se respektivno polovi i nule realne racionalne funkcije  $F(s)$ . Pošto su ovi polinomi sa realnim koeficijentima, njihove nule, odnosno polovi i nule kompleksnog lika  $F(s)$ , se mogu javljati ili kao realne, ili u konjugovano kompleksnim parovima, a mogu biti proste i/ili višestruke [39].

Za nalaženje inverzne Laplasove transformacije od posebnog interesa su polovi funkcije  $F(s)$ , tj. nule polinoma  $Q(s)$ , odnosno koreni jednačine

#### 1. Slučaj: kada sa svi polovi realni i prosti.

Ako su svi koreni  $s_1, s_2, \dots, s_n$  jednačine  $Q(s) = 0$  realni i prosti, kompleksni lik (2.16) se može napisati u faktorizovanom obliku

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s - s_1)(s - s_2)\dots(s - s_n)}$$

koji razvijamo u parcijalne razlomke

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \dots + \frac{A_n}{s - s_n}$$

gde su  $A_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) koeficijenti koje treba odrediti [16],[39].

Množeći levu i desnu stranu poslednjeg izraza sa  $(s - p_k)$  i zatim u tako dobijen izraz (stavljajući  $s = p_k$ ), na osnovu (2.19) dobija se relacija

$$\text{---}$$

kojom su određeni svi koeficijenti  $K_k$ . Ovaj postupak postaje u primeni očigledno trivijalan kada je  $Q(s)$  dato u faktorizovanom obliku, kao u (2.18) [u tom slučaju  $(s - p_k)$  u (2.20) se skraćuje sa odgovarajućim faktorom u imeniocu izraza  $P(s)/Q(s)$ ]. Međutim, ovi koeficijenti se mogu odrediti i kad  $Q(s)$  nije faktorizovano. Naime, formula (2.20) se može napisati kao:

$$\text{---}$$

Kada  $s = p_k$ , poslednji izraz postaje neodređen (0/0) jer  $Q(s)$  sadrži faktor  $(s - p_k)$ . Zbog toga treba primeniti pravilo Lopitala, posle čega se dobija

$$\text{---}$$

Zamenom dobijenih vrednosti za koeficijente  $K_k$ , izraz (2.19) postaje

$$\text{---}$$

Za nalaženje inverzne Laplasove transformacije na osnovu (2.23), uočava se da svi članovi na desnoj strani poslednjeg izraza predstavljaju kompleksne likove eksponencijalnih funkcija [vidi (2.6)]. Na osnovu (2.6) i osobine aditivnosti Laplasovog operatora neposredno se dobija [39],[16]

$$\text{---}$$

Pokazani postupak nalaženja inverzne Laplasove transformacije poznat je kao Hevisajdov razvitak [39].

## 2. Slučaj: kada postoje konjugovano kompleksni polovi.

Za ilustraciju nalaženja originala  $f(t)$  kada postoje parovi konjugovano kompleksnih polova lika  $F(s)$ , pretpostavićemo da jednačina  $Q(s) = 0$  ima

samo jedan par konjugovano kompleksnih polova ( $=$  ), a da su ostali koreni,  $\dots$ , realni i prosti [39],[16],[34]. Tada je

$$\frac{1}{s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \omega^2} = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \dots$$

Usvojimo da je  $s_1 = -\alpha + j\omega$  ili  $p_1 = -\alpha + j\omega$ . Može se lako pokazati da će i ostaci u konjugovano kompleksnim polovima biti takođe konjugovano kompleksni, tj. ako je, na primer,  $K_1 = a + jb$ , tada je  $K_2 = a - jb$ . Prema tome,  $F(s)$  postaje

$$\frac{1}{s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \omega^2} = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \dots$$

Koeficijenti  $K_k$  ( $k=3, 4, \dots, n$ ) su određeni relacijom (2.22). Ista relacija se može koristiti i za sračunavanje koeficijenta  $K_1$ , koji će u opštem slučaju biti kompleksan broj. Naime,

$$\frac{1}{s - p_1} = \frac{K_1}{s - p_1} + \dots \quad (2.27)$$

gde su, kao što se vidi,  $a = \text{Re } K_1$  i  $b = \text{Im } K_1$ . Prema izrazima (2.22), (2.24) i (2.26) dobijamo

$$\frac{1}{s - p_1} = \frac{K_1}{s - p_1} + \dots$$

Zatim, na osnovu (2,5b),  $f(t)$  postaje

$$\frac{1}{s - p_1}$$

Pomoću poznatog trigonometrijskog identiteta, prethodni izraz se može napisati u obliku

gde je  $\psi = \arctg(b/a)$ .

**3. Slučaj: kad postoje višestruki polovi.**

Ilustrovaćemo ovaj slučaj na primeru kada  $F(s)$  ima trostruki pol  $s=s_1$ . Ostali polovi  $s_2, s_3, \dots, s_n$  su svi realni i prosti [39]. Tada se izraz za  $F(s)$  može razviti u parcijalne razlomke, kao

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_1}{(s-s_1)^3} + \frac{K_2}{(s-s_1)^2} + \frac{K_3}{s-s_1} + \frac{K_4}{s-s_2} + \dots + \frac{K_n}{s-s_n}$$

Da odredimo koeficijente  $K_{11}, K_{12}$  i  $K_{13}$ , pomnožimo levu i desnu stranu ovog izraza sa  $(s-s_1)^3$ , posle čega dobijamo

$$N(s) = K_{11} + K_{12}(s-s_1) + K_{13}(s-s_1)^2 + (s-s_1)^3 \left[ \frac{K_4}{s-s_2} + \dots + \frac{K_n}{s-s_n} \right]$$

Stavljajući  $s = s_1$  u (2.32), imamo

$$K_{11} = N(s_1)$$

Za određivanje  $K_{12}$  prethodno treba diferencirati (2.32) po  $s$  pa zatim uvrstiti u tako dobijen izraz  $s = s_1$ . Tako se dobija da je

$$K_{12} = \left. \frac{dN(s)}{ds} \right|_{s=s_1}$$

Na sličan način, zamenom  $s = s_1$  u izraz dobijen posle dvostrukog diferenciranja (2.32) po  $s$ , izračunava se



Istim rezonovanjem se može dobiti opšti izraz za koeficijente  $K_{rm}$  ( $m=1, 2, \dots, p$ ) uz višestruki pol  $s=s_r$ , višestrukosti  $p$

Pošto smo odredili koeficijente  $K_{11}$ ,  $K_{12}$  i  $K_{13}$ ,  $f(t)$  postaje [39],[16]

što se, pomoću teoreme o izvodu kompleksnog lika, može napisati kao

### 2.3 Prenosna funkcija sistema

Za slučaj linearnih stacionarnih sistema sa koncentrisanim parametrima jedna od metoda modela sistema jeste u vidu prenosne funkcije koja se neposredno može definisati u vidu sistema integro-diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima. Za početku usvojicemo da je posmatrani sistem *kauzalan*, tj. da se radi o sistemu kod koga su u odsustvu početnih uslova svi izlazni signali identički jednaki nuli pre trenutka pobude ulaznih signalima [39]. Suštinska osobina kauzalnog sistema je da se na osnovu poznavanja stanja sistema u trenutku  $t_1 = t_2$  može odrediti stanje sistema u bilo kom trenutku  $t > t_1$ .

Prenosna funkcija linearnog stacionarnog sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom (tzv. SISO – Single Input Single Output) se definiše kao odnos Laplasovih funkcija izlaza i ulaza sistema sa nultim početnim uslovima [30].

Linearni vremensko invarijantni sistem je opisan sledećom diferencijalnom jednačinom:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_0 u(t)$$

Primenom Laplasove transformacije na prethodnu jednačinu uz nulte početne uslove dobija se sledeće:

$$Y(s)(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0) = U(s)(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0)$$

Odavde sledi:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$

Odnos  $\frac{Y(s)}{U(s)}$  se obeležava sa  $G(s)$ ,  $[W(s)]$  i naziva prenosna funkcija sistema

[30].

Ako je poznata prenosna funkcija sistema i Laplasova transformacija ulaza tada se Laplasova transformacija izlaza može dobiti na sledeći način:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Prenosna funkcija je racionalna funkcija promjenljive  $s$  i daje se u vidu količnika dva polinoma:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Polinom  $Q(s)$  se naziva karakteristični polinom sistema, a jednačina  $Q(s) = 0$  se naziva karakteristična jednačina sistema. Koreni karakteristične jednačine se nazivaju polovi sistema.

Koreni jednačine  $P(s) = 0$  se nazivaju nule sistema.

Prenosna funkcija  $G(s)$  se često piše i u tzv. pol-nula formi:

$$G(s) = K \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_n)}{(s - s_1) \cdots (s - s_n)}$$

Prenosna funkcija sistema nosi kompletnu informaciju o sistemu, odnosno o njegovom impulsnom odzivu. To znači da ako se sistem pobudi ulaznim Dirakovim impulsom tada vredi:

$$Y(s) = G(s)$$

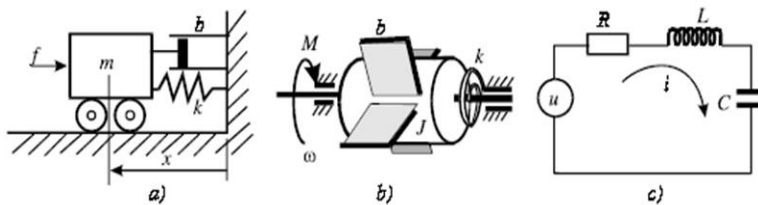
jer je Laplasova transformacija Dirakovog impulsa 1. Ako se u ovom slučaju potraži inverzna Laplasova transformacija dobija se:

$$\{Y(s)\} = \{G(s)\}$$

i naziva se impulsni odziv sistema.

## 2.4 Elektromehaničke analogije

Analogije se zasnivaju na istom obliku matematičkih modela mehaničkih i električnih linearnih sistema. U cilju definisanja tih analogija posmatraćemo tri dinamička sistema koji su prikazani na sl. 2.4. a) mehanički sa translacionim kretanjem, b) mehanički sa rotacionim kretanjem i c) električni [27],[39].



Slika 2.4. Tri različita dinamička sistema: a) mehanički translacioni, b) mehanički rotacioni, c) električni[27]

Pokretačkoj sili  $f(t)$  za slučaj mehaničkog translatorskog sistema (slika.2.4 a), drži ravnotežu

sila inercije

$$f_i(t) = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad (2.39)$$

sila viskoznog trenja

$$f_t(t) = b \frac{dx}{dt} \quad (2.40)$$

i sila elastičnosti opruge

$$f_e(t) = kx(t) \quad (2.41)$$

gde su :

$m$  -masa,

$b$ - koeficijent viskoznog trenja i

$k$ - koeficijent elastičnosti opruge.

Stoga je kretanje sistema određeno diferencijalnom jednačinom

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = f(t) \quad (2.42)$$

koja, po Njutnovom zakonu, izražava zakon ravnoteže sila akcije i reakcije. Ako se umesto  $x(t)$  kao promenljiva uvede  $v(t) = dx(t)/dt$ , jednačina 2.42 postaje

$$m \frac{dx}{dt} + bx + k \int_{-\infty}^t x dt = f(t) \quad (2.43)$$

Na Sl.2.4 b je prikazan sistem sposoban da vrši obrtno kretanje u oba smera. Zamajac momenta inercije  $J$  pričvršćen je na osovinu, čija je torziona elastičnost  $k$ . Obrtnje je izloženo viskoznom trenju, koeficijenta  $b$ , proporcionalnom uglovnoj brzini  $d\theta/dt$ . Kretanje zamajca pod dejstvom momenta  $M(t)$  određeno je diferencijalnom jednačinom[27]

$$J \frac{d\theta}{dt} + b\theta + k \int_{-\infty}^t \theta dt = M(t) \quad (2.44)$$

Jednačine dinamičke ravnoteže električnog linearnog kola na Sl.2.4.c se dobija na osnovu Kirhofovog zakona i opisuje se diferencijalnom jednačinom

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt = u(t) \quad (2.45)$$

Poređenjem jednačina 2.43, 2.44 i 2.45 neposredno uviđamo da integro-diferencijalne jednačine istog oblika određuju dinamičko ponašanje sve tri navedene pojave, samo što promenljive, parametri i funkcije, koje se u

njima pojavljuju, imaju različita fizička značenja, pa prema tome i dimenzije.

Uočava se identičnost oblika jednačine kojima se opisuje dinamika tri različita sistema, a na osnovu kojih se izvode elektromehaničke analogije: sila, kod translacionog mehaničkog sistema, moment (spreg), kod rotacionog mehaničkog sistema, i napon, kod električnog sistema, su analogne veličine; brzine (translaciona ili ugaona) i struja su analogne veličine; koeficijent trenja i otpornost su analogne veličine, a recipročna vrednost koeficijenta krutosti (tj. koeficijent elastičnosti) opruge je analogna veličina kapacitivnosti kod električnih kola [27]. U tabeli 2.2 su sistematizovane ove analogije sva tri sistema.

Pored analogije parametara i promenljivih, moguće je uvođenje analogija i između nekih integralnih pokazatelja, kao što su impedanse, frekventne karakteristike i sl. Primenjujući Laplasovu transformaciju na sve tri dinamičke jednačine dobija se:

$$(ms + b + \frac{k}{s})V(s) = F(s),$$

$$(Js + b + \frac{k}{s})\Omega(s) = M(s),$$

$$(Ls + R + \frac{1}{sC})I(s) = U(s).$$

Može se uvesti Omov zakon i za mehaničke sisteme, odnosno definisati impedanse mehaničkih sistema:

$$Z'_m(s) = sm + b + \frac{k}{s}, \tag{2.46}$$

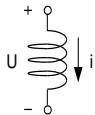
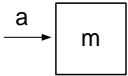
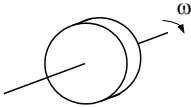
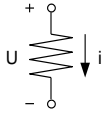
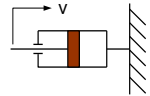
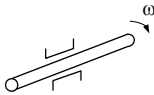



za mehanički translacioni sistem, odnosno

$$Z'_m(s) = sJ + b + \frac{k}{s}, \tag{2.47}$$

za mehanički rotacioni sistem

Na osnovu sličnosti ovih jednačina moguće je formirati tablicu analogija fizičkih pojava Tabela 2.2

Elektromehaničke analogije, Tabela 2.2[27]

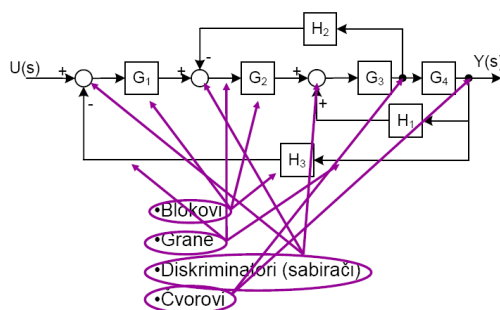
Električni Sistemi	Mehanički sistemi	
	Translacioni	Rotacioni
napon [V], $u(t) \rightarrow U(s)$ struja [A], $i(t) \rightarrow I(s)$	sila [N], $f(t) \rightarrow F(s)$ brzina [m/s], $v(t) \rightarrow V(s)$ $v(t) = dx(t) / dt$ $x(t)$ - pomeraj centar mase [m].	moment [Nm], $M(t) \rightarrow M(s)$ ugaona brzina [ $s^{-1}$ ], $\omega(t) \rightarrow \Omega(s); \omega = d\theta(t) / dt$ $\theta(t)$ -ugaoni pomeraj tela, u radijanima
induktivnost [H], $L$ , $u(t) = L di(t) / dt$ $U(s) = LsI(s)$	masa [kg], $m$ , $f(t) = mdv / dt = md^2 x(t) / dt^2$ $F(s) = msV(s) = ms^2 X(s)$	moment inercije [ $kgm^2$ ], $J$ , $M(t) = Jd\omega(t) / dt = Jd^2\theta(t)$ $M(s) = Js\Omega(s) = Js\Theta^2(s)$
		
otpornost [ $\Omega$ ], $R$ , $u(t) = Ri(t)$ $U(s) = RI(s)$	koeficijent viskoznog trenja [Ns/m], $b$ , $f(t) = bv(t) = bdx(t) / dt$ $F(s) = bV(s) = bsX(s)$	koeficijent viskoznog trenja [Nms/rad], $b$ , $M(t) = b\omega(t) = bd\omega(t) / dt$ $M(s) = b\Omega(s) = bs\Theta(s)$
		
kapacitivnost [F], $c$ , $u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$ $U(s) = \frac{1}{sC} I(s)$	koeficijent krutosti [N/m], $k$ , $f(t) = k \int_0^t v(t) dt = kx(t)$ $F(s) = \frac{k}{s} V(s) = kX(s)$	koeficijent torzione krutosti [Nm/rad], $k$ , $m(t) = k \int_0^t \omega(t) dt = k\theta(t)$ $M(s) = \frac{k}{s} \Omega(s) = k\Theta(s)$
		

## 2.5 Strukturni blok dijagrami sistema

Dinamički modeli složenih sistema, uključujući i sisteme automatskog upravljanja, se vrlo često prikazuju grafički. Jedan od najčešće korišćenih načina grafičkog prikazivanja dinamike sistema su blok dijagrami. Blok dijagram predstavlja grafički ekvivalent dinamičkog matematičkog modela sistema.

### Osnovni elementi blok dijagrama

Osnovni grafički elementi od kojih su sastavljeni blok dijagrami linearnih sistema dati su na slici 2.5.



Slika 2.5. Osnovni elementi blok dijagrama[43]

Kao što se vidi sa slike osnovni elementi modela sistema prikazan u vidu blok dijagrama se sastoji od blokova, grana, sabirača i čvorova.

Tokovi signala predstavljaju ulazne i izlazne promenljive u sistemu, dok su blokovima predstavljeni pojedini delovi sistema i njihovi dinamički modeli. Pri tome se dinamički model upisuje unutar bloka kojim je prikazan dati element sistema. Po pravilu se ovi dinamički modeli prikazuju u Laplasovom domenu, u obliku prenosnih funkcija koje povezuju ulaznu promenljivu prikazanu ulaznim signalom i izlaznu promenljivu prikazanu izlaznim signalom. Izlazni signal iz bloka se dobija kao proizvod prenosne funkcije upisane u blok i ulaznog signala.

Za rad sa blok dijagramima važe sledeća osnovna pravila:

1. u jedan blok može da uđe samo jedan signal i da iz njega izađe samo jedan signal
2. u jedan krug mogu da uđu samo dva signala, a da iz njega izađe samo jedan signal

3. mogu se sabirati, odnosno oduzimati, samo signali iste vrste, odnosno signali koji predstavljaju istu fizičku veličinu (temperatura se sabira sa temperaturom, protok sa protokom, pritisak sa pritiskom itd.)

4. signal ne menja vrednost prilikom grananja.

### 2.5.1 Redna veza elemenata

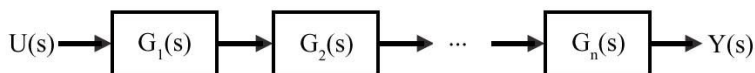
Pravila algebre funkcija prenosa su relativno prosta i jasna sama po sebi, tako da ih pojedinačno nije potrebno dokazivati. Posmatra se redna veza elemenata prenosnih funkcija, koje formiraju direktno kolo na slici 2.6. Pri rednoj vezi elemenata, izlazna veličina prethodnog elementa predstavlja ulaznu veličinu sledećeg. Prema definiciji funkcije prenosa dobijamo[39]

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



Slika 2.6 Strukturni blok dijagram kaskadno vezanih elemenata[30]

Množenjem levih i desnih strana jednačina (2.49) dobija se

$$(2.50)$$

\_\_\_\_\_

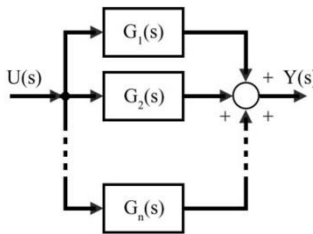


Prema tome, ako u nekom sistemu postoji više komponenti vezanih na red, tako formirano direktno kolo se može zameniti jednim blokom sa funkcijom prenosa koja je jednaka proizvodu funkcija prenosa svih komponenti u kolu.

### 2.5.2 Paralelna veza elemenata sistema

Kod paralelnog vezivanja dinamičkih elemenata ulazni signal je isti za sve elemente, a izlazni signali pojedinih elemenata algebarski se sabira. U opštem slučaju važi: prenosna funkcija sistema paralelno vezanih elemenata jednak je zbiru prenosnih funkcija povezanih elemenata. Evidentno je, isto tako, da se ceo strukturni dijagram, koji ima oblik kao na slici 2.7 (više komponenti vezanih paralelno), može zameniti jednim blokom, funkcije prenosa

$$\text{—} \quad (2.51)$$

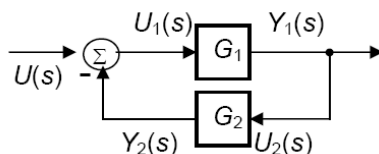


Slika 2.7. Strukturni blok dijagram paralelno vezanih elemenata[30]

### 2.5.3 Povratna sprega

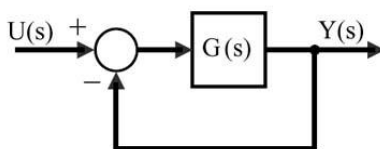
Kada izlazna veličina deluje na ulaznu veličinu preko povratne sprege, kao na slici 2.8 u pitanju je zatvoreno kolo ili zatvoreni sistem automatskog upravljanja, koji se u literaturi naziva kanonski oblik zatvorenog sistema upravljanja. Na slici  $G_1$  predstavlja prenosnu funkciju direktne grane,  $G_2$  predstavlja prenosnu funkciju povratne grane, dok njihov proizvod predstavlja prenosnu funkciju otvorenog kola. Znak  $\pm$  odnosi se na pozitivnu ili negativnu povratnu spregu. Kada je povratna sprega pozitivna, ulaz u element direktne grane predstavlja zbir ulazne veličine sistema  $U(s)$  i veličine povratne sprege  $Y_2(s)$ , a kada povratna sprega negativna, ulaz u

element direktne grane predstavlja razliku navedenih veličina ( $U(s) - Y_2(s)$ ). Kod sistema automatskog upravljanja obično se koristi negativna povratna sprega kojom se obezbeđuje stabilnost rada sistema o kojem će biti reč u četvrtom poglavlju.



Slika 2.8. Struktura sa negativnom povratnom vezom

Sistemi kod kojih se izlazna veličina dovodi direktno na ulaz sistema naziva se sistem sa jediničnom povratnom spregom. Struktura sa jediničnom povratnom spregom, data je na slici 2.9



Slika 2.9 Struktura sa jediničnom povratnom spregom

Prenosna funkcija ovog sistema se može odrediti prema sledećem izrazu:

$$G_e(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

Ako su u povratnoj grani nalazi prenosna funkcija  $G_2(s)$  kao na slici 2.8 onda se ekvivalentna prenosna funkcija računa prema sledećem izrazu:

$$G_e(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

#### 2.5.4 Redukcija složenih sistema

Pri formiranju modela nekog praktičnog sistema najčešće se dobija relativno složen strukturni dijagram, koji sadrži više lokalnih povratnih sprega i veći broj ulaznih signala. Koristeći se principom superpozicije i algebrom

funkcija prenosa, ma kako složen strukturni blok dijagram sistema se može svesti na jednu od osnovnih struktura, od posebno interesa za određivanje odgovarajućih funkcija, koje dalje služe kao polazna osnova za analizu i sintezu sistema. Pod algebrom funkcija prenosa se podrazumeva skup pravila koji omogućavaju pomenuto svođenje.

Pravilo	Prvobitni dijagram	Ekvivalentni dijagram	Jednačina
a) kombinovanje serijski vezanih elemenata			$M_2 = G_2 G_1 M_1$
b) svodjenje povratnog kola			$M_2 = \frac{G}{1 \pm GH} M_1$
c) svodjenje direktnog kola			$M_2 = (G_1 \pm G_2) M_1$
d) premeštanje bloka iz povratnog kola			$M_2 = \frac{G}{1 \pm GH} M_1$
e) premeštanje bloka iz direktnog kola			$M_2 = (G_1 \pm G_2) M_1$
f) pomeranje povratne sprege ispred bloka			$M_2 = G M_1$
g) pomeranje povratne sprege iza bloka			$M_2 = G M_1$
h) pomeranje diskriminatora ispred bloka			$M_2 = G M_1 \pm M_3$
i) pomeranje diskriminatora iza bloka			$M_2 = G (M_1 \pm M_3)$
j) pomeranje povratne sprege ispred diskrim.			$M_2 = M_1 \pm M_3$
k) pomeranje povratne sprege iza diskrim.			$M_2 = M_1 \pm M_3$
l) komutacija promenljivih			$M_2 = M_1 \pm M_3 \pm M_4$

Tabela 2.3. Najvažnija pravila algebre funkcije prenosa[39]

## 2.6 Graf toka signala.

Pored strukturnog blok dijagrama graf ili dijagram toga signala [27],[39],[21] je pogodan način za predstavljanje matematičkog modela linearnog dinamičkog sistema. U strukturnom blok dijagramu promenljive sistema se predstavljaju linijskim segmentima, a funkcije prenosa između pojedinih promenljivih blokovima. U grafu toga signala promenljive su predstavljene , a funkcije prenosa orijentisanim .

Stoga je Mejson [27],[39],[21] definisao graf toga signala kao „mrežu koju sačinjavaju čvorovi, međusobno povezani orijentisanim granama“.

Transformacija i redukcija modela SAU predstavljenih preko SBD je nekada veoma komplikovana i teška (sistemi složenije strukture).

Pri formiranju i analiziranju GTS postoje sledeća pravila:

1. U jednom čvoru se može suscitati proizvoljan broj grana isto kao što iz jednog čvora može izlaziti proizvoljan broj grana;
2. Zbir signala sa krajnjih tačaka svih grana koje se susiće u čvoru čini promenljivu čvora (signal čvora);
3. Promenljiva čvora se ravnomerno prosleđuje kroz sve grane koje iz tog čvora izlaze;
4. Signal se kroz granu prostire isključivo u smeru označenom strelicom [43].

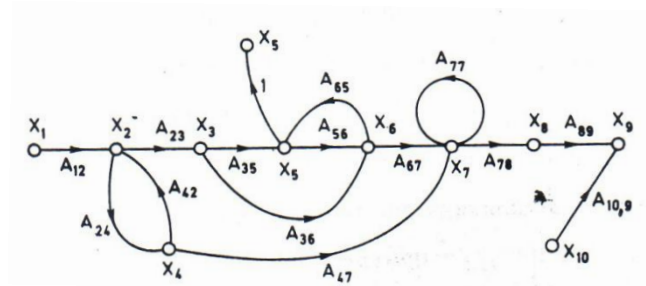
Osim čvorova i grana, definišu se i drugi pojmovi, vezani za sam oblik i za primenu grafova. U svrhu definisanja ovih pojmova posmatraćemo graf toka na sl. 2.10.

je skup sukcesivno povezanih i u istom smeru orijentisanih grana, duž koje se svaki čvor javlja samo po jedan put[39]. U grafu na slici 2.10 su putanje, na primer:

itd.

je čvor iz koga grane samo izvire. i su, na primer, izvori grafa na slici 2.10.

je čvor u koga grane samo poniru. U grafu na sl. 2.10 postoje dva ponora i to  $X_5$  i  $X_7$ . Obično je ponor grafa vezan za izlaznu promenljivu sistema,



Slika. 2.10. Graf toka signala[39]

je putanja koja spaja izvor sa ponorom. Na primer, od izvora  $X_1$  do ponora  $X_5$  (sl. 2.10) postoje ukupno tri direktne putanje i to:

je putanja koja izvire i ponire u istom čvoru [39]. To su, na primer, putanje

je poseban tip zatvorene putanje, koja sadrži samo jednu granu.

je operator transformacije te grane.

je proizvod pojačanja svih grana koje sačinjavaju tu putanju. Na primer, pojačanje direktne putanje

je

je proizvod pojačanja svih grana koje sačinjavaju tu zatvorenu putanju.

### 2.6.1 Mejsonovo pravilo

Za svođenje grafa na najjednostavniju topološku formu nameće se pravilo za određivanje funkcija prenosa od bilo kog izvora do bilo kog ponora u grafu linearnog stacionarnog sistema sa koncentrisanim parametrima. Ovo pravilo je prvi uočio i formulisao Mejson [21],[27],[30],.

Prema Mejsonovom pravilu, funkcija prenosa od izvora do ponora grafa data je relacijom

$$\frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\beta_i \beta_j} - \dots} \quad (2.52)$$

gde je  $\beta_i$  broj direktnih putanja od izvora do posmatranog ponora, a  $\beta_j$  je pojačanje  $\beta_i$ -te direktne putanje.

Dalje je

$$\beta_j = \sum_{i=1}^n \beta_i \beta_j \quad (2.53)$$

gde su:

- zbir kružnih pojačanja svih zatvorenih putanja grafa,
  - zbir svih proizvoda kružnih pojačanja od po dve zatvorene putanje, koje se međusobno ne dodiruju,
  - zbir svih proizvoda kružnih pojačanja od po tri zatvorene putanje, koje se međusobno ne dodiruju.
- ... su definisani na analogan način.

$\beta_j$  je , koje se dobija primenom obrasca (2.53), ali samo za zatvorene putanje koje ne dodiruju  $\beta_i$ -tu direktnu putanju[39].

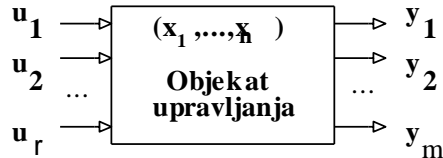
## 2.7 Model sistema u prostoru stanja

Korišćenjem prenosne funkcije sistema, pojednostavljuje problem modeliranja kauzalnih stacionarnih linearnih sistema sa koncentrisanim parametrima. Međutim, kod izvesnih klasa sistema ovakav prilaz nije moguć ili nije pogodan. Na primer, to je slučaj sa linearnim nestacionarnim sistemima, u kojima se jedan ili više parametara menjaju u toku vremena.

Tehnika modela u prostoru stanja predstavlja moderan pristup u teoriji linearnih sistema. Matematički model sistema u prostoru stanja se predstavlja u vidu

skupa diferencijalnih ili diferencnih jednačina prvog reda. Ove jednačine opisuju prošlo, sadašnje i buduće ponašanje sistema.

Modeli u prostoru stanja su naročito pogodni za predstavljanje multivarijabilnih sistema sa velikim brojem ulaza i izlaza i vrlo su efikasni za numeričke algoritme izračunavanja.



Slika 2.11 Multivarijabilni sistem sa velikim brojem ulaza i izlaza [43]

Jedan poseban vid zapisivanja diferencijalnih jednačina dinamičkog sistema koji je pogodan sa više aspekata korišćenja, je normalna ili Košijeva forma sistema diferencijalnih jednačina prvog reda[43]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r; t) \end{aligned}$$

U jednačinama figurišu promenljive stanja koje se definišu kao minimalan skup promenljivih  $x_1, x_2, \dots, x_n$  posmatrano od vremena  $t = t_0$ , koji zajedno sa zadatim ulazom  $u_1, \dots, u_r$  određuje stanje sistema u budućem vremenu  $t \geq t_0$ .

Promenljive stanja, mogu, ali, u opštem slučaju, ne moraju biti istovremeno i izlazi sistema. Najčešće su izlazi sistema neke funkcije promenljivih stanja i ulaza:

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ y_m &= g_m(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r; t) \end{aligned}$$

Poslednja dva sistema jednačina se mogu napisati u kompleksnoj-vektorskoj formi:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x, u, t) \quad \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r; t) \\ y(t) &= g(x, u, t) \quad \vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r; t) \end{aligned}$$

Koncept prostora stanja ima nekoliko prednosti u odnosu na klasični pristup, posebno ako se posmatra sa aspekta korišćenja digitalnih računara [43].

Na slici 2.11. je prikazana jednostavna blok-šema sistema sa otvorenom povratnom spregom. Ulazne promenljive  $u_1, \dots, u_r$  se mogu predstaviti u obliku ulaznog vektora  $\mathbf{u}$ , a izlazne veličine  $y_1, y_2, \dots, y_m$  se mogu predstaviti sa izlaznim vektorom  $\mathbf{y}$  sledećeg oblika odnosno:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

U slučaju da se radi o stacionarnom sistemu, odnosno, o sistemu čiji parametri ostaju konstantni tokom vremena u razmatranim uslovima, onda se matrična jednačina stanja i matrična jednačina izlaza mogu pisati kao:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

Pri čemu se prva od jednačina naziva jednačinom stanja dok se druga od njih naziva jednačinom merenja ili opservacije, pri tome su dimenzije ovih matrica sa konstantnim koeficijentima sledeće (A- matrica stanja, B- matrica upravljanja, C- matrica izlaza, D- matrica ulaza/izlaza [43]:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{m1} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix}$$



Takođe, modeli u prostoru stanja su omogućili definisanje novih koncepata u teoriji sistema kao što su kontrolabilnost i opservabilnost.

Prilikom izbora promenljivih stanja treba ih birati tako da one budu linearno nezavisne. Nezavisne promenljive stanja su one promenljive koje se ne mogu izraziti pomoću preostalih promenljivih stanja. Svaka promenljiva stanja ne mora imati fizičku interpretaciju ili smisao.

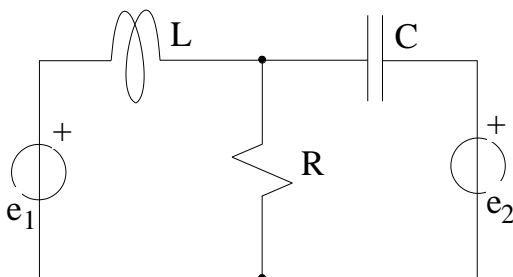
Kao fizičke promenljive se obično usvajaju one promenljive koje predstavljaju fizičke promenljive odgovarajućih skladišta energije. Iz ove činjenice sledi da je broj promenljivih stanja potreban da opiše dinamiku sistema jednak ili manji od broja energetskih skladišta u sistemu [43].

Skladište energije u proizvoljnom sistemu predstavlja elemenat sposoban da primi i uskladišti odgovarajuću energiju. Tako na primer, ako je elemenat kondenzator  $C$ , njemu odgovarajuća energija je  $Cu^2/2$  a promenljiva stanja je napon  $u$ , kalemu  $L$  odgovara energija  $Li^2/2$  i promenljiva stanja struja  $i$ , masi  $M$  odgovara energija  $Mv^2/2$  promenljiva stanja brzina  $v$ , opruzi  $K$  odgovara energija  $Kx^2/2$  i promenljiva stanja pomeraj  $x$ , itd.

Dinamičke promene sistema se mogu objasniti preraspodelom i transformacijom energije između skladišta energije po određenim prirodnim zakonima [43].

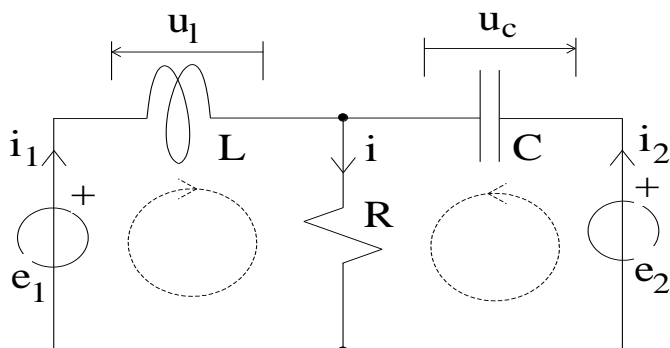
Primer:

- Formirati matematički model u prostoru stanja za električno kolo na slici.
- Ako se za izlaznu veličinu usvoji struja kroz otpornik  $R$ , formirati jednačinu izlaza, ako se za izlazne veličine usvoje struje kroz izvore  $e_1$  i  $e_2$ . [43]



Rešenje:

- a) Prvo treba označiti referentne smerove struja i napona:



Sada se mogu postaviti jednačine u kolu (po Kirhofovim zakonima):

$$e_1 = u_L + Ri = L \frac{di_1}{dt} + Ri_1 + Ri_2$$

$$e_2 = u_C + Ri = u_C + Ri_1 + Ri_2$$

$$i_2 = C \frac{du_C}{dt}$$

Dalje sledi:

$$L \frac{di_1}{dt} + RC \frac{du_C}{dt} = e_1 - Ri_1$$

$$RC \frac{du_C}{dt} = e_2 - u_C - Ri_1$$

Kao promenljive stanja treba usvojiti promenljive koje se u jednačinama pojavljuju sa prvim izvodom, ako je to ikako moguće. Očigledno je da će ovde rešenje biti u izboru  $u_c$  i  $i_1$ . Tako prethodni sistem jednačina postaje:

$$L \frac{di_1}{dt} = e_1 - Ri_1 - RC \frac{du_c}{dt} = e_1 - Ri_1 - e_2 + u_c + Ri_1 = u_c + e_1 - e_2$$

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{1}{RC} e_2 - \frac{1}{RC} u_c - \frac{1}{C} i_1$$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{L} u_c + \frac{1}{L} e_1 - \frac{1}{L} e_2$$

Moguće je sada formirati jednačine stanja pri čemu se za ulazne veličine usvajaju  $e_1$  i  $e_2$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{du_c}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

Matrice stanja i upravljanja sistema su, respektivno:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{RC} \end{bmatrix}$$

- b) Ako se kao izlazna veličina usvoji struja kroz otpornik dobija se jednačina izlaza:

$$i_1 = i_1$$

$$i_2 = -i_1 - \frac{1}{R} u_c + \frac{1}{R} e_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

Primenom Laplasove transformacije na sistem:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B \cdot u$$

$$y = C\bar{x} + D \cdot u$$

dobija se sledeće:

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \Rightarrow$$

$$(sI - A)X(s) = x_0 + BU(s) \Rightarrow$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

gde je:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \text{adj}(sI - A) = \Phi(s)$$

Prema tome, dalje se može pisati:

$$X(s) = \Phi(s)x_0 + \Phi(s)BU(s)$$

gde  $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$  predstavlja Laplasovu sliku matrice prelaza stanja ili fundamentalnu matricu sistema.

Vektor varijabli stanja u vremenskom domenu se dobija nalaženjem inverzne Laplasove transformacije od  $X(s)$  [30]:

$$x(t) = \{X(s)\}$$

Odziv sistema se određuje iz izraza:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

primenom Laplasove transformacije dobija se :

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

S obzirom da je:

$$X(s) = \Phi(s)x_0 + \Phi(s)BU(s)$$

za nulte početne uslove:  $x_0 = 0$  može se odrediti prenosna funkcija sistema

$$\frac{Y(s)}{U(s)} :$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{CX(s) + DU(s)}{U(s)} = C\Phi(s)B + D$$

## 3. ODZIV ELEMENATA I SISTEMA

### 3.1 Uvod

Najpogodniji način da se sagleda dinamičko ponašanje nekog sistema je da se nađe njegov odziv na neku definisanu ulaznu promenu (pobudu). Proces koji se javlja na izlazu elementa/sistema usled delovanja ulaznog signala nazivamo odzivom elementa ili sistema. Pod vremenskim odzivom sistema na datu ulaznu funkciju podrazumevamo vremensku zavisnost izlazne promenljive za zadatu promenu ulazne promenljive. Pod dejstvom pobude nastaje odvijanje procesa bilo koje vrste u elementu ili sistemu. Taj proces se najčešće naziva kretanjem [27]. Kretanje može nastati usled delovanja nenultih početnih uslova koja predstavlja akumulisanu energiju u elementima ili sistemima, pod uticajem spoljašnjih sila (pobudnih signala) ili usled istovremenog delovanja nenultih početnih uslova i spoljašnjih sila. Kada se kretanje odvija samo na račun nenultih početnih uslova odnosno unutrašnje energije, tada kažemo da se element ili sistem autonomno kreće, odnosno da u njemu postoji slobodno kretanje [27]. Ako se element ili sistem kreće samo usled delovanja spoljašnjih sila, tada govorimo o prinudnom kretanju. U konačnom se može reći da se svako kretanje pod dejstvom spoljašnjih sila sastoji iz slobodnog i prinudnog kretanja. Uspostavljanjem prinudnog kretanja sistem ulazi u stacionarno stanje. Prelazak iz jednog u drugo stacionarno stanje, usled promene pobude, naziva se prelaznim procesom.

Elementi ili sistemi se mogu naći u različitim realnim sredinama i mogu biti podvrgnuti delovanju različitih spoljašnjih uticaja. Uopšte je poznato da su spoljašnji uticaji uglavnom, stohastičke veličine, tj. mogu imati proizvoljnu vrednost i oblik i podležu zakonitostima verovatnoće. Za određivanje reakcije sistema u takvim uslovima potrebno je primenjivati teoriju stohastičkih sistema. Ipak, u praksi se mnogi sistemi mogu tretirati kao sistemi koji rade u determinističkim uslovima, tj. da njihovi pobudni signali pripadaju klasi funkcija determinističkog tipa. Međutim, i broj pobudnih signala determinističkog tipa, koji mogu delovati na realne sisteme, je ogroman, praktično beskonačan, što usložnjava analizu i sintezu sistema, kao i njihovo međusobno kvalitativno i kvantitativno upoređivanje. U cilju unifikacije, pogodno je ograničiti broj mogućih pobudnih signala pomoću kojih se vrši kvalitativno i kvantitativno ispitivanje različitih sistema. Izabrani signali, koje ćemo dalje nazivati tipičnim, moraju imati nekoliko

važnih osobina: (i) da su matematički jednostavni, (ii) da se sistem, podvrgnut delovanju takvih signala, nalazi u stanju povišenih zahteva na statičke i dinamičke karakteristike, i (iii) da se realni signali koji deluju na sistem mogu aproksimirati skupom tipičnih signala [27]. Postavljene zahteve u pogledu ispitivanja dinamičkih osobina sistema u potpunosti zadovoljavaju sledeći signali: impulsna odnosno poseban oblik Dirakov impulsi signal  $\delta(t)$ , odskočna odnosno poseban oblik Hevisajdov odskočni signal  $h(t)$ , nagibni signal, prostoperiodični (harmonijski) signal.

Prva dva signala, svojim naglim promenama, ističu dinamičke osobine sistema u prelaznim režimima, dok harmonijski signal potencira dinamičke osobine sistema u tzv. dinamičkim stacionarnim stanjima.

Teorijsko nalaženje odziva sistema se svodi na rešavanje sistema diferencijalnih jednačina kojima je opisana dinamika sistema, za definisanu promenu ulaznih promenljivih i date početne uslove. Pri tome se vrlo često koriste Laplasova i inverzna Laplasova transformacija.

### Odrađivanje odziva na osnovu funkcije prenosa

Ako je element/sistem opisan matematičkim modelom u obliku prenosne funkcije  $W(s)$  i neka je poznat pobudni signal  $x(t)$ . Na osnovu definicije prenosne funkcije,

$$\text{—} \tag{3.1}$$

neposredno proističe:

$$\tag{3.2}$$

što predstavlja odziv sistema u kompleksnom domenu. Međutim, nas najčešće interesuje odziv sistema u vremenskom domenu. On se određuje prevođenjem prethodne relacije u vremenski domen, primenjujući inverznu Laplasovu transformaciju:

Znajući funkciju prenosa i kompleksni lik pobudnog signala, koristeći metode za dobijanje inverzne Laplasove transformacije (rastavljanje na

proste razlomke, Hevisajdov razvitak, korišćenje tabela) dolazi se do izraza za vremenski odziv sistema.

## 3.2. Vremenski odzivi jednostavnih - elementarnih sistema

### 3.2.1 Osnovni dinamički elementi

Pretpostavljeno je da svi osnovni elementi imaju osobinu jednosmernosti koja se ogleda u tome što izlazna veličina elementa u prelaznom periodu nema nikakvog uticaja na ulaznu veličinu u koliko ne postoji specijalna unutrašnja povratna sprega. Diferencijalna jednačina osnovnog elementa ostaje nepromenjena bez obzira da li je na njegovom izlazu povezan naredni element ili nije.

Ova osobina jednosmernosti osnovnih elemenata i mogućnosti razlaganja složenih sistema na kombinacije osnovnih elemenata, znatno doprinosi pojednostavljenju projektovanja i ispitivanja sistema. Svaki linearni SAU u fazi teorijskog razmatranja može da se predstavi ekvivalentnom strukturnom šemom sistema u kojoj su realni elementi zamenjeni odgovarajućim osnovnim elementima sa naznačenim vezama između njih.

Osnovni, elementarni sistemi su:

1. proporcionalni element
2. aperiodski element ( sistem prvog reda-element sa vremenskom konstantom)
3. kapacitivni element (integrator)
4. oscilatorni element (sistem drugog reda)
5. element sa mrtvim vremenom (čisto kašnjenje)
6. diferencijalni element.

#### 3.2.1.1 Proporcionalni element

Proporcionalni element je relativno najjednostavniji element automatike kod koga je izlaz proporcionalan ulazu u svakom trenutku vremena:

$$Y(t) = Kx(t) \tag{3.4}$$

gde je :

$y(t)$  – izlazna veličina,



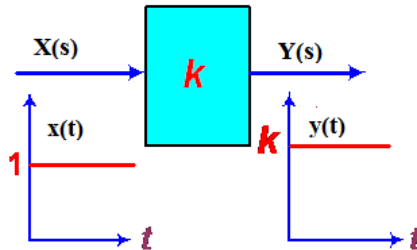
$x(t)$  – ulazna veličina,

$K$  – koeficijent proporcionalnosti, koji se još naziva i koeficijent pojačanja elementa.

Poslednja jednačina je algebarska i pokazuje da element predaje signal sa ulaza ka izlazu trenutno, bez prelaznog procesa. Proporcionalni element je bez inercije, zbog čega se naziva i bezinercijalni, a takođe i pojačavački element nultog reda. Pošto je jednačina (3.4) algebarska, ona zadržava isti oblik posle primene Laplasove transformacije. Prenosna funkcija proporcionalnog elementa je konstanta:

$$Y(s) = K X(s) \quad (3.5)$$

a njegova statička i dinamička karakteristika su identične.



Slika 3.1. Dinamička karakteristika proporcionalnog elementa za odskočnu promenu ulaza

U postrojenjima procesne industrije se vrlo retko javljaju procesi kojima odgovara ovakav matematički model. Međutim, neki delovi sistema se ponašaju kao proporcionalni elementi. Pored toga, elementi merno-regulacionog sistema se često konstruišu sa zahtevom da imaju ovakvu karakteristiku. Evo nekoliko karakterističnih primera proporcionalnog elementa.



Slika 3.2. Neki primeri proporcionalnih elemenata: a) poluga, b) zupčasti prenosnik, c) potenciometar



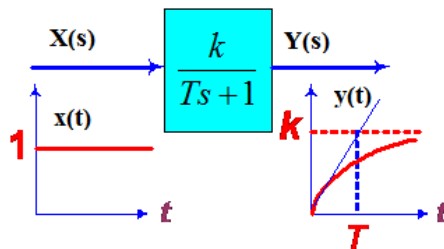
Aperiodski element je definisan sa dva parametra modela,  $T$  i  $K$ . Parametar  $T$  ima dimenzije vremena i naziva se vremenska konstanta, dok parametar  $K$  predstavlja pojačanje, odnosno statičku karakteristiku aperiodskog elementa. Aperiodski element se često naziva i element sa vremenskom konstantom.

Elementi koji se mogu prikazati ovakvim dinamičkim modelom se često javljaju u postrojenjima procesne industrije. Mnogi procesi (objekti upravljanja) se mogu tačno ili približno prikazati kao jedan, ili češće, kao kombinacija više redno vezanih sistema prvog reda. Takođe, mnogi merni i izvršni elementi se mogu smatrati sistemima prvog reda, kao i mnoge komponente pneumatskih i električnih elemenata mernoregulacione opreme.

Karakter promene izlazne veličine na skokovitu promenu ulazne veličine dat je izrazom:

$$y(t) = K \cdot x_0 (1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad (3.9)$$

Vremenske karakteristike ovog elemente date su na slici 3.3.



Slika 3.3. Dinamička karakteristika aperiodskog elementa za odskočnu promenu ulaza

Iz karakteristike elementa vidi se da se izlazna veličina u prelaznom procesu počinje menjati nekom maksimalnom brzinom, koja se postepeno smanjuje do nule. Vremenska konstanta  $T$  grafički je prikazana na slici i predstavlja vreme za koje izlazna veličina u prelaznom periodu postigne 63.7% od stacionarne vrednosti.

### 3.2.1.3 Kapacitivni element (integrator)

Osnovni dinamički element kod kojeg je brzina promene izlazne veličine proporcionalna ulaznoj veličini, naziva se integralnim elementom, a njegova diferencijalna jednačina ima oblik :

—

Gde je  $K$ -koeficijent prenosa, koji pokazuje odnos brzine izlazne veličine prema odgovarajućoj ulaznoj veličini.

Integralenjem prethodne jednačine dobija se jednačina oblika:

$$y(t) = K \int_0^t x(t) \cdot dt \quad (3.11)$$

koja pokazuje da je izlazna veličina elementa proporcionalna integralu po vremenu ulazne veličine.

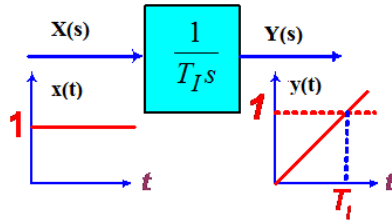
Primenom Laplasove transformacije, dobija se sledeći oblik prenosne funkcije kapacitivnog elementa:

— —

Kada se na ulaz ovog elementa dovede odskočna pobudna funkcija, izlazna veličina ima oblik:

$$y(t) = K \cdot x_0(t), \quad K = \frac{1}{T_I} \quad (3.13)$$

Ova jednačina pokazuje da kada se na ulaz integralnog elementa dovodi konstantan poremećaj, u obliku odskočne veličine dobiće se izlazna veličina koja linearno raste sa vremenom, kako je to grafički prikazano na narednoj slici 3.4.



Slika 3.4. Odskočna ulazna veličina i prelazna karakteristika integralnog elementa

Tipičan primer kapacitivnog elementa (integrator) su: električni kondenzator, rezervoar za tečnosti, klipni hidraulični servomotor i drugo.

### 3.2.1.4 Oscilatorni element

Ovaj se element naziva i proporcionalni element drugog reda, jer se vremenska zavisnost između izlazne i ulazne veličine opisuje diferencijalnom jednačinom drugog reda. Naziv oscilatorni potiče otuda što u toku rada elementa ili sistema može da dođe do oscilatorne razmene energije između pojedinih njegovih delova. Tako, na primer, kinetička energija može pretvarati potencijalnu energiju električnog polja u energiju magnetnog polja itd. Zavisno od veličine gubitaka, oscilovanje teče brže ili sporije, a pri velikim gubicima proces može da postane aperiodičan.

Oscilatorni element se može opisati sistemom od dve zavisne obične linearne diferencijalne jednačine prvog reda sa konstantnim koeficijentima:

—

—

ili jednom običnom linearnom diferencijalnom jednačinom drugog reda sa konstantnim koeficijentima:

— —

Ako se jednačina (3.15) podeli sa  $s^2$  dobija se standardni oblik diferencijalne jednačine koji se najčešće koristi za prikazivanje dinamike oscilatornog elementa u vremenskom domenu:

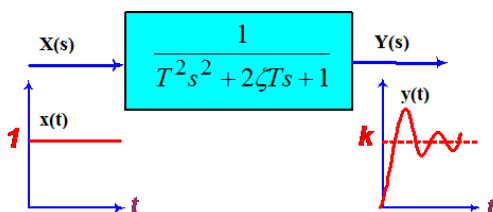
— —

Posle primene Laplasove transformacije, dobija se standardni oblik prenosne funkcije oscilatornog elementa:

—————  
— —

Za definisanje oscilatornog elementa se, pored pojačanja  $K$ , koriste još dva parametra: vremenska konstanta  $T$  i koeficijent prigušenja  $\xi$ . Često se umesto vremenske konstante  $\tau$  koristi njena recipročna vrednost  $\omega_n$  koja se naziva prirodna (sopstvena) frekvencija sistema.

Odziv oscilatornog elementa na odskočni ulazni signal ima prigušeno-oscilatorni karakter, kao što prikazuje naredna slika.



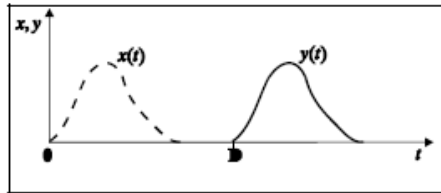
Slika 3.5 Vremenska karakteristika oscilatornog elementa, odskočna ulazna funkcija i prelazna izlazna karakteristika

### 3.2.1.5 Element sa mrtvim vremenom (element sa čistim kašnjenjem)

U procesnoj industriji se često javljaju procesi kod kojih se javlja kašnjenje izlazne za ulaznom promenljivo za određeno fiksno vreme. Ovaj element je tako nazvan zbog toga što promena izlazne veličine sledi promenu ulazne veličine, ali sa određenom vremenskom zadržkom. Izlazni signal praktično ponavlja ulazni signal, ali posle određenog vremena. Prema tome, kad se takvom elementu dovede ulazna veličina u obliku skoka, na izlazu iz elementa se takođe dobija istovetan signal, samo vremenski pomeren za neko vreme, koje se naziva kašnjenje.

Ukoliko ne dolazi ni do kakve druge promene ulaznog signala, ovakav sistem se može vrlo jednostavno matematički interpretirati:

Na slici 3.6. su prikazane vremenske zavisnosti izlaza i ulaza koje odgovaraju ovakvom sistemu (za slučaj proizvoljne pulsne ulazne promene).



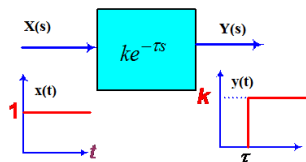
Slika 3.6. Efekat elementa sa mrtvim vremenom - kašnjenje funkcije

Primenom Laplasove transformacije, uz korišćenje teoreme kašnjenja, dobija se sledeća prenosna funkcija ovog sistema:

—

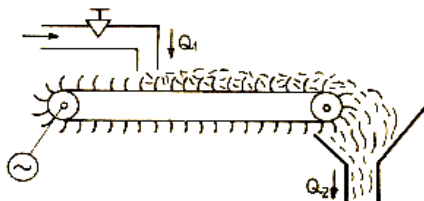
Veličina  $D$  koja definiše vreme za koje izlaz kasni za ulazom naziva se *mrtvo vreme* ili *čisto kašnjenje*, a element koji ima ovakve dinamičke karakteristike se naziva *element sa mrtvim vremenom* ili *element sa čistim kašnjenjem*.

Prelazna karakteristika elementa čistog kašnjenja data je na donjoj slici.



Slika 3.7 Prelazna karakteristika elementa čistog kašnjenja, ulazna odskočna funkcija i odgovarajuća izlazna veličina

Za primer ovakvog elementa može da se uzme dugački cevovod za prenos fluida (tečnosti ili gasova), zatim transportne trake za prenos materijala i slično. Na slici 3.8 prikazan je transporter rasutog materijala kao primer elementa čistog kašnjenja.



Slika 3.8 Transporter rasutog materijala kao primer elementa čistog kašnjenja

### 3.2.1.6 Diferencijalni element

Element sistema automatskog upravljanja kod kojeg je izlazna veličina proporcionalna brzini promene ulazne veličine naziva se idealnim diferencijalnim elementom. Matematički opis ovog elementa dat je diferencijalnom jednačinom oblika:

$$y(t) = T_D \frac{dx}{dt}$$

Ako je ulazna veličina ovog elementa u obliku odskočne funkcije, dolazi do trenutne promene izlazne veličine u vidu trenutnog impulsa sa beskonačnom amplitudom i beskonačno malom širinom.

Međutim, kako svi fizički procesi u prirodi imaju inerciju, odziv ovog elementa na ulaznu odskočnu funkciju ima impuls konačnog trajanja. To znači da je praktično nemoguće u potpunosti ostvariti ovakav zakon ponašanja.

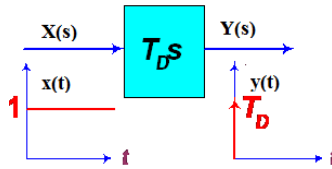
Umesto idealnog primenjuje se realni diferencijalni element koji diferencijalno dejstvo ostvaruje više ili manje približno idealnom. Prelazni proces ovakvog elementa za slučaj kada na njega deluje odskočna ulazna veličina dat je u obliku izraza:

$$y(t) = T_D x_0 e^{-\frac{t}{T}},$$

$T_D, T$  su koeficijent pojačanja elementa odnosno vremenska konstanta.

Vremenske karakteristike ovog elementa date su na slici 3.9.





Slika 3.9 Odskočna ulazna funkcija i odgovarajuća karakteristika diferencijalnog elementa

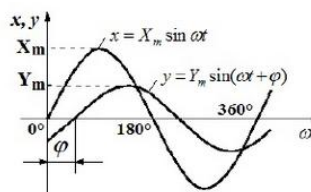
U zavisnosti od veličina  $T_D$  i  $T$  realni diferencijalni element zauzima neki položaj između idealnog diferencijalnog elementa (kada  $T \rightarrow 0$ ) i proporcionalnog elementa (kada  $t \rightarrow \infty$ ), uz konačnu vrednost amplitude. Realni diferencijalni elementi se upotrebljavaju za stabilizaciju uređaja i sistema automatske regulacije, kao i za formiranje odgovarajućih zakona delovanja regulatora. Kao primeri realnog diferencijalnog elementa mogu da posluže: električno RC kolo, tahogenerator, hidraulični prigušivač sa oprugom i drugo. Pri konstruisanju elemenata merno-regulacionih sistema često je poželjno ostvariti ovakvo dinamičko ponašanje. Međutim, kao što je prethodno naglašeno, ne postoje sistemi bez inercije koji bi vršili čisto diferenciranje.

### 3.3 Frekventne karakteristike i odzivi elemenata ili sistema

Prelazna karakteristika je odziv sistema automatskog upravljanja na odskočnu funkciju zavisno o vremenu. Frekventna karakteristika je odziv sistema na sinusnu funkciju zavisno o frekvenciji u stacionarnom stanju. Svaki linearni sistem ima svoje frekventno područje delovanja.

Ako se na ulazu sistema dovodi harmonijska oscilacija oblika

na izlazu iz sistema će biti takođe harmonijska oscilacija oblika



Slika 3.10 Sinusoidni ulazni i izlazni signal

Vidimo da izlazna veličina ima oblik sinusoide iste frekvencije i talasastog oblika, ali različite amplitude i sa faznim pomakom (slika 3.10).

Frekventne karakteristike se mogu odrediti analitički i eksperimentalno.

- Analitički – na osnovu poznavanja funkcije prenosa  
 Analitičko određivanje frekventne karakteristike se formalno može odrediti iz prenosne funkcije sistema:

$$F(j\omega) = W(s) \text{ za } s = j\omega$$

- Eksperimentalno – na osnovu merenja:
  - Posmatra se stacionarno stanje
  - Pobuda je prostoperiodičan signal promenljive učestanosti
  - Snime se promene izlaznog signala.

Frekventna karakteristika se snima tako da se na generatoru funkcija namesti odgovarajuća amplituda ( $X_m$ ) sinusoide i menja se frekvencija ulaznog signala. Za svaku nameštenu ulaznu frekvenciju osciloskopom se snima izlazni signal. Meri se amplituda ( $Y_m$ ) i fazni pomak ( $\varphi$ ) izlaznog signala. Svaki linearni sistem ima svoje frekventno područje delovanja.

Ulazna i izlazna veličina  $X$  i  $Y$  su napisane u obliku kompleksnih brojeva i dobijaju izgled:

$$\frac{Y}{X} = \dots \quad (3.20)$$

Na osnovu toga možemo definisati frekventnu prenosnu funkciju koja predstavlja odnos ulazne i izlazne kompleksne veličine:

$$\dots \quad (3.21)$$

gde je:

- argument frekventne prenosne funkcije.

Modul pokazuje zavisnost odnosa amplituda izlaznog i ulaznog periodičnog signala od frekvencije, na osnovu čega se dobija amplitudno- frekventna karakteristika.

Argument daje frekventnu zavisnost pomeraja faze, koji nastaje pri prolasku periodičnog signala kroz dinamički sistem na osnovu čega se dobija fazno-frekventna karakteristika [3].

Od frekventnih karakteristika razlikujemo sledeće tipove:

- *amplitudno-frekventna karakteristika* (promena amplitude u zavisnosti od frekvencije)
- *fazno-frekventna karakteristika* (fazni pomeraj u zavisnosti od frekvencije)
- *amplitudno-fazno-frekventna karakteristika*.

Amplitudna i fazna karakteristika određuju osobine dinamičkog sistema u području frekvencije od            do            . Znači određuje zavisnost veličine izlaznog i ulaznog signala o frekvenciji

$$\text{—} \qquad \qquad \qquad (3.22)$$

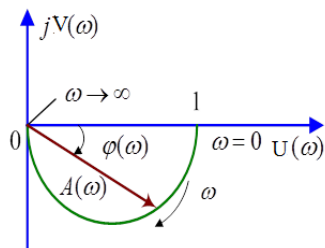
Fazno-frekventna karakteristika određuje zavisnost faznog pomaka izlaznog i ulaznog signala o frekvenciji

### **Grafičko prikazivanje frekventnih karakteristika dinamičkog sistema**

Prikazivanje dinamičkog sistema se prikazuju grafički zbog preglednosti i to vrlo jednostavno, dok su analitički izrazi često vrlo složeni. Zato grafičke metode imaju veliku primenu. Prva mogućnost je da se frekventna prenosna karakteristika            prikaže u obliku:

gde su            realni a            imaginarni deo frekventne prenosne funkcije i mogu se izračunati za svaku vrednost kružne frekvencije. Parovi vrednosti  $U$  i  $V$  za svaku pojedinačnu vrednost            određuju po jednu tačku u kompleksnoj ravni. Kada se te tačke spoje, dobija se kriva koja se zove *hodograf vektora*

. Za svaku vrednost frekvencije intezitet vektora  $V(\omega)$  jednak je modulu, a ugao koji zaklapa sa apscisnom osom jednak je argumentu frekventne prenosne funkcije (slika 3.11) [3].



Slika 3.11 Amplitudno-fazna frekventna karakteristika

Iz dobro poznatih odnosa, povezujući gore pomenute veličine dobije se moduo  $A(\omega)$  i argument  $\varphi(\omega)$

Hodograf frekventne karakteristike  $V(\omega)$  nacrtan na osnovu gornjih jednačina, predstavlja njen polarni oblik, a ravan frekventne karakteristike u tom slučaju naziva se polarna ravan.

Ovakvo prikazivanje je praktično i primenjivo jer se iz jednog dijagrama mogu uočiti sva bitna frekventna svojstva sistema. Mana je što je konstruisanje hodografa obiman posao, zahteva puno vremena, pa se često frekventne karakteristike sistema prikazuju odvojenim dijagramima pri čemu su tada moduo  $A(\omega)$  naziva amplitudno-frekventna karakteristika, a argument  $\varphi(\omega)$  fazno- frekventne karakteristike.

### 3.3.1 Logaritamska frekventna karakteristika

Dosta izračunavanja zahteva za konstruisanje dijagrama amplitudne i fazne karakteristike  $V(\omega)$  kao što su vrednosti  $U(\omega)$ ,  $V(\omega)$  ili  $A(\omega)$ -amplitudno frekventna karakteristika ( $F(\omega)$  i  $\varphi(\omega)$ -fazno frekventna karakteristika, za niz vrednosti kružne frekvencije  $\omega$ .

Iz tog razloga se frekventne karakteristike najčešće prikazuju u logaritamskom obliku gde se dobijaju logaritamske frekventne karakteristike. Definisana je sa:

e

Realni deo, odnosno  $\text{Re}\{G(j\omega)\}$  [db] je logaritamsko-amplitudna frekventna karakteristika koja se označava sa  $L(\omega)$  :

I imaginarni deo:  $\text{Im}\{G(j\omega)\}$  e, koji je potpuno određen sa fazno-frekventnom karakteristikom  $\phi(\omega)$  :

Znači  $\phi(\omega)$  i  $L(\omega)$  određuju logaritamsku frekventnu karakteristiku pa samim tim i frekventnu karakteristiku  $G(j\omega)$  . Vrednosti logaritamske amplitudno frekventne karakteristike se mere decibelima [db].

Decibel nije merna jedinica već logaritamski odnos amplituda. (Npr. ako je odnos izlazne i ulazne amplitude 1000, znači 60 dB, a odnos od 0.01 znači -40 dB). Decibel je mera pojačanja i slabljenja i najčešće se koristi u oblasti telekomunikacija. Koristi se i kao mera jačine zvuka u aukustici, dok se u automatici ta mera odnosi na amplitude ulazne i izlazne veličine, tj 1 db označava promenu amplitude oscilovanja za  $\sqrt{10}$  što predstavlja srazmerno malu vrednost [3].

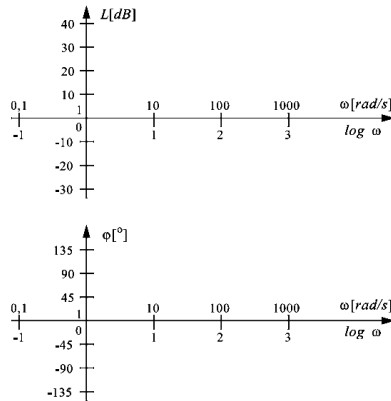
Prema gore navedenoj relaciji možemo za bilo koju vrednost izračunati  $L(\omega)$  .

Ako je  $\phi(\omega)$  onda je  $L(\omega)$  Može se dati tabelarno:

A	0,01	0,1	0,2	1	2	5	10	100	1000
L	-40	-20	-14	0	6	14	20	40	60

Logaritamska amplitudno-frekventna karakteristika se grafički prikazuje da se na apscisnu osu nanosi veličina  $\log(\omega)$  kao i na ordinate, ali sa vrednostima modula  $L(\omega)$  .

Fazno-frekventna karakteristika se prikazuje u logaritamskom dijagramu. Na apscisi je logaritamska skala  $\log(\omega)$  a na ordinati faza  $\phi(\omega)$  u stepenima.



Slika 3.12. Logaritamske koordinate

### 3.3.2. Frekventne karakteristike osnovnih dinamičkih elemenata

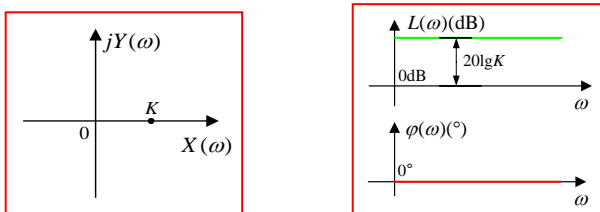
#### 3.3.2.1 Proporcionalni element

Karakteristika proporcionalnog elementa je da mu je odziv na harmonijsku oscilaciju kome menjamo frekvenciju takođe harmonijska oscilacija bez faznog pomaka. Osim toga, izlazna amplituda  $Y_m$  je konstantnog iznosa, tako da je prenosna funkcija:

$$\begin{cases} A(\omega) = K \\ \varphi(\omega) = 0^\circ \end{cases}$$

Pošto nema faznog pomaka ( $\varphi=0$ ), fazna karakteristika će biti u obliku pravca koji se poklapa s apscisnom osom. Logaritamska amplitudno-frekventna karakteristika je data u obliku horizontalne prave

za  $K$ , dok se logaritamska fazno-frekventna karakteristika poklapa sa faznom osom jer je  $\varphi=0$ . Ovo je prikazano na slici 3.13.



Slika 3.13. Frekventne karakteristike proporcionalnog elementa: a) hodograf, b) logaritamske karakteristike proporcionalnog elementa, amplitudno-frekventna i fazno-frekventna karakteristika

Uopšte, realne komponente mogu da se analiziraju kao proporcionalne komponente samo u određenom frekventnom području. Pri visokim frekvencijama jednačina oblika  $G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}$  se može primeniti na realne komponente jer se tada javljaju uticaji nekih drugih veličina.

Na primer, kod potenciometra dolazi do izražaja uticaj kapaciteta i induktiviteta provodnika, a kod mehaničkih prenosa se menja elastičnost poluga i osovin. Obzirom da je u realnim sistemima automatskog upravljanja zastupljeno područje dosta niskih učestalosti, realni proporcionalni elementi se mogu smatrati idealnim, a njihova se svojstva dovoljno tačno opisuju gore datim jednačinama [3].

### 3.3.2.2 Aperiodični elemenat

Dinamička karakteristika, koju smo već upoznali kroz vremenske karakteristike, može biti opisana i metodom ispitivanja sinusnim signalima - prostoperiodičnim funkcijama. Prema tome, frekventna prenosna funkcija ovog elementa bi bila:

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}$$

čiji je modul:  $|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$

Realni  $U(\omega)$  i imaginarni  $V(\omega)$  deo frekventne prenosne funkcije su:

$$U(\omega) = \frac{K}{1 + \omega^2 T^2} \quad V(\omega) = -\frac{K\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

Logaritamska amplitudna karakteristika proizilazi iz jednačine:

Za  $K=1$  je:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

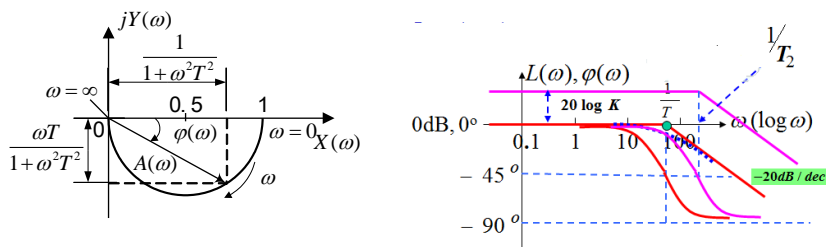
$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \\ \varphi(\omega) = -\arctg \omega T \end{cases}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = X(\omega) + jY(\omega)$$

Logaritamske karakteristike aperiodskog elementa su date izrazima

$$\begin{cases} L(\omega) = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \\ \varphi(\omega) = -\arctg \omega T \end{cases}$$

Frekventne karakteristike aperiodičnog elementa hodograf, i logaritamske karakteristike aperiodičnog elementa, logaritamska amplitudno- frekventna karakteristika, i logaritamsko fazno - frekventne karakteristike prikazane su na slici 3.14.



Slika 3.14 Frekventne karakteristike aperiodicnog elementa hodograf, i logaritamske karakteristike aperiodicnog elementa, amplitudno- frekventna karakteristika, i fazno- frekventna karakteristika

Pri izračunavanju fazne logaritamske karakterisrike dovoljno je izračunati tačke u intervalu od  $0^\circ$  do  $-45^\circ$  jer je deo karakteristike od  $-45^\circ$  do  $-90^\circ$  simetričan što nam je prikazano na slici 3.14.

Iz frekventnih karakteristika može se zaključiti da aperiodični element ima svojstvo takozvanog niskog propusta, tj porastom frekvencije ulazne veličine smanjuje se amplituda izlazne veličine, a faza se povećava od  $\varphi=0^\circ$  do  $\varphi=-90^\circ$ . Takvo ponašanje je matematički izraženo vremenskom konstantom  $T$  [3].

### 3.3.2.3 Oscilatorni element

Prenosna funkcija oscilatornog elementa je:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} \quad 0 < \zeta < 1$$



Ako se zameni s sa  $j\omega$  dobije se:

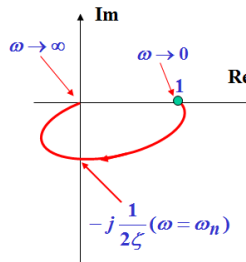
$$G(j\omega) = \frac{1}{(1 - \omega^2 T^2) + j2\zeta T \omega}$$

Odgovarajuća logaritamsko- frekventna i fazno-frekventna karakteristika oscilatornog elementa je:

$$L(\omega) = -20 \log \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\zeta T \omega)^2} \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \omega_n (=1/T) \\ -20 \log(2\zeta) & \omega = \omega_n \\ -40 \log(\omega T) & \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

$$\phi(\omega) = \text{tg}^{-1} \left( \frac{2\zeta T \omega}{1 - \omega^2 T^2} \right)$$

Hodograf oscilatornog elementa izgleda kao na slici 3.15:



Slika 3.15 Hodograf oscilatornog elementa

Stvarni dijagram može odstupati više ili manje od asimptotskog u zavisnosti od koeficijenta prigušenja  $\xi$ . Frekvencija maksimalne vrijednosti se dobija na slijedeći način:

$$\frac{d|G(j\omega)|}{d\omega} = 0 \Rightarrow$$

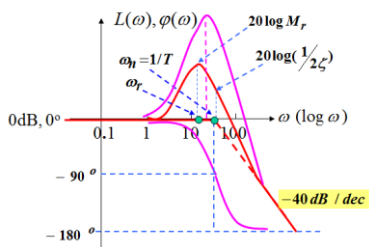
$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

Za maksimalnu vrijednost amplitude se dobija:

$$M_p = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Prema tome do pojave maksimuma će doći za vrijednosti prigušenja  $\xi < 0.707$

Logaritamske amplitudno frekventne i logaritamsko fazne frekventne karakteristike su date na slici 3.16:



Slika 3.16 Logaritamske amplitudno frekventne i logaritamsko fazne frekventne karakteristike

### 3.3.2.4 Integralni element

Prenosna funkcija integralnog elementa data je prenosnom funkcijom:

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

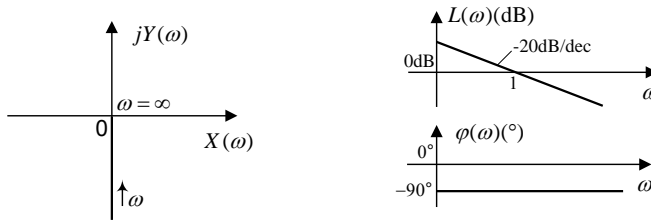
Na osnovu oblika prenosne funkcije integralnog elementa dobije se njegova odgovarajuća frekventna prenosna funkcija:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Odgovarajuće amplitudno frekventne i logaritamsko amplitudna i fazne karakteristike su:

$$\begin{cases} A(\omega) = 1/\omega \\ \varphi(\omega) = -90^\circ \end{cases} \quad \begin{cases} L(\omega) = -20 \lg \omega \\ \varphi(\omega) = -90^\circ \end{cases}$$

Na slici 3.17 su nacrtani hodograf i logaritamske amplitudno frekventne i logaritamsko fazno frekventne karakteristike.



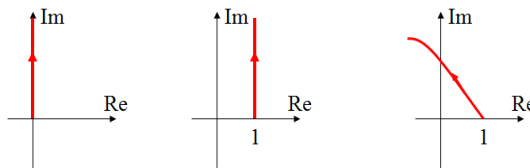
Slika 3.17 Hodograf i logaritamske amplitudno frekventne i logaritamsko fazne frekventne karakteristike integralnog elementa

### 3.3.2.5 Diferencijalni element

Prenosne funkcije diferencijalnih elemenata data je prenosnim funkcijama:

$$G(s) = \begin{cases} s & \text{osnovni diferencijalni element} \\ Ts + 1 & \text{diferencijalni element prvog reda} \\ Ts^2 + 2\zeta Ts + 1 & \text{diferencijalni element drugog reda} \end{cases}$$

Hodografi datih diferencijalnih elemenata dati su na slici:



Slika 3.18 Hodografi diferencijalnih elemenata

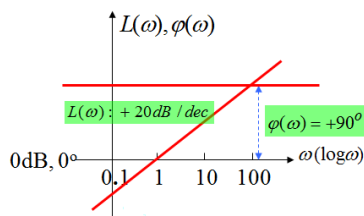
Frekventne karakteristike idealnog diferencijalnog elementa su:

$$G(j\omega) = j\omega \Rightarrow$$

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log G(\omega)$$

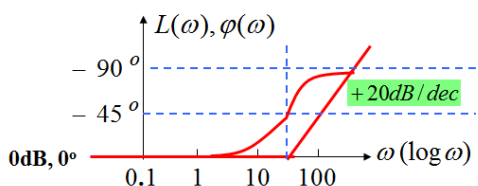
$$\arg G(j\omega) = \frac{\pi}{2}$$

Na slici 3.19 je data logaritamska amplitudno-frekventna i logaritamsko fazno-frekventna karakteristika idealnog diferencijalnog elementa:



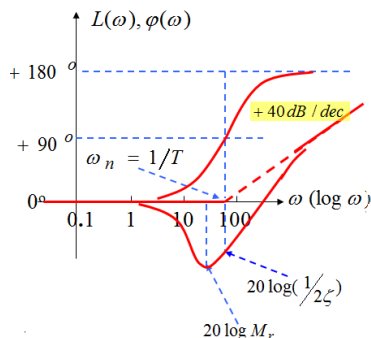
Slika 3.19 Logaritamska amplitudno-frekventna i logaritamsko fazno-frekventna karakteristika idealnog diferencijalnog elementa

Na slici 3.20 je data logaritamska amplitudno-frekventna i logaritamsko fazno-frekventna karakteristika diferencijalnog elementa prvog reda:



Slika 3.20 Logaritamska amplitudno-frekventna i logaritamsko fazno-frekventna karakteristika diferencijalnog elementa prvog reda

Na slici 3.21 je data logaritamska amplitudno-frekventna i logaritamsko fazno-frekventna karakteristika diferencijalnog elementa drugog reda:



Slika 3.21 Logaritamska amplitudno-frekventna i logaritamsko fazno-frekventna karakteristika diferencijalnog elementa drugog reda

### 3.3.2.6 Element čistog kašnjenja

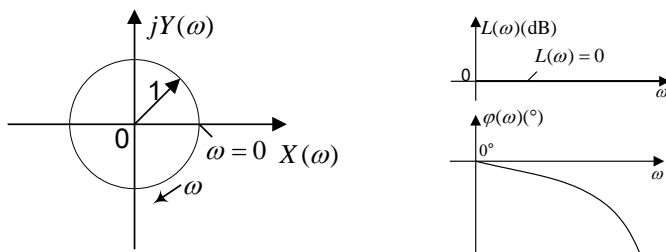
Prenosna funkcija elementa čistog kašnjenja je:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = e^{-\tau s}$$

Frekventna prenosna funkcija elementa čistog kašnjenja na osnovu njegove prenosne funkcije je:

$$G(j\omega) = e^{-j\omega\tau} \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = 1 \rightarrow L(\omega) = 0 \\ \phi(\omega) = \angle G(j\omega) = -\omega\tau \end{cases}$$

Frekventne karakteristike ovog elementa date sun a slici 3.22.



*Sl.3.22 Frekventne karakteristike elementa čistog kašnjenja ( hodograf, logaritmska amplitudno-frekventna i logaritamsko fazno-frekventna karakteristika*

## 4. STABILNOST SISTEMA

### 4.1 Uvod

Pri specifikaciji tehničkih zahteva za projektovanje SAU moraju se uzeti u obzir tri najglavnija faktora, i to: a) stabilnost sistema, b) odziv sistema u stacionarnom režimu i c) kvalitet prelaznog režima sistema. Analiza i sinteza sistema se upravo mora vršiti prema izloženom redosledu jer, na primer, nema smisla govoriti o kvalitetu odziva sistema u stacionarnom režimu ukoliko posmatrani sistem nije stabilan, pošto je kod nestabilnih sistema stacionaran režim po prirodi kompletno različit od željenog. Isto tako, nema smisla govoriti o kvalitetu prelaznog režima, ako prethodno nisu ispunjeni zahtevi u pogledu karakteristike sistema u stacionarnom režimu rada.

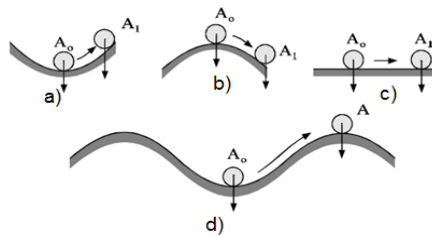
Kao što je na početku rečeno, sistem automatskog upravljanja predstavlja dinamički sistem, pa prelazni proces koji nastaje pri prelazu sistema iz jednog u drugo ravnotežno stanje usled dejstva poremećaja ili promene ulazne veličine zavisi od dinamičkih karakteristika samog sistema a takođe i od oblika poremećaja.

Za normalno funkcionisanje sistema veoma je bitno da on bude neosetljiv na slučajne poremećaje i smetnje koji u toku rada na njega deluju, tj. da bude stabilan.

Sistem je stabilan ukoliko se posle prestanka poremećajnog dejstva i završetka prelaznog procesa ponovo vrati u prvobitno i zauzme novo ravnotežno stanje. Ukoliko se sistem ne vrati u ravnotežno stanje iz kojeg je izveden, nego se od njega neprekidno udaljava monotono ili oscilatorno sa stalno rastućim amplitudama, onda je to *nestabilan* sistem.

Kada se govori o stabilnosti, obično se misli na petlje povratne sprege u kojima postoji kružni tok signala. Zbog kružnog toka signala u petlji povratne sprege, sistemi automatskog upravljanja mogu biti dovedeni, pri određenim uslovima, u dva režima: režim samooscilovanja i režim nekontrolisanog povećanja veličine kojom se upravlja ( radi se o signalima greške ) [27]. Ukoliko sistem dođe u jedan od prethodno navedena dva režima, kaže se da je takav sistem nestabilan. Stabilnost i nestabilnost sistema predstavljaju unutrašnju, odnosno sopstvenu osobinu jednog sistema. Takva osobina sistema se manifestuje samo pri kretanju sistema koje je izazvano kratkotrajnim ili stalnim delovanjem spoljašnjih sila.

Svaki sistem, pored stabilnog i nestabilnog, može imati i neutralno stanje. Ta tri stanja mogu se pregledno prikazati na primeru pomeranja kuglice po površinama različitog profila usled kratkotrajnog spoljnog dejstva na njih, slika 4.1.



Slika 4.1. — Položaj kuglice  $A_0$  na površini [3]

Kuglica  $A_0$  koja se nalazi u najnižoj tački sferne površine (slika 4.1.a) zauzima *stabilan* položaj. Ukoliko se kuglica pod dejstvom spoljnih sila izvede iz tog položaja i ostavi sama sebi, ona će se ponovo vratiti u prvobitni položaj. Ako se kuglica nalazi u najvišoj tački spoljašnje sferne površine (si. 4.1.b) pa se izvede iz ravnotežnog položaja i ostavi sama sebi, ona će se skotrljati i udaljavati od svog prvobitnog položaja. Takav sistem je *nestabilan*. Kada se kuglica nalazi na horizontalnoj površini (si. 4.1.c), pa se izvede iz ravnotežnog stanja i ostavi sama sebi, ona će zauzeti neki novi položaj (u kojem će se naći u trenutku nestanka spoljnih sila) i u njemu ostati. Takvo stanje naziva se *neutralnim*. Na slici 4.1d ravnotežno stanje je stabilno sve dok je pomak kuglice manji od nekog graničnog iznosa, određenog na primer tačkom A. Ako se pređe ta granica, kuglica ne neće vratiti u početno stanje  $A_0$  [3].

## 4.2. Definicija stabilnosti

Od čega zavisi stabilnost (ili nestabilnost) sistema najbolje se može objasniti pomoću opšte diferencijalne jednačine linearnog sistema automatskog upravljanja koja ima oblik:

$$\dot{y} + ay = by + u \quad (4.1)$$

Opšte rešenje jednačine (4.1) dobija se u vidu zbira homogenog  $y_H$  i partikularnog  $y_p(t)$  rešenja, što se može napisati:

$$y = y_H + y_p(t) \quad (4.2)$$

Homogeno rešenje predstavlja slobodno kretanje sistema koje je određeno početnim uslovima i osobinama samog sistema i ovaj deo rešenja odgovoran je za karakter prelaznog procesa, dok partikularno rešenje predstavlja prinudno kretanje koje je određeno poremećajnim dejstvom i karakteristikama sistema. Dakle, drugi deo rešenja potiče od prinudne sile (spoljašnje dejstvo) koja deluje na sistem i predstavlja karakteristiku ustaljenog stanja[3],[31].

Kada u nekom trenutku  $t$  na sistem prestane da deluje *spoljno dejstvo* i sistem se ostavi samom sebi, onda se promena sa vremnom promenljive  $y$  dobija kao rešenje jednačine (4.1) bez njenog desnog dela. Homogeno rešenje, tj. rešenje jednačine se odnosi na:

$$\dot{y} + ay = 0 \quad (4.3)$$

To znači da stabilnost sistema automatskog upravljanja zavisi od karaktera njegovog slobodnog kretanja u prelaznom procesu tj. ovaj deo rešenja je odgovoran za karakter prelaznog procesa. Za stabilan rad sistema potrebno je da se prelazni proces (u toku kojeg sistem prelazi iz jednog zadatog ravnotežnog stanja u drugo) sa vremenom prigušuje, tj. da homogeno rešenje sa vremenom teži ka nuli što se analitički može izraziti uslovom [3]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_H(t) \rightarrow 0$$



Drugim rečima sistem je stabilan ako se, izveden iz ravnotežnog stanja i prepušten samom sebi, posle dovoljno dugog vremena vraća u prvobitno ravnotežno stanje.

Ako je pak s druge strane:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y_H(t) \neq 0$$

sistem je nestabilan ili granično stabilan što tek treba naknadno utvrditi.

Rešenje diferencijalne jednačine (4.3) dobija se polazeći od pretpostavke da će u rešenju sigurno biti član oblika

$$y(t) = C \cdot e^{\lambda t}$$

Ako se poslednji izraz diferencira  $n$  puta i unošenjem odgovarajućih izvoda u jednačinu 4.3., posle skraćivanja člana  $C \cdot e^{\lambda t}$  dobije se karakteristična jednačina oblika [3],[31]:

$$A_0 \lambda^n + A_1 \lambda^{n-1} + \dots + A_{n-1} \lambda + A_n = 0 \quad (4.4)$$

gde su  $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ -koreni karakteristične jednačine. Kada je poznato svih  $n$  korenova karakteristične jednačine (4.4) onda se njeno rešenje može napisati:

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t} = \sum_{k=1}^n C_k e^{\lambda_k t} \quad (4.5)$$

gde su  $C_1, \dots, C_n$  — integracione konstante koje se određuju iz početnih uslova i parametara sistema.

Koreni karakteristične jednačine (4.5) mogu biti realni ili kompleksni, i u opštem slučaju mogu se napisati u obliku

pri čemu se razlikuju sledeća tri slučaja:

1. Slučaj kada je u poslednjem izrazu  $\omega=0$ , onda su koreni realni brojevi, tj.  $\lambda_k = -\sigma_k$ .
2. U slučaju kada je u poslednjem izrazu  $\sigma = 0$ , koreni su čisto

imaginarni brojevi, tj.  $\lambda_k = \pm j\omega_k$ .

3. Za slučaj kada je u poslednjem izrazu  $\sigma \neq 0$  i  $\omega \neq 0$ , koreni su konjugovano kompleksni brojevi oblika kao iz poslednjeg izraza.

Iz definicije stabilnosti sistema proizilazi zaključak da će sistem čija karakteristična jednačina ima oblik (4.4) biti *stabilan* samo u tom slučaju ako svi realni koreni i svi realni delovi kompleksnih korenova karakteristične jednačine imaju negativne vrednosti. U tom slučaju svaki član sa desne strane jednačine (4.5) sa vremenom se smanjuje i teži ka nuli kada  $t$  teži beskonačno, pa će i njihov zbir takođe težiti ka nuli, čime je zadovoljen uslov iz poslednjeg izraza date granične vrednosti.

U slučaju kada koreni karakteristične jednačine (4.4) imaju negativne realne vrednosti, onda će svakoj realnoj vrednosti  $\lambda_k = -\sigma_k$  odgovarati u izrazu (4.5) rešenje oblika

$$y_k(t) = C_k e^{-\sigma_k t} \quad 4.6$$

Kada su koreni konjugovano kompleksni brojevi sa negativnim realnim delom onda će rešenje imati oblik:

$$y_k(t) = C_k \cdot e^{-\sigma_k t} \cdot \sin(\omega_k t + \psi_k) \quad 4.7$$

gde je

$C_k$  — početna amplituda,  
- fazni pomak

Ukoliko karakteristična jednačina (4.4) ima bar jedan pozitivan realan koren ili najmanje jedan par konjugovano kompleksnih korenova sa pozitivnim realnim delom, to će bar jedan sabirak na desnoj strani jednačine (4.5) koji odgovara tom korenu ili paru korenova, neograničeno rasti sa vremenom, pa će takav SAU biti *nestabilan*.

Rešenje karakteristične jednačine sa pozitivnim realnim korenom imaće isti oblik kao (4.6) samo sa pozitivnim znakom, a za konjugovano kompleksne korenove sa pozitivnim realnim delom isti oblik kao (4.7), samo sa pozitivnim znakom.

Ukoliko među korenima karakteristične jednačine (4.4) postoji jedan par konjugovano kompleksnih korenova kod kojeg je realni deo ravan nuli, on-

da će rešenje karakteristične jednačine za takav par korenova imati oblik

$$y_k(t) = C_k \sin(\omega_k t + \psi_k) \quad (4.8)$$

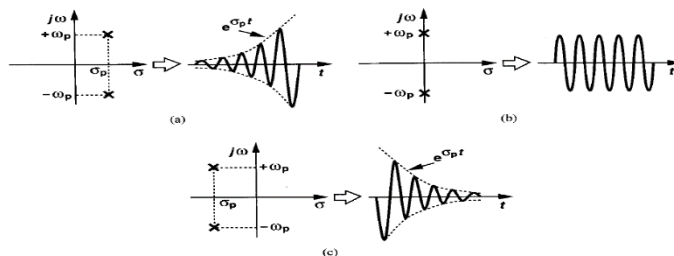
Prelazni proces za takav slučaj imaće oblik neprigušenih oscilacija, što znači da se sistem nalazi na granici stabilnosti, odnosno da je sistem *neutralan*.

#### 4.2.1 Stabilnost i lokacija korenova karakteristične jednačine

Određivanje stabilnosti ili nestabilnosti sistema automatskog upravljanja može se predstaviti geometrijski na kompleksnoj ravni korenova  $s$  (gde je  $s$  — kompleksno promenljiva oblika  $s = \sigma + j\omega$  koja je definisana u Laplasovoj transformaciji). Kompleksna ravan sastoji se od dekartovih koordinata gde se na apscisi nanose realni a na ordinati imaginarni delovi korenova karakteristične jednačine, pozitivni ili negativni, oni će se na kompleksnoj  $s$  ravni nalaziti sa leve ili desne strane imaginarne ose. Ako su svi realni koreni i svi realni delovi kompleksnih korenova negativni, onda će se tačke koje odgovaraju tim korenima nalaziti levo od imaginarne ose, tj. u levoj polu- ravni kompleksne  $s$  ravni.

Prema tome može se reći da je za stabilne linearne sisteme neophodan i dovoljan uslov da se svi koreni karakteristične jednačine sistema nalaze u levoj poluravni kompleksne  $s$  ravni.

Veza između geometrije (lokacije) korenova karakteristične jednačine sistema, odnosno lokacije polova njegove prenosne funkcije, u kompleksnoj  $s$ -ravni i odgovarajućih vremenskih funkcija (originala)  $f(t)$ , prikazana je na slici 4.5 i u tabeli 4.1.



Slika 4.5 Lokacija polova prenosne funkcije u kompleksnoj  $s$  ravni

Tabela 4.1 [31]

Lokacija polova	Oblik vremenske funkcije originala $f(t)$	Karakteristika stabilnosti sistema
a	$K \cdot e^{-\sigma t}$	Stabilan eksponencijalno opadajući
b	$K \cdot e^{-\sigma t} \cdot \sin(\omega t + \psi)$	Stabilan, prigušena sinusoida
c	$K$	Konstanta
d	$K \cdot \sin(\omega t + \psi)$	Neutralan, neprigušena sinusoida
e	$K \cdot e^{+\sigma t}$	Nestabilan, eksponencijalno rastući
f	$K \cdot e^{+\sigma t} \cdot \sin(\omega t + \psi)$	Nestabilan, eksponencijalno rastuća sinusoida

Iz slike 4.5 i tabele 4.1 proizilazi:

1. Polovi na negativnoj realnoj osi s ravni (a) pripadaju članovima funkcije  $f(t)$  oblika  $e^{-\sigma t}$ ,  $t \cdot e^{-\sigma t}$ , itd, zavisno od reda pola
2. Kompleksni polovi u levoj poluravni s ravni (b) pripadaju prigušenoj sinusnoj funkciji
3. Čisto imaginarni polovi (d) pripadaju neprigušenoj sinusnoj funkciji
4. Polovi sa pozitivnim realnim delovima (e) i (f) pripadaju funkcijama koje rastu eksponencijalno sa vremenom

Prema tome, ispitivanje stabilnosti linearnih SAU svodi se matematički na utvrđivanje znaka realnog dela korenova karakteristične jednačine, a geometrijski na određivanje položaja korenova karakteristične jednačine u kompleksnoj ravni u odnosu na imaginarnu osu.

### 4.3 Kriterijumi stabilnosti linearnih sistema automatskog upravljanja

Ispitivanje stabilnosti SAU na osnovu lokacije polova prenosne funkcije u s ravni ili rešavanje njihovih diferencijalnih jednačina ponašanja, predstavlja zametan posao naročito kad su u pitanju sistemi viših redova. Naime, rešavanje algebarskih jednačina prvog i drugog reda vrlo je jednostavno, dok je nalazanje korenova kod jednačina trećeg i četvrtog reda nešto teže. Jednačine, pak, petog i višeg reda analitički se ne mogu rešiti već se za određivanje njihovih korenova koriste približne metode koje su vrlo

komplikovane i nepodesne za praktičnu primenu. Pored toga, i kada se koreni karakteristične jednačine odrede, veoma je teško prema njima utvrditi koji parametri sistema i koliko utiču na stabilnost.




Da bi se ove teškoće izbegle razvijene su pogodne inženjerske metode koje omogućavaju ispitivanje stabilnosti sistema bez rešavanja karakterističnih jednačina. Svi ti postupci se, uobičajeno, jednim imenom nazivaju kriterijumi stabilnosti.

Do sada je razvijeno više kriterijuma stabilnosti, ali se oni mogu svrstati u dve osnovne grupe algebarski i grafo-analitički ili frekventni kriterijumi stabilnosti. Algebarski kriterijumi stabilnosti koriste algebarske operacije sa koeficijentima karakterističnih jednačina ili prenosnih funkcija, dok frekventni kriterijumi koriste grafičke metode određivanja amplitudno-faznih frekventnih karakteristika.

Mi ćemo ovde izložiti samo dva algebarska kriterijuma Rausov i Hurvicov, i tri frekventna Mihajlov, Najkvistov i Bodeov, jer su oni u dosadašnjoj praksi ispitivanja stabilnosti linearnih sistema našli najširu primenu.

U primeni svih kriterijuma stabilnosti treba biti veoma pažljiv. Naime, od posebne je važnosti utvrditi da li je izabrani kriterijum u saglasnosti sa strukturnim obeležjem sistema, da li su na raspolaganju svi neophodni podaci kao i da li su ispunjeni svi uslovi za njegovu nesmetanu primenu. Pokazuje se, takođe, veoma često da se isti sistem može ispitati korišćenjem različitih kriterijuma. I tu treba biti inženjerski racionalan i izabrati onaj, koji za date podatke omogućava iznalaženje rešenja na najjednostavniji način [16].

Prvi kriterijum stabilnosti (koji je bio algebarski) uradili su nezavisno jedan od drugoga matematičari Rausov (Routh) 1877. godine (Engleska) i Hurvic (Hurwitz) 1895. godine (Nemačka) u obliku algebarskih nejednačina dobijenih po određenim pravilima od koeficijenata karakteristične jednačine. Oba ova kriterijuma daju iste algebarske nejednačine samo se razlikuju po opštem obliku njihovog dobijanja.

		
Raus(Routh)	Hurvic(Hurwitz)	Bode

### 4.3.1 Algebarski kriterijumi stabilnosti

Algebarski kriterijumi stabilnosti imaju opšti karakter i u tom smislu mogu se primenjivati kako za otvorene, tako i za zatvorene SAU. Za njihovu primenu dovoljno je poznavati matematički model sistema ili bar njegov karakteristični polinom. Baziraju se na izvođenju određenih algebarskih operacija nad koeficijentima karakterističnog polinoma po čemu su i dobili naziv. Svi oni navode se bez dokaza.

#### 4.3.1.1 Hurvicov kriterijum stabilnosti

Ovaj kriterijum polazi od karakteristične jednačine sistema *zatvorenog regulacionog kruga*:

$$(4.9)$$

Hurvicov kriterijum stabilnosti može se izraziti pomoću nekoliko uslova koji se postavljaju na koeficijente iz karakteristične jednačine koja je data nepred.

- nužni uslov stabilnosti:

Svi koeficijenti karakteristične jednačine moraju biti različiti od 0 i imati isti predznak.

- dovoljan uslov stabilnosti je da sve dijagonale subdeterminante i glavna determinanta moraju biti veći od nule.

Pri sastavljanju determinante Hurvica treba se pridržavati pravila da se u glavnoj dijagonali od gornjeg levog do donjeg desnog ugla upisuju koeficijenti od  $a_{n-1}$  do  $a_0$ . Prvo se formiraju prve dve vrste pa ostale tako što

se prva i druga vrsta pomere za jedno mesto udesno. Ako je koeficijent s indeksima veći od  $n$  ili manji od 0 onda se upisuje 0 [3].

Iz ove determinante potrebno je izdvojiti tzv. subdeterminante ili minore.

Formiranje Hurvicove determinante prikazaćemo na primeru karakteristične jednačine trećeg stepena:

Ovde je potrebno izdvojiti tzv. subdeterminante ili minore:

a to je sama Hurvicova determinanta.

Hurvicov kriterijum stabilnosti zasnovan na ovom neophodnom postupku je definisan:

Potreban i dovoljan uslov da svi koreni karakteristične jednačine imaju negativne realne delove, odnosno da je sistem apsolutno stabilan, jeste da svi koeficijenti karakteristične jednačine budu veći od nule i da sve Hurvicove determinante budu veće od nule.

Ako bar jedan ili oba ova uslova nisu ispunjena, razmatrani sistem nije stabilan

Prednosti ovog kriterijuma su te da nije potrebno poznavati rešenje diferencijalne jednačine da bi se ustanovila apsolutna stabilnost, već samo koeficijente karakteristične jednačine.

Nedostaci koje ovaj kriterijum ima su: da mora biti poznata diferencijalna jednačina, ne može da se odredi uticaj pojedinih elemenata na stabilnost

sistema, određuje se samo apsolutna stabilnost, nema informacija o relativnoj stabilnosti, primena ovog kriterijuma za sisteme višeg reda nije prikladna jer se povećava broj dopunskih nejednačina.

Hurvicov kriterijum stabilnosti ekvivalentan je Rausovog kriterijumu stabilnosti.

### 4.3.1.2 Rausov kriterijum stabilnosti

Rausov kriterijum je opštiji od Hurvicovog kriterijuma. Hurvicov kriterijum stabilnosti se može izvesti iz Rausovog kriterijuma. Osnovna prednost nad Hurvicovim kriterijumom je mogućnost određivanja broja desnih korena karakterističnog polinoma, ako je on nestabilan. Rausov kriterijum se zasniva na formiranju odgovarajuće tabele - *Rausove tabele* - na osnovu koeficijenata karakterističnog polinoma. U udžbeničkoj literaturi postoje različiti prilazi formiranju Rausove tabele [30].

Za karakterističnu jednačinu sistema:  $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ , Rausov kriterij se svodi na formiranje sledeće tabele [30]:

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	...
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	...
$s^{n-2}$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	...
$s^{n-3}$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	...
$s^{n-4}$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...
$s^0$	$H_1$			

Koeficijenti  $A_i, B_i, C_i$  - se računaju na sledeći način:

$$A_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$A_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$B_1 = \frac{A_1 a_{n-3} - a_{n-1} A_2}{A_1}$$

$$B_2 = \frac{A_1 a_{n-5} - a_{n-1} A_3}{A_1}$$

$$C_1 = \frac{B_1 A_2 - A_1 B_2}{B_1}$$

$$C_2 = \frac{B_1 A_3 - A_1 B_3}{B_1}$$



Da bi karakteristična funkcija imala sve polove u levoj  $s$ -poluravni (asimptotski stabilan sistem) potrebno je i dovoljno da su svi koeficijenti u prvoj koloni koeficijentata Rausove tabele pozitivni [30].

Po formiranju tabele, za zaključivanje o stabilnosti sistema važna je samo prva kolona Rausove tabele - Rausova kolona, uokvirena u tabeli. Kriterijum Rausa glasi:

Dovoljan uslov stabilnosti sistema je da su svi članovi Rausove kolone istog znaka. Ako članovi Rausove kolone nisu istog znaka, sistem je nestabilan, a broj promena znaka u Rausovoj koloni jednak je broju desnih korena karakterističnog polinoma.

Pri sasavljanju Rausove tabele, u cilju pojednostavljenja postupka računanja, dozvoljeno je, pri formiranju vrsti, sve članove vrste koja se formira množiti istim pozitivnim brojem. Obično se množenje vrši apsolutnom vrednošću člana Rausove kolone koji prethodi vrsti koja se formira, jer se po datoj proceduri svi članovi posmatrane vrste dobijaju deljenjem s tim članom.

Može se dogoditi da je član Rausove kolone koji prethodi vrsti koja se formira jednak nuli, što dovodi do deljenja s nulom. U tom slučaju se taj član zamenjuje opštim brojem i formiranje Rausove tabele se nastavlja s njim. Po formiranju Rausove kolone, pusti se da taj opšti broj teži nuli i dobijaju granične vrednosti njenih članova. S obzirom da su u Rausovoj koloni bitni znaci, postupak utvrđivanja stabilnosti ili broja desnih korena se sprovodi kako je napred definisano [30].

### 4.3.2 Frekventni kriterijumi stabilnosti

Frekventni kriterijumi se zasnivaju na korišćenju frekventnih karakteristika sistema čija se stabilnost ispituje. U tom slučaju oni se dele na kriterijume koji ne uzimaju u obzir strukturu sistema (Mihajlov) i one koji su namenski određeni za posebnu klasu sistema, u ovom slučaju za zatvorene sisteme automatskog upravljanja (Najkvist) [16].

Posebna prednost frekventnih kriterijuma ogleda se u činjenici da se potrebne frekventne karakteristike mogu eksperimentalno odrediti što znači da su za njihovu primenu nije obavezno poznavanje odgovarajućeg matematičkog modela.

Pored toga, za razliku od algebarskih, frekventni kriterijumi pružaju mogućnost da se odredi i stepen, odnosno rezerva stabilnosti razmatranog sistema [16].

### 4.3.2.1 Mihajlov kriterijum stabilnosti

Kriterijum Mihajlova ima opšti karakter jer se može primenjivati kako za otvorene, tako i na zatvorene sisteme automatskog upravljanja. Ovaj kriterijum polazi od karakteristične jednačine sistema:

$$(4.11)$$

koja se može prikazati u obliku proizvoda:

$$(4.12)$$

Gde su:

Kada se u toj jednačini  $s$  zameni sa  $j\omega$ , polinom je:

$$(4.13)$$

Možemo ga zapisati i kao karakterističan kompleksan broj koji se naziva vektor Mihajlova.

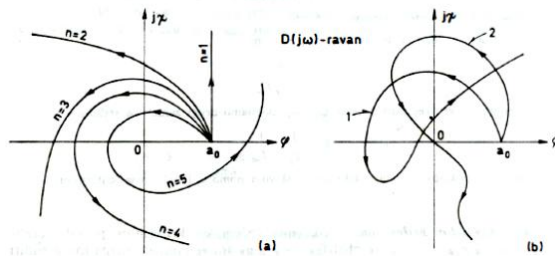
$$(4.14)$$

Primetimo da je za  $\omega = 0$  vrednost karakterističnog polinoma jednaka:

poslednjem koeficijentu što nam govori o tome da kriva Mihajlova uvek kreće sa realne ose, i to sa njenog pozitivnog ili negativnog dela, zavisno od znaka ovog najmanjeg koeficijenta.

Vektor  $D(j\omega)$  može se prikazati u kompleksnoj ravni. Ako se pri tome parametar  $\omega$  menja od nula do beskonačnosti, vrh vektora će opisivati krivu liniju, kojoj svaka tačka odgovara određenoj vrednosti  $\omega$ . Kriva se naziva hodograf vektora Mihajlova.

Potrebno je menjati kružnu frekvenciju parova od 0 do  $\infty$  i sastaviti tablicu parova U i V, pa na osnovu toga nacrtati hodograf Mihajlova.



Slika 4.7. Hodografi vektora Mihajlova : a) za stabilne sisteme, b) za nestabilan sistem i sistem na granici stabilnosti [3]

Na osnovu prikazanih hodografa Mihajlova, jasno je da za sistem prvog reda hodograf Mihajlova treba da prođe samo kroz jedan kvadrant, za sistem drugog reda kroz dva kvadranta, za sistem trećeg reda kroz tri i tako dalje, pri čemu je važno da hodograf Mihajlova uvek polazi sa realne ose i neophodno je da prolaskom kroz kvadrante obavi naizmeničnim presecanjem realne i imaginarne ose.

Navedena opažanja se mogu striktno dokazati, pa se i kriterijum Mihajlova može preformulisati i iskazati na sledeći način:

Da bi sistem bio stabilan potrebno je i dovoljno da se vektor Mihajlova ne poprimajuću vrednost nula, pri promeni  $\omega$  od nula do beskonačnosti obrne oko koordinatnog početka u svojoj ravni za ugao  $-n\pi$  u pozitivnoj smeru ( $n$  je stepen karakteristične jednačine sistema), kao što je prikazano na prethodnoj slici.

Primer 1:

Ispitati stabilnost sistema pomoću kriterijuma Mihajlova koji ima karakterističnu jednačinu [3]:

Iz jednačine možemo videti da je vektor Mihajlova:

sa realnim delom:

imaginarnim delom:

Potrebno je menjati kružnu frekvenciju parova od 0 do  $\infty$ , sastaviti tablicu parova U i V, pa na osnovu toga nacrtati hodograf Mihajlova. Da bi smo lakše dosli do rezultata, odaberemo  $\omega$  tako da dobijemo odredjenje vrednosti za U i V=0 i vrednosti V uz U=0. Za naš primer je V=0 sto znači da je vrednost kružne frekvencije iz imaginarnog dela

Odakle je  $\omega = \sqrt{-U/V}$ . uzimamo samo pozitivne vrednosti za kružnu frekvenciju, jer fizički negativne ne postoje.

Za ove vrednosti kružne frekvencije imali bismo:

Za

$\omega$  se nađe  $\omega = \sqrt{-U/V}$ ,

pa je

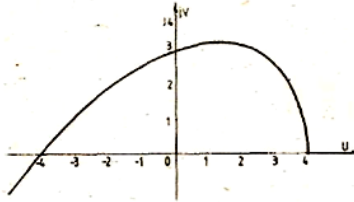
Na osnovu ova tri para U i V može se konstruisati hodograf Mihajlova. Zbog tačnijeg crtanja hodografa, izračunajmo još nekoliko parova. Odabranim vrednostima za U (1, 2, 3, -1, -2, -3) ćemo računati kružnu frekvenciju, zbog preglednosti:

Pošto sada imamo dovoljno podataka za Mihajlov hodograf, možemo ga i nacrtati. Prikaz za dati primer dat je na slici 4.8.

Odabranim vrednostima za U (1, 2, 3, -1, -2, -3) ćemo računati kružnu frekvenciju, pa pojedine vrednosti za V. Dobijene rezultate možemo prikazati tabelarno, zbog preglednosti [3]:

	0	$\infty$	1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
U	4	-4	0	1	2	3	-1	-2	-3
V	0	0	3	3,24	3,18	2,62	2,5	1,83	0,99

Pošto sada imamo dovoljno podataka za Mihajlov hodograf, možemo ga i nacrtati. Prikaz za dati primer dat je na slici .



Slika4.8 . Hodograf Mihajlova za dati primer[3]

Iz dobijenih rezultata (analitički) i hodografa Mihajlova (grafički) vidimo da promenom kružne frekvencije od nula do beskonačno (preko odabranih vrednosti) hodograf prolazi redom kroz sva tri kvadranta (jednačina je trećeg reda), sa početkom u 4. To znači da su ispunjeni uslovi prema kriterijumu Mihajlova, te je sistem stabilan.

Pored toga, ovim kriterijumom se može zaključiti i o tome koliko je sistem stabilan, odnosno o tzv. rezervi stabilnosti. Jer, ukoliko hodograf Mihajlova prolazi bliže koordinatnom početku, utoliko je manje stabilan. Ako hodograf prolazi kroz koordinatni početak, takav sistem se nalazi na granici stabilnosti.

#### 4.3.2.2 Najkvistov (Nyquist-ov) kriterijum stabilnosti

Najkvistov kriterijum spada u grupu grafo-analitičkih, frekventnih kriterijuma za ispitivanje stabilnosti sistema. Osnovni i polazni podatak za primenu Najkvistovog kriterijuma jeste poznavanje prenosne funkcije, odnosno frekventne karakteristike otvorenog kola sistema regulisanja. Ona može biti poznata ili u analitičkom ili u grafičkom obliku.

Najkvistov kriterijum omogućava da se stabilnost sistema sa zatvorenim kolom (zatvorenog sistema) ispita pomoću prenosne funkcije sistema sa otvorenim kolom.

Prenosna funkcija sistema sa zatvorenim kolom, ima oblik:

$$(4.15)$$

Treba utvrditi da li se neki od korenova jednačine u imeniocu:

$$1+W(s)=0 \quad (4.16)$$

nalazi u desnoj poluravni kompleksne  $s$ -ravni, odnosno da li neki od korenova jednačine  $1+W(s)=0$  ima pozitivan realni deo.

Označimo sa  $F_{ok}(s)=1+W(s)$  prenosnu funkciju sistema sa otvorenim kolom, koja se u ovim prilikama, naziva Najkvistov-om krivom.

Naime, u koliko je otvoreno kolo sistema regulisanja stabilno, primenjuje se poseban Najkvistov kriterijum.

Ukoliko otvoreno kolo sistema nije stabilno, primenjuje se opšti Najkvistov kriterijum. U ovom drugom slučaju od posebne je važnosti utvrditi broj polova prenosne funkcije otvorenog kola koji leže u desnoj poluravni kompleksne ravni  $s$ , odnosno imaju pozitivne realne delove.

Prema tome, ukoliko je na bilo koji način poznata frekventna karakteristika otvorenog kola, prvi i osnovni zadatak je utvrditi broj polova prenosne funkcije otvorenog kola sa pozitivnim realnim delom i zatim, shodno utvrđenom činjeničnom stanju primeniti odgovarajući slučaj Najkvistovog kriterijuma.

### **Poseban Najkvistov kriterijum**

Teorema . Ako je otvoreno kolo sistema regulisanje stabilno, da bi sistem regulisanja bio stabilan, potrebno je i dovoljno da deo hodografa frekventne karakteristike  $F_{ok}(j\omega)$  otvorenog kola pri promeni učestanosti  $\omega \in [0 + \infty]$  ne obuhvati, i ne prođe kroz tačku  $C[-1, j0]$ .

Ako ovaj uslov nije ispunjen sistem regulisanja nije stabilan. On tada može biti granično stabilan ili nestabilan.

Broj polova prenosne funkcije otvorenog kola sa pozitivnim realnim delom jednak je nuli, što se obeležava sa  $P=0$ , otvoreno kolo je stabilno. Sada se može zaključiti da je jedino sistem regulisanja, sa frekventnim karakteristikama otvorenog kola  $F_{ok}(j\omega)$  stabilan, jer ista ne obuhvata i ne prolazi kroz tačku  $C[-1, j0]$ .

## Opšti Najkvistov kriterijum

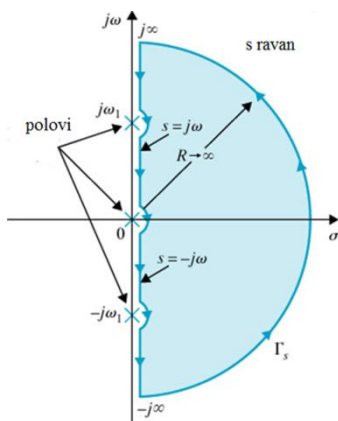
### Teorema

Ako prenosna funkcija otvorenog kola  $W_{ok}(s)$  sistema regulisanja ima  $P$  polova sa pozitivnim realnim delom, onda, da bi taj sistem regulisanja bio stabilan, potrebno je i dovoljno da pri promeni učestanosti  $\omega \in [+\infty, -\infty]$  hodograf frekventne karakteristike  $F_{ok}(j\omega)$  otvorenog kola tog sistema regulisanja tačno  $P$  puta obuhvati kritičnu tačku  $C[-1, j0]$  u negativnom matematičkom smeru i da ni jedanput ne prođe kroz nju.

Izvođenje i dokazi frekventnih kriterijuma stabilnosti baziraju se na dobro poznatoj Košijevoj teoremi argumenata, nastaloj u teoriji funkcija kompleksne promenljive. S druge strane, u matematičkom smislu, reč je o konformnom preslikavanju specificiranih domena iz  $s$  ravni u ravan frekventne karakteristike, u slučaju Najkvistovog kriterijuma, u ravan frekventne karakteristike otvorenog kola,  $F_{ok}(j\omega)$ .

Da bi se uspešno primenila Košijeva teorema argumenata, funkcija preslikavanja ne sme da ima singularitete na konturi koja se preslikava, odnosno, moraju se izbeći tačke na konturi u kojima je vrednost funkcije preslikavanja neodređena.

Ako prenosna funkcija sistema sa otvorenim kolom ima polove na imaginarnoj osi, onda je konturu u  $s$ -ravni neophodno preinačiti tako da se ti polovi obiđu, kako bi se mogao primeniti Najkvistovog kriterijum stabilnosti. Obilaženje polova na imaginarnoj osi vrši se sa desne strane uz pomoć polukružnica sa beskonačno malim radijusom koji teži nuli, kako je to prikazano na slici 4.9 za slučaj kada se nalazi jedan pol u koordinatnom početku i jedan par konjugovano kompleksnih polova na imaginarnoj osi. Ovakvim preinačenjem konture  $G$  postiže se da ona i dalje obuhvata celu desnu poluravan  $s$ -ravni a da se pri tom na njoj ne nalaze polovi koji leže na imaginarnoj osi. Izgled tako usvojene konture prikazan je na narednoj slici.



Slika 4.9 Zaobilaženje polova prenosne funkcije otvorenog kola polukrugovima beskonačno malog poluprečnika

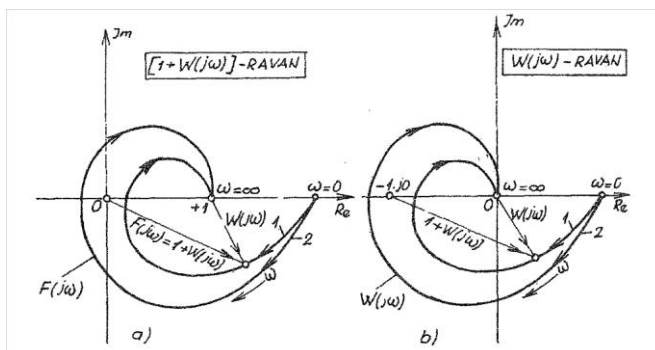
Pošto je kod stabilnog sistema sa zatvorenim kolom funkcija  $F(s)$  ne sme da ima ni jednu nulu u desnoj poluravni  $s$  ravni, to se Najkvistov kriterijum stabilnosti može izraziti na sledeći način: Da bi broj nula funkcije  $F(s)$  i unutar konture u  $s$  ravni bio rava nuli, što je neophodno da bi sistem automatskog upravljanja sa zatvorenim kolom bio stabilan, potrebno je i dovoljno da pri promeni  $\omega \in [+\infty, -\infty]$  broj obrtaja vektora  $F(j\omega)$  u smeru kazaljke na satu oko koordinatnog početka u  $[1+W(j\omega)]$ -ravni bude ravan nuli.

Pošto se karakteristična funkcija  $F_{ok}(j\omega) = [1+W(s)]$  razlikuje od frekventne prenosne funkcije sistema sa otvorenim kolom  $W_{ok}(j\omega)$  za  $+1$ , to je očigledno da koordinatnom početku u  $[1+W(j\omega)]$ -ravni odgovara tačka  $(-1, j0)$  u  $W_{ok}(j\omega)$ -ravni, slika 4.10, a) i b). Prema tome, umesto posmatranja obrtanja vektora  $F(j\omega)$  oko koordinatnog početka u  $[1+W(j\omega)]$ -ravni, moguće je posmatrati njegovo obrtanje oko tačke  $(-1, j0)$  u  $W_{ok}(j\omega)$ -ravni, što se u praksi najčešće koristi.

Hodograf vektora  $F(j\omega)$  u  $[1+W(j\omega)]$ -ravni, odnosno vektora  $W_{ok}(j\omega)$  u  $W(j\omega)$ -ravni, predstavlja amplitudno-faznu frekventnu karakteristiku (kako je to napred objašnjeno), pomoću koje se Najkvistov kriterijum može definisati na sledeći način: - sistem sa zatvorenim kolom je stabilan ako hodograf  $F_{ok}(j\omega) = [1+W(s)]$  ne obuhvata koordinatni početak, (hodograf l



na slici 4.10 a), a nestabilan ako obuhvata koordinatni početak (hodograf 2 na slici 4.10 a).



Slika 4.10. - a) - hodograf vektora ,  $F_{ok}(j\omega) = [1 + W(s)]$ , b) - njemu odgovarajući hodograf  $W(j\omega)$  za slučaj 1 - stabilan, 2 - nestabilan SAU[3]

Isti ovaj kriterijum može se izraziti preko hodografa sistema sa otvorenim kolom  $W(j\omega)$  i on glasi: - Sistem sa zatvorenim kolom biće stabilan ako hodograf otvorenog sistema  $W(j\omega)$  ne obuhvata tačku sa koordinatama  $(-1, j0)$  i ne prolazi kroz istu (hodograf 1 na slici.4.10 b.), a biće nestabilan ako obuhvata tačku  $(-1, j0)$  (hodograf 2 na slici 4.10 b).

Ovakva formulacija Najkvistovog kriterijuma preko hodografa otvorenog sistema  $W(j\omega)$  jeste  $(-1, j0)$  najpogodnija i ona se praktično najviše koristi.

Potrebno je napomenuti da se u opštem slučaju ne može suditi o stabilnosti SAU sa zatvorenim kolom na osnovu njegove stabilnosti u otvorenom kolu, jer se zatvaranjem sistema bitno menjaju njegove dinamičke karakteristike. Tako se može dogoditi da jedan SAU sa otvorenim kolom bude nestabilan i da njegova prenosna funkcija ima  $P$  polova u desnoj poluravni  $s$ -ravni, a da isti taj sistem sa zatvorenim kolom bude stabilan. Takav SAU sa zatvorenim kolom biće stabilan ako Najkvistova kriva  $W(j\omega)$  pri promeni  $\omega \in [+∞, -∞]$  obuhvata tačku  $(-1, j0)$   $P$  puta u smeru suprotnom kazaljci na satu (tj. u pozitivnom smeru).

Najkvistove krive (amplitudno-fazne karakteristike) svih sistema sa realnim parametrima su simetrične u odnosu na realnu osu, što znači da hodograf  $W(-j\omega)$  za  $\omega$  od 0 do  $-∞$  predstavlja sliku u ogledalu hodografa  $W(j\omega)$  za  $\omega$  od 0 do  $+∞$ , pa se crtanje Najkvistovih krivih može ograničiti samo na pozitivne vrednosti  $\omega$ .

### 4.3.2.3 Bodeov kriterijum stabilnosti

Pored svojih dobrih strana Najkvistovog kriterijuma, ima i izvesnih nedostataka. Jedna njegova mana ogleda se u teškoćama oko konstruisanja Najkvistove krive za složenije sisteme. Drugi, i to veoma značajan nedostatak sastoji se u tome što je pomoću Najkvistovog kriterijuma teško odrediti uticaj promene pojedinih parametara na stabilnost sistema. Isto tako upotreba linearne skale modula za predstavljanje frekventnih prenosnih funkcija na kompleksnoj ravni utiče na opseg frekvencija i u dosta slučajeva ograničava ih na oblast Najkvistove krive u blizini tačke  $(-1, j0)$ .

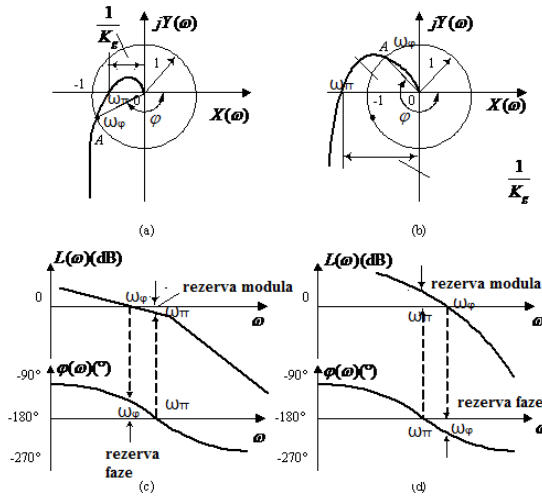
Da bi otklonio pomenute nedostatke Najkvistovog kriterijuma i uprostio postupak projektovanja stabilnih sistema, H. W. Bode je interpretirao Najkvistov kriterijum u logaritamskom obliku. Naime, Bode je pokazao da se stabilnost SAU sa zatvorenim kolom može odrediti ne samo pomoću amplitudno-fazne karakteristike (Najkvistove krive), nego isto tako, i to mnogo jednostavnije, pomoću logaritamske amplitudno-frekventne i logaritamske fazno-frekventne karakteristike sistema sa otvorenim kolom, poznatih kao Bode-ovi dijagrami.

Moduli i faze vektora  $W(j\omega)$  za učestanosti  $\omega \in [0 + \infty]$  predstavljeni su u polarnom koordinatnom sistemu sa jednom krivom poznatom kao — Najkvistova kriva, dok se u pravouglom koordinatnom sistemu mogu predstaviti sa dve odvojene krive, modula i faze u funkciji frekvencije.

Umesto izražavanja modula i faze u funkciji frekvencije, Bode ih je iz praktičnih razloga izrazio u funkciji logaritma frekvencije ( $\log \omega$ ) i dobio logaritamske frekventne karakteristike koje smo analizirali prethodnim lekcijama.

Za određivanje stabilnosti sistema pomoću Bodeovog kriterijuma koristi se definicija Najkvistovog kriterijuma, pri čemu se jedinični krug ( $r = A = 1$ ) i negativni deo realne ose Najkvistovog dijagrama transformišu u apscisne ose Bodeovih dijagrama. Da bi, prema Najkvistovom kriterijumu, jedan stabilan sistem sa otvorenim kolom bio stabilan i u zatvorenom kolu, neophodno je da presečna tačka Najkvistove krive sa negativnom realnom poluosom, kojoj odgovara frekvencija  $\omega_\pi$  leži sa desne strane od kritične tačke  $(-1, j0)$ , odnosno da u toj tački  $\omega_\pi$  modul bude manji od 1. Ova definicija preko Bodeovih dijagrama glasi: da bi jedan stabilan sistem sa otvorenim kolom

bio stabilan i u zatvorenom kolu, potrebno je da u tački sa frekvencijom  $\omega_\pi$  vrednost modula u decibelima bude manja od 0, odnosno da je negativna (slika 4.11).



Slika 4.11 a) Najkvistova kriva za stabilan sistem, b) Najkvistova kriva za nestabilan sistem, c) Bode-ovi dijagrami za jedan stabilan sistem d) Bode-ovi dijagrami za jedan nestabilan sistem

Kod stabilnog sistema  $\omega_\pi > \omega_\varphi$ , a kod nestabilnog je obrnuto tj.  $\omega_\pi < \omega_\varphi$ . Kada je  $\omega_\pi = \omega_\varphi$  sistem je na granici stabilnosti. Istovremeno, presečna tačka fazne karakteristike  $\varphi(\omega)$  sa pravom  $(-\pi)$  za stabilan sistem sa zatvorenim kolom treba da leži u oblasti negativnih vrednosti modula ( $A(\omega) < 1$  ili  $L(\omega) < 0$ ), a za nestabilan sistem u oblasti pozitivnih vrednosti modula ( $A(\omega) > 1$  ili  $L(\omega) > 0$ )

### 4.3.3 Pretek faze i pretek pojačanja

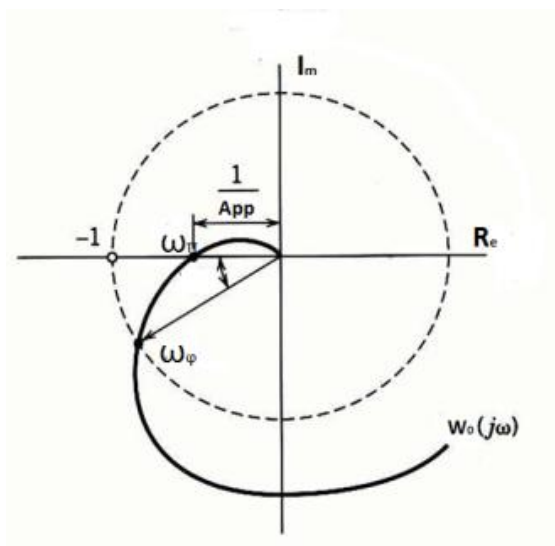
Promena vrednosti parametara sistema može uzrokovati nestabilan režim rada sistema. Osnovni razlozi zbog kojih teorijski stabilan sistem može postati nefunkcionalan su:

1. Vrednosti pojedinih parametara dinamičkih komponenata sistema nisu dovoljno tačno određene
2. Parametri elemenata kao i funkcionalnih celina sistema menjaju se u procesu eksploatacije zbog starenja

Za normalno funkcionisanje SAU neophodno je da se osigura stabilan režim rada u predviđenim granicama promena parametara sistema. Ovom zahtevu može se udovoljiti tako da se sistem projektuje s potrebnim pretekom (rezervom ili osiguranjem) faze i pojačanja. Osiguranje stabilnosti određuje se u skladu s primenjenim kriterijumom stabilnosti. Pretek faze i pretek pojačanja uobičajene su mere za specifikaciju udaljenosti krive od tačke  $(-1, j0)$  tj. mere relativne stabilnosti sistema.

Pretek faze i pretek pojačanja mogu se određivati na više različitih načina (analitičkom metodom, na temelju polarnog ili Bodeovog dijagrama).

U praksi se najviše koristi definisanje stabilnosti na osnovu Najkvistovog kriterijuma, tj. udaljenošću hodografa  $W_0(j\omega)$  otvorenog sistema od kritične tačke  $(-1, j0)$ .



Slika 4.12 Grafički prikaz preteka faze i preteka pojačanja za stabilan sistem

Pretek faze ili fazno osiguranje stabilnosti određeno je izrazom:

$$(4.17)$$

za

Pretek pojačanja ili amplitudno osiguranje stabilnosti definisano je izrazom:

$$\text{Ili } A_{pp} [dB] = 20 \log \left| \frac{1}{\text{Re}[W_0(j\omega_\pi)]} \right|$$

Frekvencija kritične amplitude ( ): definiše se kao frekvencija pri kojoj modul prenosne funkcije otvorene petlje ima vrednost 1 tj. pri kojoj polarni dijagram seče kružnicu radijusa 1 (videti sliku 4.12)

Frekvencija kritične faze ( ): definiše se kao frekvencija pri kojoj imaginarni deo prenosne funkcije otvorene petlje ima vrednost 0 tj. pri kojoj polarni dijagram seče realnu osu (videti sliku 4.12)

Pretek pojačanja određuje se kao recipročna vrednost udaljenosti između ishodišta i tačke u kojoj polarni dijagram seče realnu osu.

Pretek faze određuje se kao ugao koji s pozitivnim delom realne ose zatvara pravac koji prolazi kroz ishodište i tački preseka polarnog dijagrama i kružnice radijusa 1.

## **5. OCENA KVALITETA LINEARNIH SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA I KRITERIJUMI ZA SINTEZU**

### **5.1 Uvod**

Da bi se mogla dati ocena kvaliteta ponašanja projektovanog sistema, bilo bi potrebno da se u svakom trenutku može odrediti greška između stvarne vrednosti izlazne (upravljane) veličine sistema i referentne vrednosti definisane ulaznom veličinom to jest omogući sticanje uvida u veličinu odstupanja vrednosti upravljane promenljive u odnosu na unapred zadate vrednosti. Ukoliko je ova vrednost poznata za svaki trenutak vremena tada postoji potpuna informacija o svojstvima sistema kojeg posmatramo [27],[31]. Međutim, određivanje trenutnih vrednosti grešaka praktično je veoma teško (ili nemoguće) ostvariti zbog velike raznolikosti zakona promene ulazne veličine, koja se u normalnom režimu rada može pojaviti. Radi toga se prethodno određuju kriterijumi kvaliteta ponašanja prema kojima se vrši procena određenih karakteristika sistema koje se dobijaju kao odziv na pobudu sistema tipičnim ulaznim funkcijama.

Uzimajući u obzir raznolikost signala koji se mogu pojaviti na ulazu sistema, iz praktičnih razloga, usvojeni su tipični oblici njihove promene kao što su odskočna, nagibna, i parabolična funkcija kako bi se ostvario standardan pristup pri oceni kvaliteta ponašanja sistema.

U literaturi predloženo je i više tipova kriterijuma, odnosno indeksa performansi, za ocenu kvaliteta ponašanja sistema koji se mogu svrstati u četiri grupe [27],[31].

Prvu grupu sačinjavaju kriterijumi koji služe za ocenu tačnosti rada sistema u stacionarnom režimu, gde se kao kriterijum daje veličina dopuštenog signala greške u ustaljenom stanju.

Drugu grupu čine kriterijumi za ocenu stepena relativne stabilnosti, kojim se određuje rezerva stabilnosti sistema u prelaznom režimu tj. koji služi kao mera za procenu koliko je sistem udaljen od granice stabilnosti (jer pri projektovanju uvek polazimo od toga da sistem treba da bude apsolutno

stabilan). Njihovom primenom stiče se informacija o tome koliko je sistem daleko od granice stabilnosti. U zavisnosti od domena u kojem se vrši analiza primenjuju se kriterijumi kao što su unapred zadato vreme smirenja prelaznog procesa, stepen relativne stabilnosti, amplitudna i fazna rezerva sistema.

Treću grupu sačinjavaju kriterijumi koji služe za ocenu brzine odziva sistema na pobudu odgovarajućim ulaznim signalima i poremećajima.

Četvrtu grupu kriterijuma čine integralni indeksi ponašanja sistema u prelaznom režimu, kao sveobuhvatni kriterijum za ocenu nekih opštih performansi sistema koje obuhvataju tačnost, rezervu stabilnosti i brzinu reagovanja. To se obično radi pomoću integraljenja krive prolaznog režima sa ciljem minimizacije vrednosti integrala greške (odnosno kvadrata greške) između željenog i stvarnog izlaza sistema [27],[31].

Kriterijumi prve tri grupe omogućavaju uvid u pojedine performanse sistema. Za razliku od njih integralni kriterijumi predstavljaju pokazatelje koji svojom vrednošću objedinjavaju informacije o relevantnim dinamičkim karakteristikama sistema kao što su pretek stabilnosti i brzina reagovanja.

Određivanje rezerve stabilnosti i brzine reagovanja vrši se pomoću metoda u vremenskom i frekventnom domenu. Obe ove metode našle su široku primenu i koriste se paralelno kod projektovanja novih sistema.

Nameće se pitanje da li je moguće ustanoviti vezu između kriterijuma u vremenskom i u frekventnom domenu. Veza između kriterijuma u vremenskom i frekventnom domenu ima složeni karakter i može se odrediti samo u nekim jednostavnim slučajevima sistema prvog i drugog reda tako da se praktično ne može koristiti.

Kada se za neki fizički sistem jednom odrede diferencijalne jednačine koje predstavljaju njegov matematički model, onda se dalja analiza može vršiti nezavisno od prirode fizičkog sistema. Za analizu nije bitno da li je sistem hidraulični, pneumatski, električni, mehanički ili kombinacija ovih. Međutim, značajan je faktor pojačanja i broj integratorskih članova u sistemu, kao i vrsta ulazne, (ili poremećajne) funkcije kojom se sistem pobuđuje.

Kao što je u prethodnim metodskim jedinkama istaknuto da se prenosna funkcija SAU. sa otvorenim kolom može se uvek svesti na sledeći opšti oblik [31]:

$$W(s) = \frac{K_r (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + 1)}{s^r (a_n s^{n-r} + a_{n-1} s^{n-r-1} + \dots + a_1 s + 1)} \quad (5.1)$$

gde je:

$K_r$  [sec] - faktor pojačanja prenosne funkcije,  
 $r$  - stepen (eksponent) integratorskog člana  $s$  u imeniocu koji označava broj integralnih elemenata u sistemu.

Za analizu i sintezu sistema pomoću Bodeovih dijagrama pogodno je prenosnu funkciju otvorenog kola svesti na faktorizovani oblik:

$$\text{_____} \quad (5.2a)$$

Ako se znaju nule -  $Z_i$  i polovi -  $P_i$  početne prenosne funkcije, onda se prenosna funkcija otvorenog kola, kako je to objašnjeno u prethodnim metodskim jedinkama, može napisati pomoću faktora u obliku:

$$\text{_____} \quad (5.2b)$$

gde je  $N_1(s)$  polinom u brojniku a  $D_1(s)$  polinom u imeniocu jednačine (5.1).

U odnosu na stepen (eksponent)  $r$  za  $s$  u jednačini (5.2a) i (5.2b), sistema se klasifikuju u »tipove«. Pri tome moramo voditi računa o tome da se tip ne pomeša sa redom; red je jednak stepenu polinoma od  $s$  u imeniocu, a tip odgovara eksponentu  $r$  integratorskog člana  $s$  u imeniocu.

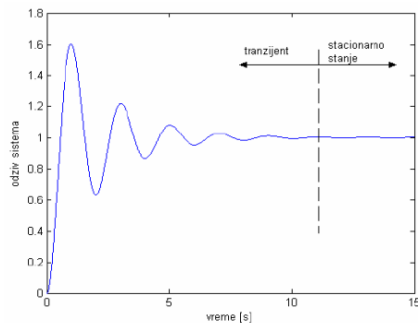
Tako se za sistem predstavljen izrazima (5.2a) i (5.2b), u kojoj je  $r = 0$ , kaže da je nultog tipa, odnosno tipa 0, za  $r = 1$  kaže se da je sistem tipa 1, za  $r = 2$  da je tipa 2, itd.

Kod sistema tipa 0, nema integratora, kod sistema tipa 1, ima jedan integrator, sistem tipa 2 ima dva integratora (dva integralna elementa) [31].



## 5.2. Osobine stacionarnog stanja

Pod pretpostavkom da je kontinualan, linearan, vremenski nepromenljiv sistem stabilan u odzivu sistema mogu se razaznati dve različite prirode ponašanja. Izračunati odziv jednog ovakvog sistema je ekvivalentno rešiti odgovarajuću diferencijalnu jednačinu. Kao što prilikom rešavanja linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima rešenje čine dva sabirka, jedno potiče od takozvane homogene diferencijalne jednačine i njoj odgovarajuće homogeno rešenje, dok je drugi sabirak takozvano partikularno rešenje. Ako je sistem koji opisuje ta diferencijalna jednačina stabilan, tada će posle izvesnog vremena homogeno rešenje da isčezne, i ukupno rešenje diferencijalne jednačine će biti diktirano isključivo partikularnim rešenjem. Na sličan način, posmatranjem karakterističnog odziva sistema na jediničnu odskočnu pobudu, moguće je uvideti početni period u kome homogeno rešenje isčezava i period posle u kome je partikularno rešenje dominantno [21].



Slika 5.1: Karakterističan odziv sistema na jediničnu odskočnu pobudu[21]

Na ovoj slici se vidi da do desete, jedanaeste sekunde homogeni deo rešenja diferencijalne jednačine dominira u odzivu, a već iza toga odziv počinje da liči na pobudni signal, što znači da je homogeni deo u najvećoj meri isčezao i da je u odzivu sistema dominantni član postao partikularno rešenje.

Prilikom analize i sinteze sistema, postavljaju se posebni kriterijumi i zahtevi na ponašanje sistema i u prelaznom režimu, takozvanom tranzijentu, ali i na osobine sistema u stacionarnom, ili ustaljenom stanju. Prilikom analize i karakterizacije sistema u stacionarnom stanju, moramo biti sigurni da je tranzijent isčezao, i zbog toga se uglavnom pretpostavlja da je vremenska varijabla beskonačno velika . U cilju ovakve analize pretpostavimo

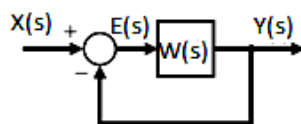
da smo na ulaz sistema, koji je realizovan kao sistem sa jediničnom negativnom povratnom spregom, doveli neke tipične vremenske oblike.

Kod proučavanja performansi sistema obično se prvo razmatraju stacionarne karakteristike i određuju statičke greške za pojedine tipove sistema, pa se tek posle toga prelazi na razmatranje kvaliteta prelaznog režima.

Kako bi se obezbedilo jedinstveno određivanje statičkih grešaka i omogućilo njihovo međusobno upoređivanje radi davanja ocene tačnosti rada sistema, potrebno je posmatrati greške ustaljenog stanja koje nastaju kao odziv na tipične ulazne (pobudne) ili poremećajne funkcije.

Ograničićemo se na tri vrste tipičnih ulaznih funkcija koje nastaju iz parabolodne pobudne funkcije oblika  $h(t)$ , gde je  $h(t)$  - jedinična funkcija, a  $t^2/2$  - jedinična parabola. Prvi izvod parabolodne funkcije daje funkciju konstantne brzine oblika  $dx/dt = t \cdot h(t)$ , koja predstavlja jediničnu nagibnu funkciju. Drugi izvod parabolodne funkcije  $d^2x/dt^2 = h(t)$  daje funkciju konstantne amplitude koja predstavlja jediničnu odskočnu funkciju.

Ocenu tačnosti rada sistema najlakše ćemo prikazati uz pomoć jednostavne blok šeme sistema sa jediničnom povratnom spregom date na slici 5.2. uz napomenu da se izložena analiza može upštiti i za složene sisteme.



Slika 5.2. - Šema sistema sa zatvorenim kolom i jediničnom povratnom spregom.

Prenosna funkcija ovakvog sistema sa zatvorenim kolom data je jednačinom

$$W_e(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)}, \text{ gde je kompleksni lik greške, u ustaljenom stanju:}$$

$$(5.3)$$

Prema slici 5.2 izlazna veličina  $Y(s)$  biće

$$(5.4)$$

Uvrštavanjem vrednosti za  $Y(s)$  iz poslednje jednačine (5.4) u jednačinu (5.3) dobija se:

$$\text{—————} \tag{5.5}$$

Signal greške  $E(s)$  ovde je dat u funkciji kompleksne promenljive  $s$ . Kako se ponašanje stabilnog sistema razmatra u vremenskom području, kod kojeg prelazni proces posle pobude ulaznim signalom praktično iščezava sa vremenom jer prelazi u stacionarno stanje, to je potrebno izraz za grešku ustaljenog režima prebaciti iz područja kompleksno promenljive u vremensko područje. To se može jednostavno uraditi pomoću druge teoreme granične vrednosti Laplasove transformacije kako je dato u prethodnim metodskim jedinicama (drugo poglavlje) [31]:

$$\text{—————} \tag{5.6}$$

Iz poslednje jednačine vidi se da greška ustaljenog stanja zavisi od oblika prenosne funkcije otvorenog sistema  $W(s)$  i od vrste ulazne veličine  $X(s)$ .

### 5.2.1 Jedinični odskočni signal na ulazu sistema (konstanta položajne greške)

Posmatramo odaziv sistema kada njegov ulaz deluju odskočna jedinična funkcija  $x(t) = h(t)$ . Tada je, prema tabeli Laplasove transformacije :  
 , pa se iz (5.6) dobija:

$$\text{—————} \quad \text{—————} \quad \text{—————}$$

gde se uvodi  $K_p$  kao konstanta položajne greške

$$\tag{5.7}$$

Ne treba zaboraviti da je drugu graničnu teoremu Laplasove transformacije smisleno primeniti samo u slučaju da su singulariteti tipa polova kompleksne funkcije  $E(s)$  u levoj poluravni  $s$  ravni, jer samo ako su ovi polovi u levoj poluravni  $s$  ravni, sistem će biti stabilan, pa će prelazni režim vremenom iščeznuti. U protivnom, stacionarno stanje neće ni nastupiti [31].

Za razne tipove sistema odredićemo konstante položaje greške  $K_p$  uvrštavanjem jednačine (5.3) u poslednju jednačinu. Za sistema tipa 0 biće:

$$\text{—————} \tag{5.8}$$

Za sisteme tipa 1 i više, tj. za sisteme čije prenosne funkcije oblika (5.3) imaju stepen za  $s$  u imeniocu  $r \geq 1$ , konstante položaja biće:

$$\text{—————} \tag{5.9}$$

Uvrštavanjem vrednosti za  $K_p$  iz izraza (5.8) i (5.9), dobijamo veličinu greške stacionarnog stanja za odskočnu funkciju na ulazu:

$$\text{—————} \tag{5.10}$$

[31]

### 5.2.2 Jedinični nagibni signal na ulazu sistema (konstanta brzinske greške)

Ako na ulaz sistema dovedemo jednačinu nagibnu funkciju  $x(t) = t \cdot u(t)$  ili  $x(t) = t \cdot h(t)$  za koju je  $X(s) = 1/s^2$ , dobićemo:

$$\text{—————} \quad \text{—————} \quad \text{—} \tag{5.11}$$

gde se  $K_v$  definiše kao konstanta brzinske greške, i iznosi, prema izrazima (5.11) i (5.7a):

$$\text{—————} \tag{5.12}$$

Prema poslednjoj jednačini (5.12) vidi se da će za pojedinačne tipove sistema biti:

$$\text{—————} \tag{5.13}$$

Uvrštavanjem vrednosti za  $K_v$  iz jedanačina (5.13) u (5.11), statička greška za pojedine tipove sistema pri nagibnoj ulaznoj funkciji biće:

$$(5.14)$$

### 5.2.3 Jedinični parbolični signal na ulazu sistema (konstanta greške ubrzanja)

Kada sistem pobudimo ulaznom funkcijom koja se menja po parabolničnom zakonu oblika jedinične parabole  $u(t) = \frac{1}{2}at^2$ , čiji je kompleksni lik

$U(s) = \frac{1}{s^3}$ , onda će opšti izraz za grešku, prema jedanačini (5.7a) biti:

$$e(t) = \frac{K_a}{2}at^2 + \dots \quad (5.15)$$

gde smo  $K_a$  označili konstantu greške ubrzanja, koja iznosi

$$(5.16)$$

Vrednost konstante ubrzanja  $K_a$  [ $\text{sec}^{-2}$ ] za pojedine tipove sistema možemo izračunati uvrštavanjem u (5.16) izraza (5.7a), pa će biti:

$$\dots \quad (5.17)$$

Odakle se dobija:

$$(5.18)$$

Grešku ustaljenog stanja za pojedine tipove sistema dobijamo uvrštavanjem vrednosti  $K_a$  iz izraza (5.18) u izraz (5.15):

$$(5.19)$$

Konstantne greške kao i vrednosti grešaka ustaljenog stanja za stabilne sisteme sa jediničnom povratnom spregom tipa 0, 1 i 2, i pri tome karakterističnim ulaznim veličinama, pregledno su sređene u tabeli 5.1.

Tabela 5.1 [31]

Ulazna veličina	Odskočna		Nagibna		Parabolična	
Tip sistema	$K_p$	Greška ustaljenog stanja $\epsilon_0$	$K_v$	Greška ustaljenog stanja $\epsilon_0$	$K_a$	Greška ustaljenog stanja $\epsilon_0$
Tip 0	$K$	$\frac{1}{1+K_p}$	0	$\infty$	0	$\infty$
Tip 1	$\infty$	0	$K$	$\frac{1}{K_v}$	0	$\infty$
Tip 2	$\infty$	0	$\infty$	0	$K$	$\frac{1}{K_a}$

Primetimo da su imena konstanti  $K_p$ ,  $K_v$  i  $K_a$  krajnje logična. Konstanta položajne greške govori o tome sa kakvom greškom sistem radi u stacionarnom stanju ukoliko od njega očekujemo da izlazni signal drži na konstantnoj poziciji. Brzinska konstanta nam govori o grešci u stacionarnom stanju ukoliko izlazni signal treba da se menja konstantnom brzinom i konačno konstanta ubrzanja je vezana za promenu referentnog signala sa konstantnim drugim izvodom (ubrzanje). Ovakvu analizu bismo mogli nastaviti tako što na ulaz sistema dovodimo signale

međutim rezultati koje bismo dobili bi bili prilično neupotrebljivi. Naime, vidimo da sa uvođenjem reference sve većeg i većeg reda, dobijamo zahtev da astatizam sistema bude sve viši. Sa druge strane, povećanje reda astatizma sistema značajno ugrožava stabilnost, te pitanje stacionarnog stanja postaje bespredmetno. Uobičajeno je da se operiše sa sistemima koji imaju red astatizma najviše tri, mada, teorijski gledano, već za sisteme astatizma trećeg reda stabilnost može biti samo uslovna.

### 5.3 Karakterizacija kontinualnih sistema u prelaznom režimu

Ponašnje sistema u prelaznom režimu možemo opisati sa većim brojem parametara koji pripadaju različitim domenima u kojima se sistemi mogu analizirati[21]:

- vremenski
- frekvencijski
- kompleksni

### 5.3.1. Karakterizacija kontinualnih sistema u prelaznom vremenskom području

U analizi i sintezi sistema upravljanja vrlo je važno naći metod specifikacije performansi sistema automatskog upravljanja. Takva specifikacija se prirodno daje u vremenskom domenu. U opštem slučaju specifikacije sistema se odnose na specifikacije tranzijentnog i ustaljenog ponašanja sistema.

Odziv svakog linearnog sistema je u opštem slučaju sastavljen iz dve komponente:

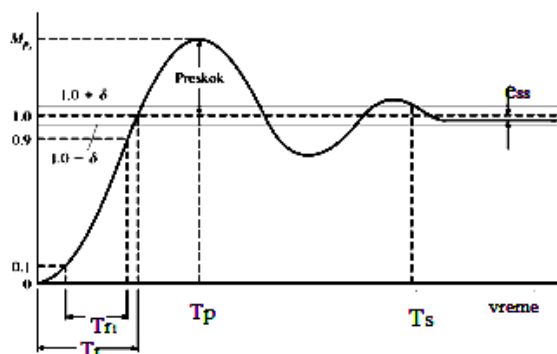
$$y(t) = y_{tr}(t) + y_{ss}(t)$$

gde je:

- $y_{tr}(t)$  - tranzijentni odziv sistema
- $y_{ss}(t)$  - ustaljeni odziv sistema

Pri čemu za stabilne sisteme vredi:  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{tr}(t) = 0$ .

Karakter prelaznog režima, odnosno ponašanje sistema u vremenu neposredno nakon otpočinjanja delovanja pobudnog signala ili poremećaja određen je konstruktivnim karakteristikama samog sistema. Videli smo, pri modeliranju sistema, da karakteristike sastavnih elemenata i način njihovog povezivanja određuju oblik i vrednosti parametara odgovarajuće diferencijalne jednačine, a samim tim i dinamiku njegovog odziva u pristupu pobudnog i poremećajnog signala. Najpogodnije je opisati dinamička svojstva sistema u vremenskom domenu vrednostima parametara njegovog odziva na pobudu odskočnim signalom kao što su: preskok, vreme kašnjenja, vreme uspona, vreme smirenja, period oscilacija i dominantna vremenska konstanta. Slika 5.3 prikazuje karakteristične parametre odziva sistema drugog reda.



Slika 5.3 Ilustracija odziva sistema sa funkcijom prenosa drugog reda na pobudu jediničnom odskočnom funkcijom

Standardne performanse sistema se obično definišu u odnosu na odziv sistema na odskočnu (step) funkciju kao što je to prikazano na slici 5.3. Sledeći parametri definišu odziv sistema:

1.  $T_r$  - vreme porasta (rise time) je vreme za koje odziv sistema prođe vrednosti od 0 do 100 % vrednosti u stacionarnom stanju.
2.  $T_{r1}$  - vreme porasta je vreme za koje odziv sistema prođe vrednosti od 10% do 90% vrednosti u ustaljenom stanju. Ovakva definicija se koristi za nadkritično prigušene sisteme ( $\xi > 1$ )
3.  $T_p$  - vreme preskoka (peak time) je vreme za koje se desi maksimalni preskok stacionarne vrijednosti.
4.  $T_s$  - vreme smirenja (settling time) predstavlja vreme neophodno da amplitude oscilacija u odskočnom odzivu opadne na vrednost manju od 2-5 procenata od vrednosti u stacionarnom stanju.
5. Preskok u oznaci OS (overshoot) se definiše kao razlika  $y(t)_{\max} - r(t)$  gdje je  $r(t)$  jedinična step funkcija

### 5.3.1.1 Zavisnost odziva sistema od rasporeda polova i nula funkcije prenosa

Specificirati odziv nije ništa drugo nego zadavanje položaja polova i nula njegove funkcije spregnutog prenosa u kompleksnoj ravni. Dok neki polovi i nule imaju veliki, mogli bi reći dominantan uticaj na prelazni proces u sistemu, drugi toliko malo utiču na ovaj proces, da se praktično mogu zanemariti. Ponašanje većine sistema, bez obzira na broj polova i nula u



njegovoj funkciji spregnutog prenosa ponaša kao neki ekvivalentan sistem drugog ili trećeg reda. Zbog toga je od posebnog interesa detaljnije razmatranje nekih tipičnih i relativno prostih sistema [39].

### 5.3.1.1.1 Odziv sistema kada funkcija prenosa ima samo jedan realan pol

Neka je sistem prvog reda opisan diferencijalnom jednačinom.

$$a \frac{dy(t)}{dt} + by(t) = cu(t) \quad (5.20)$$

Delenjem jednačine (5.20) sa  $b$ , uvođenja navedenih supstitucija i primene Laplasove transformacije za nulte početne uslove dobije se prenosna funkcija sistema [9]

$$K = \frac{c}{b} \quad \text{i} \quad T = \frac{a}{b}$$

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}. \quad (5.21)$$

Pri tome  $K$  predstavlja koeficijente statičkog pojačanja, a  $T$  vremensku konstantu sistema.

Pretpostavimo, za potrebe dalje analize, da sistem ima jedinično statičko pojačanje i da je pobuđen signalom čiji opis odgovara odskočnoj funkciji sa jediničnom amplitudom, tada je njegov odziv u kompleksnom domenu

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{Ts + 1}. \quad (5.22)$$

Za određivanje odziva sistema u vremenskom domenu neophodno je poslednji izraz prikazati u vidu sume parcijalnih razlomaka kako bi se dobili tablični oblici odgovarajućih Laplasovih transformacija. S obzirom da u konkretnom slučaju kompleksni oblik odziva sistema sadrži dva realna različita pola odgovarajuće rastavljanje ima oblik [9],[39]:

$$\frac{1}{s} \frac{1}{Ts + 1} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{Ts + 1} = \frac{A_0(Ts + 1) + A_1s}{s(Ts + 1)}. \quad (5.22a)$$

Izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata u polinomima brojioca dobija se

$$A_0 = 1$$

$$A_0T + A_1 = 0 \Rightarrow A_1 = -T$$

Kompleksni lik odziva sistema se izražava na osnovu izračunatih koeficijenata u obliku sume funkcija

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1},$$

odnosno

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}}. \quad (5.23)$$

S obzirom da se ove funkcije nalaze u tabelama Laplasovih transformacija, odziv sistema u vremenskom domenu se određuje direktno na osnovu datih rešanja [9],[39]

$$y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \right\} \quad (5.24)$$

$$y(t) = 1 - e^{-1/T \cdot t} \quad (5.25)$$

### 5.3.1.1.2 Odziv sistema kada funkcija prenosa ima dva pola a nema konačnih nula

Neka je sistem drugog reda opisan diferencijalnom jednačinom

$$a \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + cy(t) = eu(t) \quad (5.26)$$

U slučaju kada su svi početni uslovi jednaki nuli Laplasovom transformacijom ove jednačine i nakon sređivanja ekvivalentna prenosna funkcija je određena izrazom:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K}{T}}{s^2 + \frac{s}{T} + \frac{K}{T}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

pri čemu je:

- $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}}$  prirodna učestanost sistema
- $\xi = \frac{1}{2\omega_n T}$  faktor prigušenja sistema

Ukoliko se radi jednostavnijeg zapisa ponovo pretpostavi jedinični koeficijent statičkog pojačanja u slučaju pobude sistema signalom čiji opis odgovara jediničnoj odskočnoj funkciji dobija se kompleksni odziv definisan jednačinom [9],[39].

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} \quad (5.27)$$

Za određivanje odziva sistema u vremenskom domenu neophodno je prepisati prikazani zapis u vidu sume parcijalnih razlomaka kako bi se dobili tablični oblici odgovarajućih Laplasovih transformacija.

Oblik ekvivalentne sume parcijalnih razlomaka zavisi od položaja polova karakterističnog polinoma  $D(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$  funkcije prenosa sistema drugog reda. Odziv na jediničnu odskočnu funkciju u tom slučaju se lako dobija kao suma odziva dva sistema prvog reda. Vremenske konstante tih sistema upravo su određene vrednostima ovih polova [9]

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad (5.28)$$

Rastavimo izraz iz izraza (5.27) na dva člana tako da odgovarajuća suma parcijalnih razlomaka ima oblik:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} &= \frac{A_0}{s} + \frac{A_1 s + A_2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{A_0(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) + A_1 s^2 + A_2 s}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \\ &= \frac{(A_0 + A_1)s^2 + (A_0 2\xi\omega_n + A_2)s + A_0\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \end{aligned} \quad (5.29)$$

S obizrom da važe jedankosti

$$A_0 = 1$$

$$A_0 + A_1 = 0$$

$$A_0 2\xi\omega_n + A_2 = 0$$

kao i zbog činjenice da je u slučaju konjugovano kompleksnih polova

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = (s + \xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \xi^2) \quad (5.30)$$

dobija se jednakost

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \xi^2)} = \quad (5.31)$$

$$\frac{1}{s} - \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \xi^2)} - \frac{\xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \xi^2)}$$

s obzirom da su

$$\mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} = 1$$

$$\mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \xi^2)} \right\} = e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t)$$

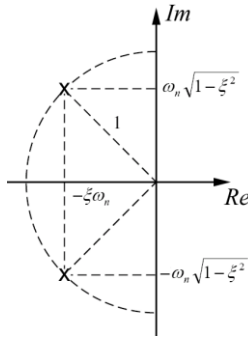
$$\mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{\xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \xi^2)} \right\} = \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \xi^2)} \right\}$$

$$= \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t)$$

(5.32)

odziv sistema drugog reda u vremenskom domenu na jediničnu odskočnu pobudu opisuje se funkcijom [9]

$$y(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t) - \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t). \quad (5.33)$$



Slika 5.4. Parametri  $\omega_n$  i  $\xi$ , za određivanje položaja kompleksnih polova u  $s$  ravni [9]

Imajući u vidu raspored polova prikazan na slici 5.4 lako se uočava da važe relacije

$$\cos(\alpha) = -\xi, \quad \sin(\alpha) = \sqrt{1 - \xi^2} \quad (5.34)$$

na osnovu kojih dobijamo

$$y(t) = 1 + \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t) \cos(\alpha) - e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t) \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$y(t) = 1 + \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t) \cos(\alpha) - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t) \sin(\alpha) \quad (5.35)$$

Objedinjavanjem poslednja dva člana jednačine imamo

$$y(t) = 1 + \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \left[ \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t) \cos(\alpha) - \cos(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t) \sin(\alpha) \right] \quad (5.36)$$

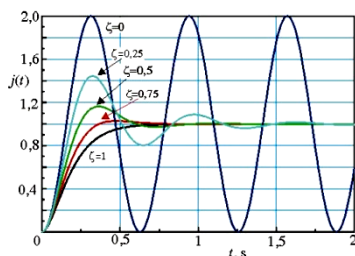
tako da se nakon primene adicione toreme dobija odziv sistema drugog reda na jediničnu step pobudu u konačnom obliku [9]

$$y(t) = 1 + \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \left[ \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t) - \alpha \right] \quad (5.37)$$

Promenom  $\xi$  i  $\omega_n$  menja se položaj polova u kompleksnoj ravni i u zavisnosti od toga, odziv sistema. U zavisnosti od vrednosti parametra  $\xi$  mogu se pojaviti sledeći karakteristični slučajevi:

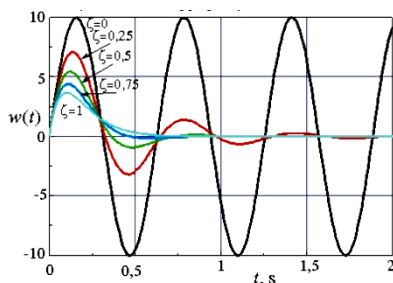
- $\xi = 1$  tzv. kritično aperiodičan prigušen sistem
- $\xi > 1$  tzv. nadkritično prigušen sistem
- $\xi < 1$  tzv. podkritično prigušen sistem
- $\xi = 0$  sistem je kritično stabilan

Na slici 5.5 su prikazani odskočni odzivi sistema za različite vrednosti parametra prigušenja  $\xi$ . Kao što se vidi sve krive teže istoj graničnoj vrednosti, samo što prelazni process ima različit oblik u zavisnosti od faktora prigušenja  $\xi$ .



Slika 5.5. Odskočni odziv sistema drugog reda bez konačnih nula za različite vrednosti faktora relativnog prigušenja[27]

Izgled impulsnog odziva pri raznim vrednostima faktora relativnog prigušenja prikazan je na slici 5.6. Kao što znamo, impulсни odziv ili težinska funkcija sistema jednaka je inverznoj Laplasovoj transformaciji prenosne funkcije sistema.



Slika 5.6. Impulсни odziv sistema drugog reda bez konačnih nula za različite faktore relativnog prigušenja[27]

Trenutak nastupanja preskoka  $t_1$  se određuje na osnovu pravila za ekstremne vrednosti. Poznato je da se položaj ekstremne vrednosti neke funkcije utvrđuje tako što se odredi njena prva derivacija po vremenskoj promenljivoj  $t$ , a zatim izračunava vrednost ove promenljive kada je derivacija jednaka nuli. Kao što znamo, u slučaju nultih početnih uslova, operaciji diferenciranja u vremenskom domenu odgovara množenje kompleksnog lika odgovarajuće promenljive sa kompleksnom promenljivom  $s$

$$\frac{dy(t)}{dt} = L^{-1} \{sY(s)\} \quad (5.38)$$

obzirom da je izlazna promenljiva sistema u konkretnom slučaju

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} \quad (5.39)$$

opisanim postupkom dobija se

$$\frac{dy(t)}{dt} = L^{-1} \left\{ \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \right\}. \quad (5.40)$$

Primitimo da dobijeni rezultat predstavlja funkciju prenosa konkretnog sistema. Drugim rečima, možemo reći da se prva derivacija odziva sistema na step pobudu dobija kao invreznna Laplasova transformacija njegove funkcije prenosa [9]. U slučaju konjugovano kompleksnog para polova dobija se

$$L^{-1} \left\{ \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{\omega_n^2}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \xi^2)} \right\}$$

$$L^{-1} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} L^{-1} \left\{ \frac{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \xi^2)} \right\}$$

$$L^{-1} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t) \quad (5.41)$$

Ukoliko dobijeno rešenje izjednačimo sa nulom [9]

$$\frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t) = 0 \quad (5.42)$$

dobija se jednačina

$$\Rightarrow \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \cdot t = k\pi, \quad k = 0,1,2,\dots \quad (5.43)$$

iz koje sledi rezultat

$$t = \frac{k\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}.$$

Zanima nas trenutak kada nastaje prvi maksimum t.j trenutak nastupanja preskoka, zato što je najveći, pa ćemo usvojiti da je  $k=1$  nakon čega se dobija

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}. \quad (5.44)$$

Uvrštavanjem ove vrednosti u jednačinu odziva sistema na step pobudu dobija se

$$y(t) = 1 + \frac{e^{-\xi \omega_n \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[ \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} - \alpha\right) \right], \quad (5.45)$$

Odnosno

$$y(t) = 1 + \frac{e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\pi - \alpha). \quad (5.46)$$

Nakon primene adicione teoreme sledi

$$y(t) = 1 + \frac{e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}} [\sin(\pi) \cos(\alpha) - \cos(\pi) \sin(\alpha)]$$

$$y(t) = 1 + \frac{e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\alpha). \quad (5.47)$$

S obzirom da je  $\sin(\alpha) = \sqrt{1-\xi^2}$  dobija se



$$y(t) = 1 + e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (5.48)$$

U konkretnom slučaju veličina preskoka (Over Shoot-OS) je

$$OS = y(t_1) - 1 = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (5.49)$$

Preskok se često daje u procentima:

$$MPOS = \exp\left\{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right\} \cdot 100\% \quad (5.50)$$

gdje je sa MPOS (Maximum Percent OverShoot) označen maksimalni preskok u procentima.

Iz poslednjeg izraza se može zaključiti da je preskok samo funkcija prigušenja. Iz izraza za odziv sistema u vremenskom domenu se vidi da tranzijentni deo nestaje sa vremenskom konstantom  $\tau = (\xi\omega_n)^{-1}$ . Obično se uzima da je svaki prelazni proces završen za  $3\tau \div 5\tau$  pa sa vreme smirenja često definiše kao:

$$T_s = \frac{3}{\xi\omega_n}$$

Dakle, za zadato vreme smirenja i maksimalni prekok, koeficijent prigušenja  $\xi$  i prirodna učestanost se može dobiti iz izraza za preskok i vreme smirenja.

Na ovaj način je uspostavljena veza između parametara koji karakterišu vremenski odziv sistema i lokacija polova u kompleksnom domenu.

### 5.3.1.1.3 Odziv sistema kada funkcija prenosa ima dva pola i jednu konačnu nulu

Napišimo takvu funkciju u obliku

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega^2}{z_1} \frac{s + z_1}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2}$$

Pri tome  $z_1$  predstavlja njenu realnu nulu. Prethodna jednačina se može prikazati u rastavljenom obliku

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} + \frac{s}{z_1} \frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} \quad (5.51)$$

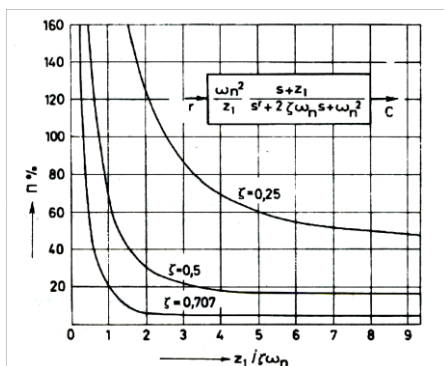
Vidimo da se ona sastoji iz dva sabirka. Prvi od njih odgovara funkciji prenosa sistema drugog reda sa jediničnim koeficijentom statičkog pojačanja. Drugi član se razlikuje samo u prisustvu faktora  $s/z_1$  [39].

Ukoliko označimo odskočni odziv sistema drugog reda sa  $y_s(t)$  primenom teoreme o izvodu originala dobijamo da je odskočni odziv  $y_z(t)$  sistema sa dva pola i jednom realnom nulom

$$y_z(t) = y_s(t) + \frac{1}{z_1} \frac{dy_s(t)}{dt}. \quad (5.52)$$

Kao što vidimo ovaj odziv se dobija sumiranjem dva signala od kojih je prvi odskočni odziv sistema drugog reda, a drugi njegova derivacija, odnosno impulsni odziv normiran vrednošću realnog pola  $z_1$ .

Za razne vrednosti  $\xi$  na slici 5.7 prikazana je zavisnost preskoka od  $z_1/\xi\omega_n$  tj. od odnosa apsolutnih vrednosti nule i realnog dela kompleksnih polova.



Sl. 5.7. Zavisnost preskoka od rasporeda kritičnih u čes tanost sistema drugog reda sa jednom konačnom nulom[39]

#### 5.3.1.1.4 Odziv sistema kada funkcija prenosa ima dva kompleksna i jedan realan pol a nema konačnih nula

Prisustvo realnog pola, pored dva kompleksna, usporava prelazni proces i smanjuje preskok pri odzivu sistema na pobudu odskočnom funkcijom. Da

se to pokaže posmatraćemo dva sistema čije se funkcije prenosa razlikuju samo u prisustvu realnog pola  $p_3$ .

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4}{s^2 + s + 1} \quad (5.53)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4p_3}{(s^2 + s + 1)(s + p_3)}. \quad (5.54)$$

U posmatranom slučaju, položaj kompleksnih polova je određen frekvencijom neprigušenih oscilacija i koeficijentom prigušenja. Kao što je poznato, odskočni odziv sistema drugog reda bez konačnih nula dobija se nakon razvoja odgovarajuće funkcije prenosa u sumu parcijalnih razlomaka

$$\frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} \frac{1}{s} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1s + A_2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2}$$

i primene inverzne Laplasove transformacije se odziv dobije u obliku

$$y(t) = 1 + C_1 e^{-\zeta\omega t} \left[ \sin(\omega\sqrt{1-\zeta^2}t) - \alpha_1 \right]$$

Odgovarajuća suma parcijalnih razlomaka za slučaj sistema koji ima i dodatni realni pol  $p_3$  ima oblik

$$\frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} \frac{p_3}{s + p_3} \frac{1}{s} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1s + A_2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} + \frac{B}{s + p_3}. \quad (5.55)$$

Zbog toga se u odzivu sistema  $y_{p_3}(t)$  sa parom kompleksnih i jednim realnim polom pojavljuje dodatni član

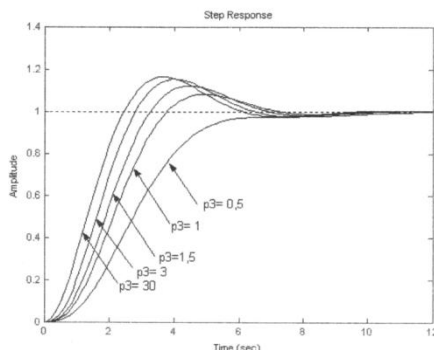
$$y_{p_3}(t) = 1 + C_2 e^{-\zeta\omega t} \left[ \sin(\omega\sqrt{1-\zeta^2}t) - \alpha_2 \right] + B e^{-p_3 t} \quad (5.56)$$

čiji je doprinos određen vrednošću koeficijenta B

$$B = \lim_{s \rightarrow -p_3} (s + p_3) \frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} \frac{4p_3}{s + p_3} \frac{1}{s} = \frac{-\omega^2}{p_3^2 - 2\xi\omega s + \omega^2}. \quad (5.57)$$

Analizom odziva (5.56) uočava se da prisustvo realnog pola  $p_3$  čija je vrednost dovoljno velika, odnosno čiji je položaj dovoljno daleko od imaginarne ose u kompleksnoj ravni, dovodi do toga da se njegovo prisustvo

može zanemariti. U tom slučaju vremenska konstanta  $1/p_3$  aperiodičnog člana  $e^{-p_3 t}$  ima malu vrednost pa on isčezava mnogo brže nego što odziv (5.56) dostigne promenu vrednosti.



Slika 5.8 Jedinični odskočni odziv sistema sa dva kompleksna i jednim realnim polom[39]

### 5.3.3.1.5 Polovi i nule čiji se uticaj na prelazni proces može zanemariti

Polovi čiji je položaj najbliži imaginarnoj osi u kompleksnoj ravni imaju najveći uticaj na ponašanje sistema pa se zbog toga nazivaju dominantni polovi. Svi polovi funkcije prenosa sistema koji se nalaze dovoljno daleko od imaginarne ose u levoj polovini kompleksne ravni imaju nezavistan uticaj na odskočni odziv sistema. U tom smislu može se reći da važi sledeće pravilo: realan pol imaće zanemarljiv uticaj na odskočni odziv sistema ako je njegovo rastojanje od imaginarne ose bar šest puta veći od rastojanja dominantnih polova u odnosu na imaginarnu osu [21].

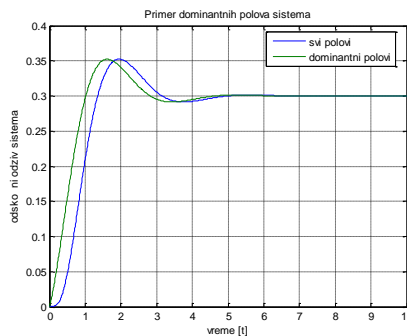
Punom linijom na slici 5.9 je prikazan odskočni odziv sistema petog reda, dok je isprekidanom linijom prikazan odziv sistema drugog reda funkcije prenosa koji će od pet polova zadržati samo konjugovane kompleksne polove koji su najbliži imaginarnoj osi. Sa slike se vidi da je razlika između ova dva odziva neznatna. Pri tome, redukcija reda sistema sa pet na dva nije izvršena slučajno.

Zaključak bi se mogao i generalizovati na sledeći način: Za stabilne sisteme pod parom dominantnih konjugovano kompleksnih polova se smatraju konjugovano kompleksni polovi koji su najbliži imaginarnoj osi, odnosno to su polovi čiji je realni deo najveći. Ovaj zaključak ima nekoliko izuzetaka i ovi se izuzeci mogu kategorisati na sledeći način [21]:

1. Ako sistem ima isključivo realne polove, takav sistem naravno nema par dominantnih konjugovano kompleksnih polova, već se realni pol najbliži imaginarnoj osi smatra dominantnim realnim polom.

2. Ako sistem ima par konjugovano kompleksnih polova, ali postoji realan pol koji je bliži imaginarnoj osi, koji će od njih biti proglašen dominantnim zavisi od prirode sistema i njegove namene. Ukoliko se od sistema očekuje da prevashodno bude brz uz izvesne dozvoljive preskoke u odzivu, realan pol se može smatrati dominantnim. U suprotnom, ukoliko se insistira na malom ili nikakvom preskoku po cenu smanjenja brzine odziva, par konjugovano kompleksnih polova se može smatrati dominantnim parom.

3. Ukoliko sistem ima dva para konjugovano kompleksnih polova koji su približno jednako udaljeni od imaginarne ose, onda se posmatra i njihov imaginarni deo. Ukoliko su imaginarni delovi jednog para konjugovano kompleksnih polova značajno veći od imaginarnih delova drugog para konjugovano kompleksnih polova, tada se oni proglašavaju dominantnim polovima, bez obzira na to koji od njih je bliži imaginarnoj osi [21].



*Slika 5.9 Odziv sistema petog reda i odziv redukovanog sistema drugog reda (primer dominantnih polova sistema)*

### 5.3.2. Frekventno područje i karakteristični parametri

Frekventni odziv ima važnu ulogu u analizi i sintezi sistema, jer su razvijene inženjerske metode frekventnog područja za projektovanje sistema, kao što su amplitudne i fazne frekventne karakteristike (AFFK, Najkvistova kriva,

Bodeovi dijagrami). Zbog toga je kod projektovanja sistema primenom metoda frekventnog područja potrebno tehničke zahteve u pogledu kvaliteta njihovog ponašanja u prelaznom režimu rada najpre izraziti u vidu parametara koji određuju izgled frekventnih karakteristika [27].

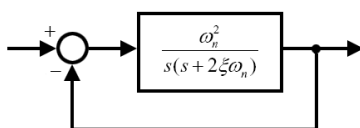
### 5.3.2.1. Amplitudno-fazno-frekventna karakteristika (AFFK) i ocena ponašanja sistema

Razmatraćemo sistem drugog reda bez povratne sprege i na osnovu AFFK definisati parametre koji karakterišu ponašanje sistema po zatvaranju povratne sprege.

Sa nekim od tih parametara za sisteme sa otvorenim kolom već smo se upoznali u prethodnom poglavlju kao što su - rezerva stabilnosti sistema po fazi i modulu (pretek faze i pretek pojačanja). Oni ukazuju na stepen stabilnosti sistema. Sistem s malim pretekom faze je suviše oscilatoran i ima dugo vreme smirenja, dok sistem sa suviše velikim pretekom faze (blizak  $\pi/2$ ) je aperiodičan i ima sporo delovanje [27].

#### 5.3.2.1.1 Zavisnost koeficijenta prigušenja ( $\xi$ ) i preteka faze ( $\gamma_{pf}$ ) u sistemu drugog reda bez konačnih nula

Za sistem drugog reda prikazan na slici 5.10. i datom funkcijom povratnog prenosa,



Slika 5.10. Sistem drugog reda sa zatvorenom povratnom spregom[27]

prenosna funkcija sistema sa zatvorenom povratnom spregom (spregnuti prenos) je data izrazom:

$$W_s(s) = \frac{W_p(s)}{1 + W_p(s)} \Rightarrow W_s(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2} \quad (5.58)$$

S obzirom da je:

$$|W_p(j\omega_{cg}) = 1|$$

gdje je  $\omega_{cg}$  - učestanost pojačanja koja pokazuje koliko se može tolerisati fazno kašnjenje u originalnom sistemu  $W_p(j\omega)$ , a da sistem ostane stabilan.

Moduo  $W_p(j\omega)$  je određen izrazom:

$$|W_p(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{|-\omega^2 + j2\xi\omega \cdot \omega_n|}$$

odavde je:

$$|W_p(j\omega_{cg})| = \frac{\omega_n^2}{|-\omega_{cg}^2 + j2\xi\omega_{cg} \cdot \omega_n|} \Rightarrow$$

$$\omega_{cg} = \omega_n \cdot \sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{1+4\xi^4}} \quad (5.59)$$

Pretek faze se definiše kao:

$$\gamma_{pf} = 180^\circ + \arg\{W_p(j\omega_{cg})\}$$

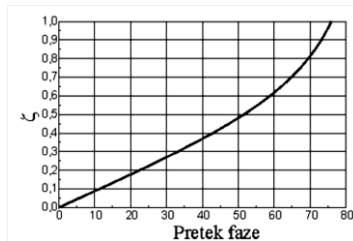
i dobija se:

$$\gamma_{pf} = 90^\circ - \arctg \frac{\sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{1+4\xi^4}}}{2\xi} = \arctg \frac{2\xi}{\sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{1+4\xi^4}}} \quad (5.60)$$

prema tome može se zaključiti da je pretek faze funkcija od koeficijenta prigušenja  $\xi$ .

$$\gamma_{pf} = f(\xi)$$

Ovisnost preteka faze od prigušenja sistema je grafički predstavljena na slici 5.11



Sl. 5.11. Zavisnost koeficijenta relativnog prigušenja  $\xi$  od veličine preteka faze sistema drugog reda bez konačnih nula[27].

Na grafiku se može uočiti da u opsegu preteka faze do  $40^0$  postoji linearna zavisnost  $\xi$  i  $\gamma_{pf}$ . Ona se može izraziti relacijom

$$\xi = 1/2\gamma_{pf}, \gamma_{pf} [rad]; 0 \leq \gamma_{pf} \leq 40^0 \quad (5.61)$$

Ova poslednja relacija se može približno koristiti i za procenu koeficijenta relativnog prigušenja i za veće preteke faze, do negde  $60^0$ . Osim toga, treba napomenuti da je poslednja relacija određena za sistem čiji je povratni prenos drugog reda bez konačnih nula i astatizma prvog reda. Dati odnosi se mogu približno koristiti i za sisteme višeg reda s izraženim dominantnim polovima, okarakterisanim koeficijentom relativnog prigušenja  $\xi$ .

### 5.3.2.1.2 Pokazatelj oscilatornosti i rezonantna frekvencija (relacije između tranzijentnog i frekventnog odziva sistema)

Druga metoda za ocenu ponašanja sistema u vremenskom domenu, na osnovu frekventnih karakteristika, zasniva se na poznavanju parametara amplitudno-frekventne i fazno frekventne karakteristike spregnutog prenosa sistema. Pri tome relacije određene tačno za sistem drugog reda, važiće približno i za sisteme višeg reda s izraženim dominantnim polovima. Frekventna karakteristika spregnutog sistema drugog reda je data sa:

$$W_s(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n \cdot j\omega + \omega_n^2} \quad (5.61)$$

odavde sledi:

$$|W_s(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2 \omega_n^2 \omega^2}} \quad (5.62)$$

Na osnovu poslednjeg izraza može se odrediti maksimalna vrednost amplitudno-frekventne karakteristike  $M$  (pokazatelj oscilatornosti) i frekvencija na kojoj on nastaje (rezonantna frekvencija).

Maksimalna vrednost frekventnog odziva se dobija na sledeći način:

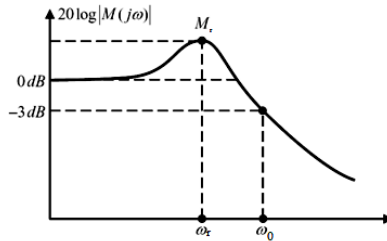
$$\frac{dW_s(j\omega)}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \Rightarrow \quad (5.63)$$



Rezonantni vrh  $M_r$  - predstavlja vrednost maksimuma amplitudno-frekventne karakteristike sistema sa zatvorenim kolom, to jest:

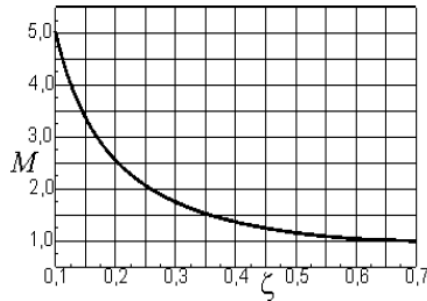
$$W_s(j\omega_r) = M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (5.64)$$

Frekventni odziv sistema drugog reda je predstavljen na slici 5.12.



*Slika 5.12. Ilustracija parametara amplitudno-frekventne karakteristike sistema drugog reda sa zatvorenim kolom ( $M_r$ -pokazatelj oscilatornosti i frekvencija na kojoj on nastaje)[27]*

Na osnovu dobijenog poslednjeg izraza vidi se da pokazatelj oscilatornosti zavisi samo od koeficijenta prigušenja  $\xi$  kao što je prikazano na narednoj slici[27].



*Sl. 5.13. Zavisnost pokazatelja oscilatornosti  $M$  od koeficijenta relativnog prigušenja  $\xi$*

Veličina rezonantnog vrha  $M_r(\omega)$  može da posluži za posredno određivanje veličine preskoka i oscilatornosti prelaznog režima. Ona takođe služi za ocenu rezerve stabilnosti, jer je za veću rezonantnu frekvenciju veća i brzina odziva sistema.

### 5.3.2.1.3 Propusni opseg $\omega_0$ . Relacija između brzine odziva sistema i njegovog frekventnog odziva

Jedan od preostalih parametar koji je naročito važan za ponašanje sistema je *propusni opseg sistema*. Označavamo ga sa  $f_0$  ili  $\omega_0$ , i to je ona frekvencija, iza rezonantnog vrha, na kojoj amplituda opadne za 3 dB od vrednosti pri nultoj frekvenciji. Propusni opseg karakteriše brzinu delovanja sistema. Sistem s širim propusnim opsegom je brži. Za analizirani sistem drugog reda može se naći analitička zavisnost propusnog opsega i parametara  $\xi$  i  $\omega_n$ . Izražava se u hercima ili radijanima u sekundi u zavisnosti da li su frekventne karakteristike crtane u funkciji učestanosti ili kružne učestanosti.

Propusni opseg određen je veličinom granične frekvencije  $\omega_0$  za koju amplitudno-frekventna karakteristika zatvorenog sistema ima vrednost 0,707 ili -3 db, odnosno:

$$\frac{|W_s(j\omega_0)|}{|W_s(j \cdot 0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5.65)$$

ili ako se pretpostavi da je  $|W_s(j \cdot 0)| = 1$  sledi  $|W_s(j\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$  odnosno:

$$20 \log |W_s(j\omega_0)| = -20 \log \sqrt{2} = -3 \text{ dB}$$

Kad  $\omega_0$  raste, bolje se reprodukuje ulazni signal jer se tada visokofrekventne komponente manje prigušuju.

Što je vreme smirenja  $T_s$  manje to je sistem brži.

$$\omega_0 = \omega_n \cdot \sqrt{(1 - 2\xi^2) + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2}} \quad T_s = \frac{3}{\xi\omega_n} \quad (5.66)$$

Prema tome, može se zaključiti da je  $\omega_0 \propto 1/T_s$  odnosno:

$$\omega_0 = \frac{3}{\xi T_s} \cdot \sqrt{(1 - 2\xi^2) + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2}}$$

Ovom graničnom frekvencijom definisana je širina propusnog opsega, koja obuhvata pojas frekvencije od nule do  $\omega_0$  u kojem sistem na svom izlazu tačno reprodukuje ulaznu veličinu. Što je veća širina propusnog opsega jednog sistema, to će on imati kraće vreme smirenja, odnosno veću brzinu odziva. Sa druge strane povećanje propusnog opsega može imati i štetne posledice jer se pri tom propuštaju frekventni spektri šumova i poremećaja koji mogu da ometaju prenos ulazne veličine i poremete pravilan odziv ulazne veličine. Prema tome, propusni opseg je važan i zbog toga što može da posluži kao mera kvaliteta reprodukcije signala, a osim toga karakteriše filterske sposobnosti sistema.

Aproksimativno ga možemo odrediti ispitivanjem koliko je puta taj sistem u stanju da u jednoj sekundi promeni smer kretanja fizičkih veličina u njemu. Trenutno su najbrži optički i optoelektronski sistemi koji dostižu vrednosti gigaherza ( $10^9$  Hz).

## **5.4 Metoda geometrijskog mesta korena ( GMK )**

### **5.4.1 Uvod i istorijat metode**

Na ideju da se konstruiše geometrijsko mesto korena GMK (engl. root locus) prvi je došao ruski naučnik Teodorčik. On je postavio osnove metode GMK. Metodu je za praktičnu primenu do detalja razradio američki naučnik Ivens (Evans),

### **5.4.2 Doprinosi metode GMK**

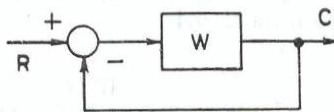
Metoda se zasniva na uspostavljanju odnosa između polova i nula funkcija povratnog i spregnutog prenosa sistema sa povratnom spregom. Ova metoda pruža mogućnost podešavanja polova, nula i faktora pojačanja funkcije povratnog prenosa, tako da polovi i nule funkcije spregnutog prenosa dobiju željene vrednosti, odnosno da sistem pri zatvorenoj povratnoj sprezi dobije željene dinamičke karakteristike. Uočena je direktna zavisnost karaktera odziva, tačnosti rada sistema u stacionarnom stanju, stabilnosti sistema i sl. od položaja polova sistema u kompleksnoj  $s$ -ravni. Sa druge strane, položaj polova u kompleksnoj  $s$ -ravni zavisi od parametara sistema, koji mogu biti promenljivi ili konstantni. Iz dosad pomenutog se može zaključiti da je veoma korisno poznavati zavisnost položaja polova u kompleksnoj  $s$ -ravni od vrednosti parametara sistema jer se na taj način može uspostaviti direktna

veza između vrednosti parametara i određenih karakteristika sistema (na primer: veza između pojačanja  $K$  funkcije povratnog prenosa i stabilnosti ili preskoka u oscilatornom odskočnom odzivu SAU) [39].

Za potpunu ocenu ponašanja sistema u vremenskom domenu potrebno je poznavanje polova i nula funkcije spregnutog prenosa sistema. Pri tome uvek imamo u vidu stabilan sistem, jer nema smisla procenjivati ponašanje nestabilnog sistema. U realnom sistemu, usled promene parametara, menjaju se koreni karakteristične jednačine, a samim tim i osobine sistema. S druge strane, pri projektovanju se uvek nastoji da se izaberu neki parametri čijom se varijacijom (podešavanjem) vrši optimizacija ponašanja sistema. I u fizički realizovanom sistemu takvi elementi za podešavanje skoro uvek postoje. Ti promenljivi ili podešljivi parametri izazivaju migraciju korena karakteristične jednačine sistema.

### 5.4.3 Polazne osnove metode geometrijskog mesta korena

Za objašnjenje osnovne ideje metode geometrijskog mesta korena posmatraćemo sistem osnovne strukture (Sl.5.14).



Slika 5.14. Sistem osnovne structure[39]

Funkcija spregnutog prenosa sistema na slici 5.14 je

$$- \quad \text{—————} \quad (5.67)$$

Funkcija povratnog prenosa  $W(s)$  sistema pripada klasi realnih racionalnih funkcija kompleksnog argumenta  $s$ , i može se predstaviti u obliku [39]

$$\text{—————} \quad (5.68)$$

gde je  $K$  faktor pojačanja funkcije povratnog prenosa, a  $P(s)$  i  $Q(s)$  su polinomi po  $s$  sa realnim koeficijentima. Pri tome stepen  $m$  polinoma  $P(s)$  nije veći od stepena  $n$  polinoma  $Q(s)$  ( $m \leq n$ ).

Funkcija spregnutog prenosa sistema sada je:

$$- \frac{\quad}{\quad} \quad (5.69)$$

Nule polinoma  $P(s)$  i nule polinoma  $Q(s)$  su, respektivno, nule i polovi funkcije povratnog prenosa. Poređenjem (5.67) i (5.69) zaključujemo da su nule funkcije povratnog prenosa i nule funkcije spregnutog prenosa međusobno identične. Polovi funkcije spregnutog prenosa se poklapaju sa nulama polinoma u imeniocu funkcije (5.69), odnosno jednaki su korenima karakteristične jednačine sistema [39]:

$$(5.70)$$

Iznalažnje korena jednačine (5.70) je vrlo teško, pogotovu ako se neki od parametara sistema menja. Metoda geometrijskog mesta korena omogućava da se odredi zavisnost korena karakteristične jednačine (5.70) od nula, polova i faktora pojačanja funkcije povratnog prenosa.

Pošto se izraz iz imenioca jednačine (5.67) može zapisati u obliku

, onda se desna strana može predstaviti kao kompleksan broj, pa je sada

$$(5.71)$$

a ista se može predstaviti relacijom

$$(5.72)$$

što predstavlja amplitudski i fazni kriterijum, respektivno, na osnovu kojih se mogu odrediti definicije GMK:

1. Geometrijsko mesto korena sačinjavaju krive u  $s$ -ravni po kojima se kreću polovi funkcije spregnutog prenosa ili, što je isto, koreni karakteristične jednačine, kada se faktor pojačanja funkcije povratnog prenosa menja od nule do beskonačnosti.

Ili definicije na osnovu poslednjih izraza:

2a. Geometrijsko mesto korena se sastoji iz tačaka  $s_i$  u  $s$ -ravni u kojima je argument funkcije povratnog prenosa  $W(s_i)$  jednak  $-180^\circ$  (ili  $180^\circ + k 360^\circ$ , gde je  $k$  ceo broj ili nula).

2b. U svakoj tački  $s_i$  geometrijskog mesta korena u  $s$ -ravni je moduo funkcije povratnog prenosa  $|W(st)|$  jednak jedinici [39].

#### 5.4.4 Pravila za konstrukcija geometrijskog mesta korena

Geometrijsko mesto korena poseduje određena svojstva. Poznavanje tih svojstava omogućava skiciranje geometrijskog mesta korena, bez sračunavanja korena karakteristične jednačine, što je najčešće dovoljno pri kvalitativnoj analizi dinamičkog ponašanja sistema. U ovom odeljku navode se ta svojstva bez dokaza.

Svojstvo 1: Broj korena karakteristične jednačine jednak je stepenu karakteristične jednačine. Neka je prenosna funkcija otvorene povratne sprege data u obliku  $\frac{Q(s)}{P(s)}$  — pri čemu polinom  $P(s)$  ima stepen  $m$ , a polinom  $Q(s)$  ima stepen  $n$ . Za  $n \geq m$  karakteristična jednačina biće  $n$ -toga stepena.

Svojstvo 2: Svaki koren karakteristične jednačine započinje sa polom otvorene povratne sprege kada je  $K = 0$  a završava se ili sa nulom otvorene povratne sprege ili se asimptotski približava beskonačnosti kada je  $K = \infty$ .

Svojstvo 3: Ukoliko prenosna funkcija otvorene povratne sprege ima  $n$ -polova i  $m$  nula i ako je  $n > m$ , tada će se za  $K \rightarrow \infty$ ,  $m$  grana geometrijskog mesta korena steći u  $m$  konačnih nula, dok će  $(n - m)$  grana završiti u beskonačnosti.

Svojstvo 4: Broj grana geometrijskog mesta korena jednak je broju polova prenosne funkcije otvorene povratne sprege.

Svojstvo 5: Koreni karakteristične jednačine ili se nalaze na realnoj osi ili se pojavljuju kao kompleksno konjugovani parovi simetrično u odnosu na realnu osu.

Svojstvo 6: Uglovi asimptota koje odgovaraju  $n - m$  grana koje završavaju u beskonačnosti su dati sa:

$$\theta_{k(asipt)} = (2k + 1) \frac{\pi}{n - m} \quad (5.73)$$

a tačka presjeka asimptota je data sa:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \quad (5.74)$$

Svojstvo 7. Tačke odvajanja grana od realne ose date su rješavanjem jednačine po  $\sigma_0$ :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_0 - p_i} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_0 - z_i} = 0 \quad (5.75)$$

Svojstvo 8: Presečna tačka geometrijskog mesta korena sa  $j$ -osom može da se odredi na sledeći način:

- a) izvršiti zamenu  $s = j\omega$  u karakterističnoj jednačini,
- b) izjednačiti sa nulom imaginarni deo,
- c) rešiti jednačinu po  $\omega$ ,
- d) naći rešenje za  $K$ .

Presečna tačka geometrijskog mesta korena sa  $j$ -osom može da se odredi iz Rausovog kriterijuma stabilnosti ili bilo koga drugog algebarskog kriterijuma stabilnosti sistema. Za određivanje preseka sa imaginarnom osom, formira se Rausova šemu koeficijenata, odakle dobijamo uslov preseka sa imaginarnom osom. Vrednost za  $\omega$  u tački preseka se dobija iz:

$$\text{—} \quad (5.76)$$

Gde je      slobodan član karakteristične jednačine, a      je (      -vi koeficijent Rausove kolone ( $n$ -stepen karakteristične jednačine).

Svojstvo 9: Tangenta u tački odvajanja, odnosno tački spajanja uvek zaklapa ugao od  $90^\circ$  sa realnom osom.

Svojstvo 10: Ugao pod kojim grana geometrijskog mesta korena napušta pol ili se stiče u konačnu nulu prenosne funkcije otvorene povratne sprege sračunava se iz relacije:

$$\sum_{k=1}^m \phi_{zk} - \sum_{k=1}^n \phi_{sk} = -180^\circ \quad (5.77)$$

gde su:

$\phi_{zk}$  - uglovi pod kojim se grane geometrijskog mesta korena stiču u konačne nule funkcije otvorene povratne sprege,

$\phi_{pk}$  - uglovi pod kojim grane geometrijskog mesta korena napuštaju polove funkcije otvorene povratne sprege.

Iz poslednje jednačine slede relacije:

- za ugao  $\phi_{zi}$  pod kojim se grana geometrijskog mesta korena stiče u konačnu nulu  $z_i$

$$\phi_{zi} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \phi_{zk} - \sum_{k=1}^n \phi_{sk} = -180^\circ \quad (5.78)$$

- za ugao  $\phi_{pi}$  pod kojim grana geometrijskog mesta korena napušta pol  $s_i$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \phi_{zk} - \sum_{k=1}^n \phi_{pk} - \phi_{pi} = -180^\circ \quad (5.79)$$

Svojstvo 11. Vrednost pojačanja  $K$ , koja odgovara datoj tački na geometrijskom mestu korena, jednak je količniku između proizvoda modula vektora, povučениh u tu tačku iz polova funkcije povratnog prenosa, i proizvoda modula vektora, povučениh u tu tačku iz konačnih nula funkcije povratnog prenosa[39]:

Primer 1. Funkcija povratnog prenosa sistema je data sa

$$\text{—————} \quad (5.80)$$

Karakteristična jednačina (5.70) u ovom slučaju je

$$s(s+2)(s+3)+K=s^3+5s^2+6s+K=0. \quad (5.81)$$

Nanesimo u  $s$ -ravni polove:  $p_1=0$  (koordinatni početak),  $p_2=-2$  i  $p_3=-3$  (SI 3). Iz tih tačaka, u skladu sa prvim svojstvom, polaze grane geometrijskog mesta korena. Funkcija (5.80) nema konačnih nula, pa stoga, prema drugom svojstvu, sve tri grane geometrijskog mesta korena odlaze u beskonačnost i



to ona iz pola  $p_3 = -3$  na levo duž realne ose, dok druge dve grane, na osnovu 3. svojstva, odlaze u beskonačnost, približavajući se asimptotama, koje zaklapaju uglove od  $+60^\circ$  i  $-60^\circ$  u odnosu na realnu osu. Tačka preseka asimptota je prema svojstvu (6),

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_3}$$

Tačka odvajanja grana od realne ose nalazi se između polova  $p_1$  i  $p_2$ . Nju nalazimo, u skladu sa 7. svojstvom, iz jednačine

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_3} \quad (5.82)$$

Rešavanjem kvadratne jednačine (5.82) dobija se

$$\sigma_0 = -0,785.$$

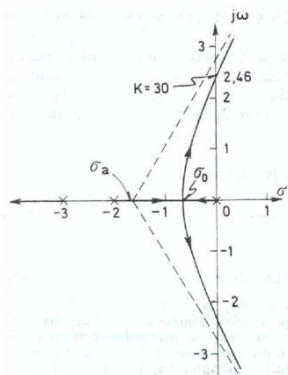
Saglasno 8. svojstvu, za određivanje preseka sa imaginarnom osom, formirajmo Rausovu šemu koeficijenata:

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_3}$$

odakle dobijamo uslov preseka sa imaginarnom osom:  $6-K/5=0$ , tj.  $K=30$ . Vrednost za  $\omega$  u tački preseka se dobija iz:

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_3}$$

Izgled geometrijskog mesta korena je prikazan na sl. 5.15.



Sl. 5.15. Geometrijsko mesto korena iz prethodnog primera 1 [39]

## 5.5 Integralni kriterijumi kvaliteta sistema

U prethodnim segmentima ove glave smo ocenjivali ponašanje sistema koristeći odskočni odziv frekvencijski odziv ili spektar polova i nula sistema u  $s$  - ravni, koji direktno korespondira s vremenskim područjem odnosno kvalitet ponašanja sistema smo ocenjivali pomoću parametara koji određuju tačnost njihovog rada u stacionarnom režimu i karakter prelaznog procesa u vremenskom i frekventnom području [39]. Takav način ocene ponašanja sistema uvodi mnoge karakteristične veličine (vreme kašnjenja, vreme uspona, vreme smirenja, preskok, dominantnu vremensku konstantu, koeficijent relativnog prigušenja). On onemogućava jednostavno međusobno upoređenje sistema i usložnjava projektovanje. Zbog toga su istraživani drugi kriterijumi kvaliteta, koji bi sveobuhvatnije okarakterisali ponašanje sistema na osnovu poznavanja signala greške u vremenskom domenu. Takvi kriterijumi su *integralni kriterijumi kvaliteta*. Pomoću njih se ocenjuje kvalitet sistema na osnovu integrala neke funkcije signala greške. Na taj način, sistemi se mogu upoređivati ne po pojedinim karakterističnim veličinama, već integralno, samo na osnovu jednog jedinog kriterijuma - integrala oblika[39]

$$(5.83)$$

gde je  $\varepsilon(t)$  - greška (odstupanja) izlazne veličine od one vrednosti odziva  $y(\infty)$  kojii sistem treba da ima u stacionarnorn stanju.

Za stabilan sistem  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$  kada  $t \rightarrow \infty$  pa poslednji integral ima konačnu vrednost. Geometrijski ta vrednost biće jednaka površini ograničenoj krivom greške i apscisnom (vremenskom) osom (slika 5.17.a). Površina će biii utoliko manja ukoliko su preskok i vreme smirenja prelaznog procesa manji, pa za postizanje optimalnih uslova ova površina treba da bude što manja.

To znači da se u ovom slučaju zadatak sinteze svodi na određivanje vrednosti podesivih parametara sistema koje minimiziraju predstavljeni integral .

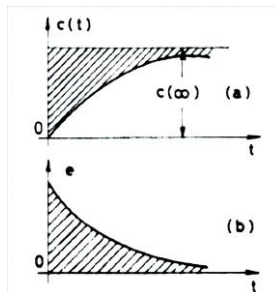
Za izračunavanje vrednosti integrala nije neophodno određivati  $\varepsilon(t)$ , pošto se može mnogo lakše izračunati preko kompleksnog lika greške primenom Laplasove transformacije prema jednačini

$$(5.84)$$

Odavde proizlazi da se početni integral može odrediti na sledeći način:

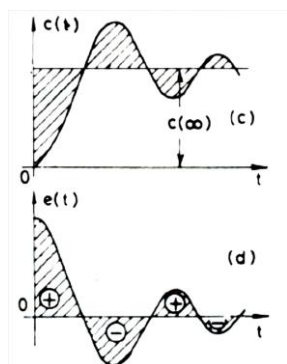
$$(5.85)$$

Ovaj kriterijum ima veliki nedostatak u tome što se može primenjivati samo u slučajevima kada prelazni proces ima aperiodični karakter, tj. kada greška ne menja znak u toku vremena.



*Slika 5.17. Grafička interpretacija integralnog kriterijuma kada greška ne menja znak [39]*

Ako prelazni proces ima oscilatorni karakter, onda se pri izračunavanju početnog integrala pozitivne i negativne površine (slika 5.18 c,d) algebarski sabiraju pa se minimum tog integrala može dobiti i u slučaju kada imamo oscilatoran prelazni proces sa malim prigušenjem ili uopšte bez prigušenja. S obzirom da kod proračuna sistema karakter prelaznog procesa može biti nepoznat, to ovaj kriterijum nije pogodan za praktičnu primenu [39].



Slika 5.18. Grafička interpretacija integralnog kriterijuma kada greška menja znak[39]

Nedostatak ovog kriterijuma može se otkloniti ako se uzme integral apsolutne vrednosti greške (slika 5.19)



Slika 5.19. Grafička interpretacija integralnog kriterijuma apsolutne vrednosti greške

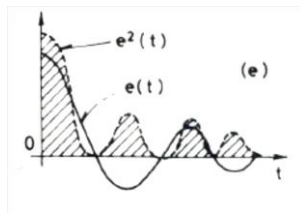
(5.86)

ali se ni ovaj kriterijum ne primenjuje zbog poteškoća oko njegovog izračunavanja.

Najčešće se primenjuje integralni kriterijum poznat kao „integral kvadrata greške“:

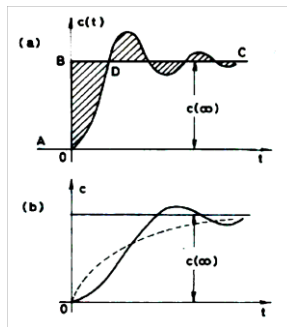
(5.87)

čija vrednost ne zavisi od znaka greške, a to znači ni od toga da li je prelazni proces aperiodičan ili oscilatoran. Veličina integrala brojno je jednaka šrafiranoj površini na slici 5.19. To znači da će veličina poslednjeg integrala biti utoliko manja ukoliko je manja suma šrafiranih površina na slici e, pa se optimizacija sistema u odnosu na ovaj kriterijum svodi na postupak minimizacije ove površine [39].



Slika.5.20 Grafička interpretacija integralnog kriterijuma integralom kvadrata greške[39]

Osnovni nedostatak kriterijuma integrala kvadrata greške jeste u tome što njegova vrednost ne određuje jednoznačno oblik krive prelaznog procesa. Pokazuje se, na primer, da jednoj istoj vrednosti integrala (5.21) mogu odgovarati potpuno različiti tipovi prelaznog procesa, od aperiodičnog do izrazito oscilatornog



Slika 5.21 Kvalitet prelaznog procesa pri dva različita integralna kriterijuma[39]

Zato se nameće potreba za formulacijom drugačijeg oblika integralnog kriterijuma, koji bi ograničavao ne samo veličinu dinamičke greške u toku prelaznog procesa, već i brzinu promene te greške.

Pored ovih metoda danas se koriste integralni kriterijumi koji će biti funkcija podešljivih parametara

$$I = I(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q) \quad (5.89)$$

i nalaženja minimuma funkcije, odnosno nalaženjem i izjednačavanjem sa nulom parcijalnih izvoda po podešljivim parametrima poslednje date funkcije:

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial \lambda_2} = 0, \dots, \frac{\partial I}{\partial \lambda_q} = 0 \quad (5.90)$$

U parametarskoj optimizaciji određenog sistema potrebno je istovremeno sa određivanjem optimalnih vrednosti parametara sistema, uzeti u obzir i zahteve u pogledu tačnosti rada sistema u stacionarnom režimu. Posle određivanja skupa vrednosti podešljivih parametara, koji istovremeno obezbeđuje zahtevanu tačnost rada sistema u stacionarnom režimu i minimuma integralnog kriterijuma, potrebno je proveriti i da li se sistem ne nalazi možda suviše blizu granice stabilnosti. Ako je to slučaj, biće potrebno učiniti dodatne korekcije vrednosti podešljivih parametara na račun integralnog kriterijuma, a sa namerom povećanja preteka stabilnosti[39].

## 5.6 Osetljivost sistema

U toku proučavanja kriterijuma za ocenu ponašanja sistema u prelaznim režimima i stacionarnom stanju, pretpostavljali smo da raspoložemo nominalnim parametrima elemenata i sistema tj. parametri, prenosni faktori i vremenske konstante se smatraju konstantnim. Opšte je poznato da komponente SAU ili bilo kog drugog sistema, korišćene za njegovu konstrukciju, imaju svoje nominalne karakteristike, koje proizvođači navode u svojim katalogima, uz određene tolerancije. Zbog uticaja okruženja i unutrašnjih promena (npr. zagrevanje, zamor itd) parametri se u manjoj ili većoj meri menjaju u toku rada. SAU unosi u sistem svoj deo uticaja na njegove karakteristike: stabilnost, tačnost, brzinu odziva itd. Neke komponente imaju manji, druge veći uticaj, odnosno posmatrana osobina sistema je manje ili više osetljiva na promenu ovog ili onog parametra. Zbog toga je od posebnog značaja utvrđivanje metodologije izučavanja uticaja promene parametara na karakteristike sistema. Stepem promene izučavane osobine ili funkcije sistema u odnosu na promenu nekog parametra ili neke funkcije sastavne komponente ocenjuje se kvantitativno *funkcijom osetljivosti* (*sensitivity*)[27].

Zadatak ispitivanja osetljivosti u osnovi se svodi na procenu uticaja promene parametara na stanje sistema. SAU se može smatrati utoliko boljim ukoliko je njegova osetljivost manja tj. ukoliko promene nekog parametra ili unutrašnje strukture manje utiče na stanja sistema

## 5.7 Robustnost sistema

Osnovni zadatak SAU se svodi na stabilno i kvalitetno ostvarivanje projektovanog upravljačkog algoritma. Stvarno stanje SAU razlikuje se od polaznih postavki uzetih pri projektovanju zbog: nesavršenosti matematičkog modela, netačnosti u određivanju parametara i promana parametara u toku vremena i netačnosti merenja. Stepenn nesavršenosti i netačnosti polaznih postavki za projektovanje se u principu može samo proceniti a ne i tačno odrediti. Zbog prisustva odstupanja između realnog sistema i njegovog apstraktnog modela kako u početnoj fazi sinteze, tako i u toku rada sistema, algoritme upravljanja treba odabrati tako da neutrališu negativne efekte kvalitativnih i kvantitativnih odstupanja na ponašanje SAU. Rešenje se traži u formiranju takvih algoritama upravljanja koji su u značajnoj meri neosetljivi tj. robustni na neizvesnost u poznavanju matematičkih modela i parametara sistema[27].

Robustnost je pojam uveden u teoriju i praksu SAU radi kvantitavnog utvrđivanja sposobnosti sistema da zadrži osobinu stabilnosti i pri značajnijim perturbacijama parametara i delovanju spoljašnjih poremećaja. Nasuprot tome, kao što smo videli, osetljivost sistema se utvrđuje za male perturbacije parametara. U tome leži osnovna razlika između ove dve osobine sistema, kao i u njihovom suprotnom značenju. Malo osetljiv sistem na parametarske perturbacije je robustan sistem i obrnuto. Međutim, zbog osnovne razlike u veličini perturbacija, za koje su ove dve osobine definisane, nije moguće kvantitativno izražavanje jedne osobine na osnovu poznavanja druge [27].

Za utvrđivanje robustnosti sistema u odnosu na stabilnost, kada se radi o linearnim sistemima, mogu nam poslužiti kriterijumi stabilnosti. Kriterijumi stabilnosti Najkvista i Bodea, na osnovu definicije preteka faze i preteka pojačanja, omogućavaju ocenu robustnosti stabilnosti sistema. Međutim, ove dve osobine sistema definisane su tako što se pretpostavilo da se jedna veličina drži na konstantnoj vrednosti, dok se druga menja. U realnom sistemu, zbog parametarskih perturbacija, dolazi do istovremene promene kako faze tako i pojačanja, a samim tim i do istovremene promene preteka faze i pojačanja. Zbog toga je otežano jednostavno kvantitativno utvrđivanje robustnosti sistema na osnovu ovog prilaza.

Povećanje stepena robustnosti nekog sistema je problem koji se na specifičan način mora rešavati od slučaja do slučaja. U većini slučajeva primena negativne povratne sprege daje veoma povoljne efekte. Kod većine tehničkih

sistema povećanje robustnosti se može postići primenom znatno složenijih postupaka.

### 5.8 Invarijantnost sistema

Invarijantnost je osobina sistema koja karakteriše njegovu apsolutnu neosetljivost na parametarske perturbacije i/ili spoljašnje poremećaje. To je stanje kome treba težiti pri izboru tipa i strukture sistema automatskog upravljanja. Međutim, on se ne može apsolutno dostići, već se može govoriti o delimičnoj invarijantnosti za određeni opseg parametarskih perturbacija ili spoljašnjih poremećaja. Sa stanovišta osnovnog zadatka automatskog upravljanja, invarijatnim sistemom smatramo sistem čiji je signal greške jednak nuli pri svim referentnim ulazima i poremećajima. Prema tome, invarijantan sistem je onaj sistem čiji spregnuti prenos u odnosu na referentni ulazni signal jednak jedinici, tj.

$W_s^r(s) = 1$ , a spregnuti prenos u odnosu na spoljašnji poremećaj je jednak nuli, tj.  $W_s^f(s) = 0$

Izborom struktura sistema, kao što su: kombinovani sistemi, sistemi sa beskonačnim pojačanjem, sistemi sa unutrašnjom povratnom spregom se teorijski može ostvariti invarijantnost.

### 5.9 Kontrolabilnost (upravljivost) i Opservabilnost (osmotrivost) sistema

Sa stanovišta sinteze regulacionih sistema prvo pitanje koje trebamo postaviti je: da li je određenim sistemom uopšte moguće upravljati. Zato se javlja potreba za odgovarajućim kriterijumima kojima je moguće utvrditi tzv. kontrolabilnost ili upravljivost sistema, pre nego što se krene sa sintezom regulatora. Ukratko, problem kontrolabilnosti se svodi na to da li je moguće zadanim upravljačkim varijablama sistema prebaciti iz proizvoljnog početnog stanja u proizvoljno konačno stanje.

#### Potpuna kontrolabilnost stanja

Sistem je potpuno kontrolabilan po stanjima, u zatvorenom vremenskom intervalu  $[t_0, t_1]$ , ako je moguće za zadani  $t_0$  i  $t_1$ , svako početno stanje  $x(t_0)$  prevesti u svako željeno konačno stanje  $x(t_1)$  preko vektora upravljanja u konačnom vremenskom intervalu  $t_0 \leq t \leq t_1 \leq \infty$ . Pri tome se pretpostavlja da



na vektor upravljanja nisu nametnuta nikakva dodatna ograničenja. Termin "potpuna" znači da su sva stanja upravljiva.

### **Potpuna kontrolabilnost izlaza**

Sistem je potpuno kontrolabilan po izlazima, u zatvorenom vremenskom intervalu  $[t_0, t_1]$ , ako je moguće za zadani  $t_0$  i  $t_1$ , svaki početni izlaz sistema  $y(t_0)$  prevesti u svako željeni konačni izlaz  $y(t_1)$  preko vektora upravljanja u konačnom vremenskom intervalu  $t_0 \leq t \leq t_1 \leq \infty$ .

Za linearan, dinamički sistem sa konstantnim parametrima koji je opisan jednačinama stanja

$$\dot{x} = Ax + B \cdot u$$

$$y = Cx + d \cdot u$$

Potreban i dovoljan uslov kontrolabilnosti ili upravljivosti nekog sistema je da matrica upravljivosti

$$Q_c = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$$

ima rang  $n$ . Konačno ako je:

rang  $Q_c = n \Rightarrow$  svih  $n$  stanja je kontrolabilno

rang  $Q_c = n - 1 \Rightarrow$  jedno stanje nije kontrolabilno

rang  $Q_c = n - 2 \Rightarrow$  dva stanja nisu kontrolabilna

Pošto se varijable stanja sistema ne moraju poklapati sa fizičkim (merljivim) varijablama sistema, sa stanovišta teorije upravljanja od posebnog je značaja mogućnost rekonstrukcije varijable stanja na osnovu merenja izlaznih varijabli sistema. To će biti moguće ako sistem poseduje osobinu tzv. opservabilnost ili merljivost.

### **Potpuna observabilnost (merljivost) stanja.**

Sistem je potpuno observabilan po stanjima (uz  $u = 0$ ) u zatvorenom vremenskom intervalu  $[t_0, t_1]$ , ako je moguće za zadani  $t_0$  i  $t_1$ , svako početno stanje  $x(t_0)$  egzaktno odrediti na osnovu poznavanja (merenja) vektora izlaza  $y(t)$  u intervalu  $[t_0, t_1]$ . Termin "potpuna" znači da su sva stanja observabilna (merljiva).

Za linearan, dinamički sistem sa konstantnim parametrima koji je opisan jednačinama stanja

$$\dot{x} = Ax + B \cdot u$$

$$y = Cx + d \cdot u$$

potreban i dovoljan uslov opservabilnosti ili merljivosti nekog sistema je da matrica opservabilnosti

ima rang  $n$ .

Konačno ako je:

rang  $Q_o = n \Rightarrow$  svih  $n$  stanja su opservabilni

rang  $Q_o = n - 1 \Rightarrow$  jedno stanje nije opservabilno

rang  $Q_o = n - 2 \Rightarrow$  dva stanja nisu opservabilna

## 6. SINTEZA LINEARNIH SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

### 6.1 Uvod

Zadatak sinteze ogleda se u izboru strukture i određivanju vrednosti podesivih parametara sistema prema postavljenim kriterijumima tako da sistem upravljanja, dobije unapred zadate (željene), karakteristike u domenu stacionarnog i prolaznog režima rada.

Kod projektovanja obično se zahteva da sistem bude dovoljno tačan i da ima što veću brzinu reagovanja, da na svom izlazu što vernije reprodukuje date ulazne veličine sa što manje oscilovanja i što manjom osetljivošću na šumove.

Kao prvi korak da se uradi sinteza sistema potrebno je postavljene tehničke zahteve izraziti u pogodnom vidu za proračun vrednosti kriterijuma kvaliteta ponašanja sistema, sa kojima se u procesu projektovanja može dalje matematički operisati. Rešenje se najčešće dobija kao kompromis između želje za zadovoljenjem postavljenih tehničkih zahteva i praktičnog interesa za što većim pojednostavljenjem računskog aspekta primene metode za analizu ili sintezu sistema.

Sinteza (projektovanje) linearnih SAU se realizuje kroz nekoliko detaljnijih faza, a to su:

1. Postavljanje tehničkih zahteva koje treba da ispunjava SAU
2. Izbor strukture sistema upravljanja
3. Izbor kataloških komponenti
4. Formiranje matematičkog modela na osnovu izabranih komponenta
5. Na osnovu matematičkih modela komponenti i izabrane strukture sistema, formira se matematički model ukupnog SAU.
6. Sistem, komponovan od standardnih elemenata, najčešće ne ispunjava postavljene tehničke zahteve u pogledu: stabilnosti, brzine reagovanja, tačnosti u ustaljenom stanju.

7. Ako sistem ne ispunjava definisane tehničke zahteve, onda se u sistem unosi kompenzator ili se vrši izbor parametara regulatora za korekciju (kompenzaciju) dinamičkih/statičkih karakteristika sistema.
8. Nakon projektovanja kompenzatora, proveravaju se osobine sistema u pogledu stabilnosti i ispunjenja tehničkih zahteva: analitičkim putem, simulacijom na računaru, izradom laboratorijske makete i industrijskog prototipa.

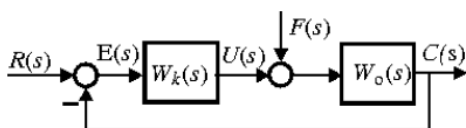
Ocena kvaliteta linearnih sistema automatskog upravljanja kao osnovnom i bitnom segmentu za sistese sistema SAU je detaljno analizirana u prethodnom poglavlju

## 6.2 Izbor strukture i zakona upravljanja SAU

Izbor strukture i zakona upravljanja predstavlja prvi, veoma važan, korak u sintezi SAU. Navešćemo najčešće korišćene strukture i njihove osobine, kao i najčešće primenjivane linearne zakone upravljanja.

### Osnovna struktura SAU

Osnovnu strukturu sistema SAU je sistem sa povratnom spregom s dva bloka: *objekta u širem smislu* ili *postrojenja*, funkcije prenosa  $W_o(s)$  i *upravljačkog sistema* ili *regulatora (kompenzatora)*, s funkcijom prenosom  $W_k(s)$ , sl.6.1. Pri tome, dejstvo poremećaja  $F(s)$  je svedeno na ulaz objekta. Osnovni zadatak sistema je da upravljana promenljiva  $C(s)$  bude identična referentnom signalu  $R(s)$ , tj. da signal greške  $E(s)$  bude jednak nuli [27].



Slika 6.1. Osnovna struktura SAU.[27]

Postoje i druge strukture sistema kao što su strukture sistema sa referentnim modelom, strukture sa prenosnom kompenzacijom, kombinovani sistemi s prenosnom kompenzacijom i drugi. U ovom segmentu mi ćemo se baviti osnovnom strukturom sistema.

### 6.2.1 Zakoni upravljanja SAU

Pored izbora adekvatne strukture SAU, za rešavanje zadataka upravljanja, veoma je važan i izbor zakona upravljanja. Zakoni upravljanja mogu biti

*linearni* i *nelinearni*. U ovom kursu bavićemo se linearnim zakonima upravljanja.

Zakon upravljanja predstavlja funkcionalnu zavisnost između signala greške  $e(t)$  i signala upravljanja  $u(t)$  koji deluju na objekat upravljanja odnosno  $u(t) = f(e(t))$ .

### **Osnovni i kombinovani linearni zakoni upravljanja(dinamički članovi regulatora)**

Ponašanje regulatora, te način obrade ulaznog signala greške u regulatoru sa ciljem formiranja adekvatnog upravljačkog signala na izlazu opisuje se matematički. Dejstvo regulatora može linearno da zavisi od greške, njenog integrala, ili prvog izvoda greške po vremenu. Na bazi ove činjenice sledi podela regulatora na proporcionalni, integralni i diferencijalni regulator. Pomoću navedenih osnovnih regulatora moguće je formirati složenije; proporcionalno-integralne i proporcionalno-diferencijalne regulatore, kao i najsloženije proporcionalno-integralno-diferencijalne regulatore.

### **Elementarni regulatori**

Najjednostavnija vrsta regulatora je proporcionalni regulator nultog reda, kojeg opisuje sledeća relacija u vremenskom domenu:

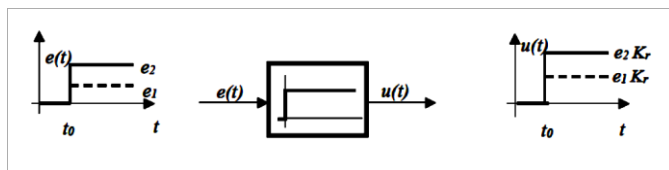
$$u(t) = K_p * e(t)$$

Ovde je  $K_p$  faktor proporcionalnog dejstva ili pojačanje regulatora, a  $e(t)$  je signal greške. Funkcija prenosa proporcionalnog regulatora ima tada sledeći oblik:

$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \quad (6.1)$$

Proporcionalni zakon upravljanja omogućava da se izborom pojačanja  $K_p$  obezbedi potrebna dinamika prelaznog procesa i tačnost u ustaljenom stanju. Takvo upravljanje se primenjuje prvenstveno u sistemima čiji objekat poseduje astatizam ili kod sistema koji ne zahtevaju veliku statičku tačnost.

Na slici 6.2. prikazana je blok šema proporcionalnog (P) regulatora. Blok je formiran upisivanjem prelazne karakteristike. Na slici su prikazane prelazne karakteristike P regulatora pri različitim vrednostima pojačanja regulatora ( $K_p$ ).



Slika 6.2 Prelazne karakteristike P regulatora pri različitim vrednostima greške regulacije

**Integralnim regulatorom** se ostvaruje integralno dejstvo upravljanja koji proporcionalno povezuje grešku  $e(t)$  sa brzinom promene upravljačke promenljive  $u(t)$ , odnosno:

$$\frac{du(t)}{dt} = K_I e(t) \quad (6.2)$$

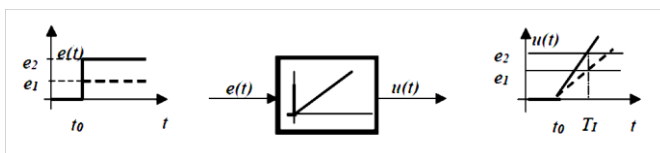
Recipročna vrednost pojačanja  $K_I$  je konstanta  $T_I$ , i predstavlja vreme integralnog dejstva, tj vreme koje je potrebno da nivo izlaznog signala regulatora dostigne nivo ulazne jedinične odskočne funkcije. Ako se prethodni izraz integrira, dobija se uobičajeni oblik jednačine integralnog regulatora nultog reda:

$$u(t) = \frac{1}{T_I} \int_0^t \varepsilon(t) dt \quad (6.3)$$

Funkcija prenosa integralnog regulatora ima sledeći oblik:

$$G_I(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_I}{s} = \frac{1}{T_I * s} \quad (6.4)$$

Na slici 6.3. prikazana je blok šema integralnog regulatora sa prelaznom karakteristikom. Prikazani su i odzivi regulatora za različite vrednosti integralnog vremena i različite vrednosti greške.



Slika 6.3 – Odzivi I regulatora pri različitim vrednostima greške

Integralni zakon upravljanja se primenjuje kada se želi postići velika statička tačnost, a objekat upravljanja ne poseduje astatizam. Pojačanjem  $K_i$  se podešava prelazni proces u sistemu. Treba istaći da uvođenje integralnog zakona upravljanja usporava sistem i može biti uzrok pojave velikih i dugotrajnih preskoka u odzivu.

**Diferencijalno dejstvo** regulatora određen je proporcionalnom zavisnošću između upravljačke promenljive  $u(t)$  i brzine promene greške  $e(t)$ . Jednačina diferencijalnog regulatora ima sledeću formu:

$$u(t) = T_D \frac{de(t)}{dt} \quad (6.5)$$

Diferencijalni zakon upravljanja se nikad ne primenjuje samostalno, jer nema dejstvo u ustaljenom stanju. Zbog toga se on uvek koristi u kombinaciji s prethodna dva zakona upravljanja.

### Kombinovani linearni zakoni upravljanja

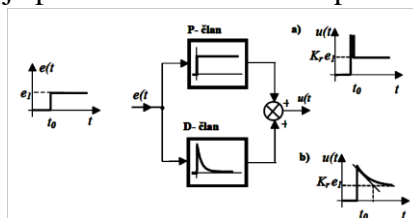
Omogućavaju optimizaciju prelaznog procesa u sistemu. Kombinovani linearni zakoni upravljanja su: *proporcionalno-diferencijalni* (PD), *proporcionalno-integralni* (PI), *proporcionalno-integralno-diferencijalni* (PID):

**PD** regulator se dobija paralelnom vezom proporcionalnog člana i diferencijalnog člana. Dinamička svojstva dobijenog elementa mogu se opisati u vremenskom domenu sa diferencijalnom jednačinom:

$$u(t) = K_P * \left[ e(t) + T_D \frac{de}{dt} \right], \quad (6.6)$$

Prenosna funkcija u kompleksnom domenu je  $G_{PD} = K_P(1 + sT_D)$

Ako se superponiraju odzivi jednog P i jednog D člana sa kašnjenjem dobija se PD regulator čija je prelazna karakteristika prikazana na slici 6.4



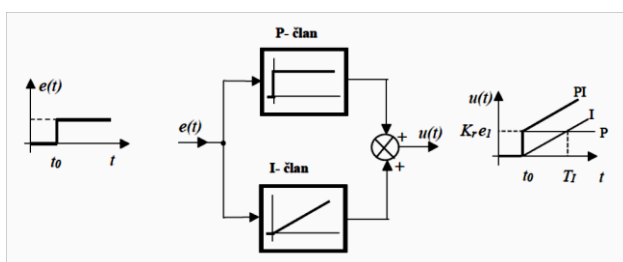
Slika 6.4 Prelazna karakteristika i određivanje diferencijalnog vremena pri idealnom a) i pri diferenciranju sa kašnjenjem.

**PD** zakon upravljanja može obezbediti brz proces regulacije bez preskoka, a primenjuje se obično u sistemima čiji objekat upravljanja poseduje astatizam (na primer u pozicioniranju robota).

**PI** regulator se dobija paralelnom vezom proporcionalne i integralne komponente:

$$- \quad - \quad - \quad (6.7)$$

Odziv PI regulatora se dobija superponiranjem odziva P i I regulatora kao što je to prikazano na slici 6.5.



Slika 6.5 Prelazna karakteristika PI regulatora i način određivanja integralnog vremena

U praksi su najčešće u upotrebi dinamički regulatori sastavljeni od proporcionalnog, integralnog i diferencijalnog člana tzv. PID regulatori.

Ako se sa  $e(t)$  obeleži ulazni signal, a sa  $u(t)$  izlazni signal, PID regulator se opisuje sledećim izrazom:

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} + K_i \int_{-\infty}^t e(t) dt \quad (6.8)$$

a prenosna funkcija regulatora je:

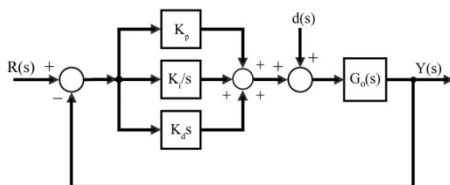
$$G_{PID} = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_d s + \frac{K_i}{s} \quad (6.9)$$

Prema tome, projektovanje PID regulatora predstavlja određivanje konstanti  $K_p, K_d, K_i$  tako da performanse sistema što bolje ispunjavaju postavljene specifikacije.



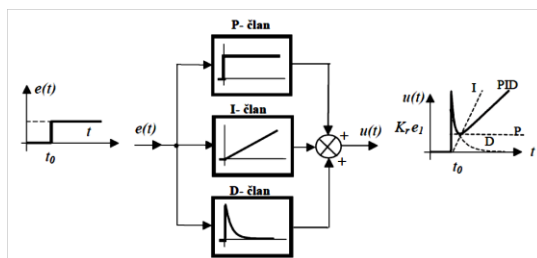
PID regulator je jednostavan regulator koji se može koristiti da popravi tranzijentna ponašanja sistema i karakteristike usteljenog stanja sistema. Ukoliko objekat ne poseduje astatizam, a želi se nulta greška u stacionarnom stanju, uz prihvatljivo brz prelazni proces, tada se primenjuje PID regulator.

Opšta struktura sistema sa zatvorenom povratnom spregom i PID regulatorom je data na slijedećoj slici.



Slika 6.6. Sistem upravljanja sa PID regulatorom

Prelazna karakteristika PID regulatora je prikazana na slici 6.7 . Diferencijalno dejstvo se manifestuje na početku karakteristike, P dejstvo u središnjem delu, a I dejstvo u delu u kojem se odziv smiruje tj. zauzima svoje ustaljeno stanje.



Slika 6.7 Prelazna karakteristika PID regulatora

Kombinovani linearni zakoni upravljanja omogućavaju optimizaciju prelaznog procesa u sistemu.

## 6.2.2 Vrste kompenzatora

Pored navedenih zakona upravljanja, koji su karakteristični za tzv. *industrijske linearne regulatore*, u praksi sinteze servosistema se koriste zakoni upravljanja *diferencijalnog*, *integralnog* i *integrodiferencijalnog* (*diferencijalnointegralnog*) tipa. Pri tome, oni se razlikuju od prethodnih po tome što njihovo delovanje nema odlike “čistih” diferencijala ili integrala

signala greške, ili, bolje rečeno, to delovanje je vezano samo za određene opsege frekvencija. Takvi zakoni upravljanja obično se realizuju pasivnim četvoropolima, koji su dobili naziv *kompensatori*. Kompensatori mogu biti izrađeni od elemenata različite tehničke prirode (električni, mehanički, hidraulični i drugi). Najjednostavnija je konstrukcija pomoću pasivnih električnih elemenata, otpornika i kondenzatora. Ne koriste se induktivni kalemovi jer su konstruktivno složeniji od kondenzatora, a nisu pogodni za primenu [27].

Zavisno od strukture impedansi postoje tri osnovna tipa kompenzatora, i to: diferencijalni, integralni i diferencijalno-integralni kompenzator (tabela 6.1).

*Kompensator diferencijalnog tipa* opisuje se diferencijalnom jednačinom

$$\text{---} \quad \text{---} \quad (6.10)$$

ili funkcijom prenosa: --- ---

Kompensator integralnog tipa se opisuje diferencijalnom jednačinom

$$\text{---} \quad \text{---} \quad (6.12)$$

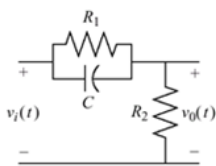
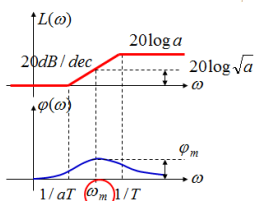
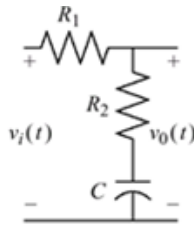
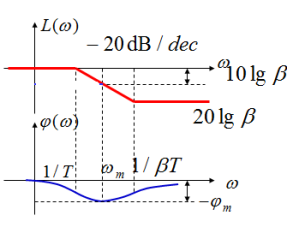
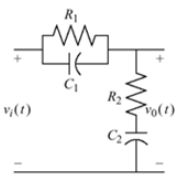
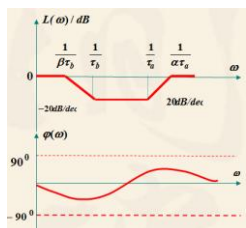
ili funkcijom prenosa: --- ---

Kompensator integro-diferencijalnog (diferencijalno-integralnog) tipa opisuje diferencijalnom jednačinom

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}$$

ili funkcijom prenosa: --- ---

Tabela 6.1 Osnovni električni kompenzatori

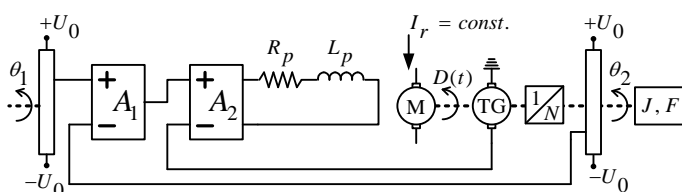
Tip kompenzatora	Frekventna prenosna funkcija	Električna šema	Logaritamska frekventna karakteristika
Diferencijalni	$\frac{s + \frac{1}{R_1 C}}{s + \frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C}}$		
Integralni	$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{s + \frac{1}{R_2 C}}{s + \frac{1}{(R_1 + R_2) C}}$		
Diferencijalno-integralni	$\frac{\left(s + \frac{1}{R_1 C_1}\right) \left(s + \frac{1}{R_2 C_2}\right)}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1}\right) s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$		

### 6.3 Sinteza kompenzatora proste regulacione konture

Nakon utvrđivanja tehničkih zahteva, izbora strukture sistema, određivanja matematičkog modela objekta pristupa se sintezi elemenata sistema koji predstavljaju sastavni deo upravljačkog sistema. Postoji više vrsta upravljačkih elemenata ito: upravljački element po signalu greške (kompenzator ili regulator), upravljački element po zadatoj vrednosti (prenosni kompenzator) i upravljački element po opterećenju (kompenzator opterećenja)). U ovom segmentu razmatra će se sinteza upravljačkog sistema proste (osnovne) regulacione konture po signalu greške nazvan rednim kompenzatorom (negde se naziva i kaskadnim kompenzatorom).

Pored rednih kompenzatora, primenjuju se i *paralelni kompenzatori*, koji se nalaze u lokalnim povratnim spregama, čineći na taj način sistem višekonturnim.

Vrste kompenzatora po konstrukciji i po dinamičkim osobinama su brojne. Problem sinteze se, tada, pojednostavljuje i svodi na izbor tipa i parametara kompenzatora primenom odgovarajućih algoritamskih postupaka. Ovaj način sinteze je karakterističan za projektovanje servosistema kao što je prikazano na slici 6.8.



Slika 6.8 Pozicioni servomehanizam[15]

Drugi pravac sinteze SAU je vezan za primenu linearnih zakona upravljanja i standardnih industrijskih regulatora (o kojima je napred najosnovnije rečeno): P, I, PI, PD i PID tipa.

U praksi projektovanja kompenzatora najveću primenu su našle Bodeova i metoda GMK, dok se za izbor tipa i parametara regulatora koristi Nikvistova ili Bodeova metoda i GMK

Tehničke zahteve za regulacione sisteme mogu se zadavati kako u frekventnom, tako i u vremenskom domenu. Kada se za sintezu kompenzatora primenjuje Bodeova metoda, tada tehnički zahtevi moraju biti zadati u frekventnom domenu. Međutim, kada se koristi metoda GMK, tada se tehnički zahtevi zadaju u vremenskom domenu. Ne postoji eksplicitna analitička zavisnost između frekventnog i vremenskog domena. Za prevođenje tehničkih zahteva, iz jednog u drugi domen, koriste se približne relacije ili nomogrami.

### 6.3.1 Sinteza kompenzatora primenom Bodeove metode

Danas je poznato nekoliko inženjerskih (grafo-anahtičkih) metoda sinteze SAU, ali se kao najpogodnija za inženjersku praksu pokazala metoda

logaritamskih frekventnih karakteristika otvorenog kola pomoću Bodeovih dijagrama.

Metoda sinteze SAU pomoću Bode-ovih dijagrama (t.j. pomoću logaritamskih amplitudno-frekventnih i fazno-frekventnih karakteristika) našla je široku primenu u inženjerskoj praksi zbog svoje jednostavnosti i preglednosti. Ideja metode zasniva se na postojanju veze između prelaznog procesa i logaritamsko-frekventne karakteristike, koja se izražava na veoma jednostavan način. Naime, kad se zna željeni oblik prelaznog procesa onda se vrlo lako može nacrtati željena logaritamska karakteristika koja odgovara tom procesu. A kada se zna oblik željene logaritamske karakteristike onda se nastoji da se njenom obliku približi stvarna logaritamska karakteristika datog (nekorigovanog) sistema. U najvećem broju slučajeva stvarna (polazna) logaritamska karakteristika ne može se približiti željenoj karakteristici bez uvođenja odgovarajućih korekcionih elemenata, ili kako se još nazivaju uskladnika (kompenzatora).

Željena logaritamsko-frekventna karakteristika otvorenog kola (Bodeov dijagram) crta se prema polaznim zahtevima za projektovanje sistema i prema osnovnim pokazateljima procesa. Osnovni zahtevi obično obuhvataju - traženu tačnost sistema uslovljenu potrebnim koeficijentom pojačanja, vreme smirenja prelaznog procesa traženu rezervu stabilnosti po fazi i modulu, odnosno određeni preskok, propusni opseg i dr.

### 6.3.1.1 Sinteza diferencijalnog kompenzatora primenom Bodeove metode

Funkcija prenosa diferencijalnog kompenzatora ima oblik kao što je napred navedeno

$$G_d(s) = \frac{s+a}{s+b} = \frac{a}{b} \frac{1+s/a}{1+s/b} \quad (6.13)$$

gde je nula  $z = -a$  po apsolutnoj vrednosti manja od pola  $p = -b$  ( $a < b$ ).

Na osnovu gornje tabele za diferencijalni kompenzator realizovan RC četverokrajnikom vidimo da su pol i nula određeni sa

$$a = 1/R_1C \quad i \quad b = 1/R_1C + 1/R_2C \quad (6.14)$$

Zamenom  $s = j\omega$  dobijamo

$$G_d(j\omega) = \frac{a}{b} \frac{1 + j\omega/a}{1 + j\omega/b} \quad (6.15)$$

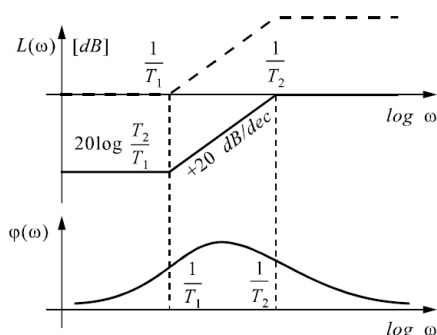
pa je logaritamski diiagram slabljenja diferencijalnog kompenzatora određen sa

$$|G_d(j\omega)|_{db} = 20 \log \left( \frac{a}{b} \right) + 20 \log \sqrt{1 + \omega^2/a^2} - 20 \log \sqrt{1 + \omega^2/b^2} \quad (6.16)$$

Logaritamski dijagram faze diferencijalnog kompenzatora određen je sa

$$\phi(\omega) = \arg G_d(j\omega) = \arctg \omega/a - \arctg \omega/b \quad (6.17)$$

Pri vrlo niskim i vrlo visokim učestanostima fazni pomeraj koji unosi diferencijalni kompenzator u prenosu prostoperiodičnih signala je vrlo mali.



Slika 6.9 Log dijagrami slabljenja i faze diferencijalnog kompenzatora

Inače, taj fazni pomeraj je uvek pozitivan. Učestanost pri kojoj je taj fazni pomeraj maksimalan može se odrediti ako se izvod faznog ugla diferencijalnog kompenzatora po  $\omega$  izjednači sa nulom, tako da se dobije

$$\omega = \omega_m = \sqrt{a \cdot b} \quad (6.18)$$

Vrednost maksimalnog faznog pomeraja  $\phi_{\max}$  dobijamo zamenom poslednjeg izraza u izraz za logaritamski dijagram faze diferencijalnog kompenzatora:

$$\phi_{\max} = (90^\circ - 2 \arctg \sqrt{a/b}) \text{ stepeni.} \quad (6.19)$$

Sa slike 6.9 se vidi da kompenzator pri niskim učestanostima unosi slabljenje koje je jednako odnosu  $a/b$ . Pri vrlo visokim učestanostima kompenzator ne unosi nikakvo slabljenje [39].

Primena diferencijalnog kompenzatora se zasniva na njegovoj osobini da pri prenosu signala unosi pozitivan fazni pomeraj. Stoga se primenjuje kad god je potrebno povećati pretek stabilnosti i propusni opseg (brzinu reagovanja) sistema.

Opšti postupak sinteze diferencijalnog kompenzatora podrazumeva sledeće faze:

1. Postavljeni zahtevi se izraze u vidu brojnih vrednosti parametara koji karakterišu željeni frekventni odziv sistema[39].
2. Za dati sistem bez kompenzatora se ispita da li je ispunjen zahtev u pogledu tačnosti rada u ustaljenom režimu, tj. da li odgovarajuća konstanta greške ima potrebnu vrednost  $i$ , ako nema, u sistem se unosi dodatno pojačanje tako da ovaj zahtev bude ispunjen [39].
3. Za sistem sa unetim pojačanjem se konstruiše asimptotski logaritamski dijagram slabljenja. Na osnovu ovog dijagrama se približno odredi vrednost presečne učestanosti pojačanja  $\omega_1$ , zatim izračuna  $\phi_{pf}$  i, na taj način, ustanovi da li sistem ispunjava postavljene zahteve u pogledu brzine reagovanja i preteka stabilnosti.
4. Ako  $\omega_1$  ima zadovoljavajuću vrednost, a pretek faze je nedovoljan, na osnovu izračunate popravke u fazi  $i$  jednačine  $\phi_{\max} = (90^\circ - 2\arctg\sqrt{a/b})$  usvaja se tip diferencijalnog kompenzatora (jednostruki, dvostruki, itd.) i njegov odnos  $a/b$ . Pri tome, usvojeni odnos nije poželjno da bude manji od 0.1, a  $\phi_{\max}$  usvojenog kompenzatora treba da bude veće od zahtevane popravke u fazi.
5. Pošto se u sistem unese dodatno pojačanje, koje kompenzira slabljenje diferencijalnog kompenzatora pri niskim učestanostima; donja prelomna učestanost kompenzatora se bira tako da u rezultatu dobijeni asimptotski logaritamski dijagram slabljenja kompenziranog sistema seče  $\log \omega$  osu pod nagibom od -20 dB/dec pri što je moguće širem opsegu.
6. Konstruiše se asimptotski logaritamski dijagram slabljenja kompenzovanog sistema. Odredi se nova presečna učestanost

pojačanja i pretek faze sa ciljem da se na kraju proveri ispunjenje postavljenih zahteva[27],[21],[39].

Da bismo ustanovili opšti postupak sinteze diferencijalnog kompenzatora, prosledićemo ovu sintezu na primeru jednog sistema.

Dat je sistem funkcije povratnog prenosa:  $\frac{K}{s(s+1)}$ . Projektovati redni kompezator tako da se zadovolje sledeći uslovi sistema u zatvorenoj sprezi: brzinska konstanta  $K_v = 10$ , pretek faze  $\phi = -45^\circ$ . [21]

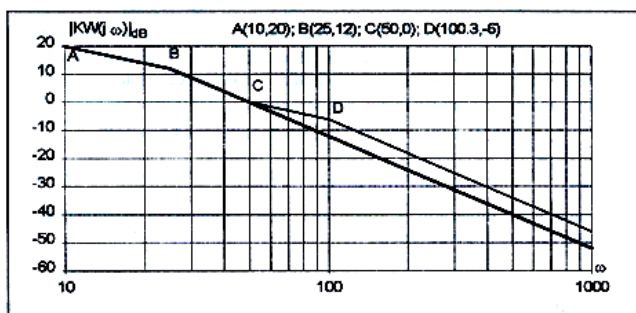
### Rešenje:

U cilju povećanja brzinske konstante sistema neophodno je uvesti pojačanje:

(sa  $K_v = 10$  je označena brzinska konstanta nekompensovanog sistema).

Zatim se crta asimptotska amplitudska frekventna karakteristika sistema (slika 6.10, karakteristika je izvučena debljom linijom). Neposrednim proveravanjem preteka faze vidi se da zahtev nije ispunjen, te se pristupa projektovanju diferencijalnog kompezatora [21]:

$$\frac{K}{s(s+1)} \cdot \frac{K_c}{s} = \frac{K_c K}{s^2(s+1)} \quad (6.20)$$



Slika 6.10 Ilustracija postupka sinteze diferencijalnog kompenzatora[21]

Za nulu diferencijalnog kompenzatora usvojimo vrednost  $K_c = 10$ . Kako je presečna učestanost pojačanja nekompensovanog sistema takođe



, ovakvim izborom nule diferencijalnog kompenzatora će i presečna učestanost pojačanja kompenzovanog sistema ostati ista. Na osnovu uslova za željenu vrednost preteka faze određuje se pol kompenzatora

$$(6.21)$$

Dakle funkcija prenosa kompenzatora postaje:

———. Na slici 6.10 je data i frekventna karakteristike slabljenja kompenzovanog sistema i izvučena je tanjom linijom.

Primenom diferencijalnog kompenzatora može postići željeni pretek stabilnosti. Pored toga, unošenje ovog kompenzatora u sistem ima za posledicu povećanje propusnog opsega. Sa gledišta brzine reagovanja sistema, veliki propusni opseg predstavlja poželjnu karakteristiku. Naime, što je propusni opseg veći, to su vremena kašnjenja, uspona i smirenja manja. Međutim, u sistemima automatskog upravljanja veliki propusni opseg nije uvek poželjan i to iz više razloga. Pre svega, diferencijalni kompenzator, kao što znamo, slabi sporopromenljive signale, a bez slabljenja propušta signale čija je brzina promene velika. Ako pri tome uzmemo u obzir da se pri sintezi diferencijalnog kompenzatora mora uneti dodatno pojačanje za kompenzaciju slabljenja kompenzatora pri niskim učestanostima, proizilazi da će tako sintetizovan element upravljanja, sačinjen od pomenutog dodatnog pojačavača i diferencijalnog kompenzatora, pojačavati brzopromenljive signale. Izlaz ovog elementa upravljanja je priključen na ulaz drugih komponenti sistema – na primer, pojačavača i objekta upravljanja. Ove komponente nisu uvek u stanju da prate brzopromenljiv i uz to još i veliki upravljački signal na izlazu elementa upravljanja. Štaviše, pri takvim pobudnim signalima one obično ulaze u zasićenje, što se mahom odnosi na izvršni organ upravljanja, koji je obično element elektromehaničkog tipa. Drugim rečima, u sistemu, kompenzovanom sa samo diferencijalnim kompenzatorom, dešava se da izvestan broj komponenti prestane da radi u linearnom režimu. U tom slučaju dinamičko ponašanje kompenzovanog sistema neće biti u skladu sa očekivanim rezultatima sinteze, koja ima za pretpostavku linearan model sistema. Stoga po unošenju diferencijalnog kompenzatora treba proveriti da li dinamičko ponašanje ostalih komponenti sistema i dalje poseduje linearni karakter. Suviše veliki propusni opseg nije pogodan i zbog osetljivosti sistema na

dejstva šumova i spoljnih poremećaja, koji obično padaju u domen visokih učestanosti [21],[27],[39].

### 6.3.1.2 Sinteza integralnog kompenzatora primenom Bodeove metode

Integralni kompenzator ima prenosnu funkciju oblika [39]

$$G_i(s) = \frac{a}{b} \frac{s+b}{s+a} = \frac{1+s/b}{1+s/a} \quad (6.22)$$

gde je nula  $z = -b$  po apsolutnoj vrednosti veća od pola  $p = -a$  ( $b > a$ ).

Prenosna funkcija RC četverokrajnika datog u tabeli 6.1 ima oblik

$$G_i(s) = \frac{V_2(s)}{V(s)_1} = \frac{R_2 + 1/Cs}{R_1 + R_2 + 1/Cs} = \frac{1+s/b}{1+s/a} \quad (6.23)$$

Gde je

$$a = \frac{1}{(R_1 + R_2)C} \quad i \quad b = \frac{1}{R_2 C} \quad ili \quad T_1 = R_2 C, \quad T_2 = (R_1 + R_2)C$$

Na osnovu izraza za opšti oblik prenosne funkcije integralnog kompenzatora zamenom  $s = j\omega$  dobijamo da je frekventna funkcija prenosa integralnog kompenzatora

$$G_d(j\omega) = \frac{1 + j\omega/b}{1 + j\omega/a} \quad (6.24)$$

pa je logaritamski diiagram slabljenja diferencijalnog kompenzatora određen sa

$$|G_i(j\omega)|_{db} = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2/b^2} - 20 \log \sqrt{1 + \omega^2/a^2} \quad (6.25)$$

Logaritamski dijagram faze diferencijalnog kompenzatora određen sa

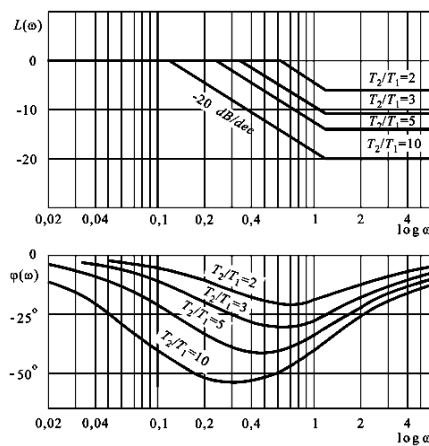
$$\phi(\omega) = |G_i(j\omega) = \arctg \omega/b - \arctg \omega/a \quad (6.26)$$

Za različite vrednosti odnosa  $a/b$ , odnosno  $T_2/T_1$  ovi dijagrami su konstruisani na sl. 6.11.

Sa slike 6.11 se mogu uočiti glavna svojstva integralnog kompenzatora. Pri učestanostima koje su znatno niže od donje prelomne učestanosti kompenzatora, kompenzator ne unosi slabljenje u sistem, dok je pri učestanostima koje su dosta više od gornje prelomne učestanosti to slabljenje jednako odnosu  $a/b(T_2/T_1)$ . Pri vrlo niskim i vrlo visokim učestanostima fazni ugao integralnog kompenzatora je mali i može se zanemariti. Inače, taj ugao je uvek negativan, za razliku od diferencijalnog kompenzatora, gde je bio pozitivan[39].

Primena integralnog kompenzatora se zasniva na njegovoj osobini da pri prenosu signala u domenu visokih učestanosti unosi slabljenje i zanemarljivo mali fazni pomeraj. Zbog ovog slabljenja, posle njegovog unošenja u sistem, propusni opseg sistema će da se smanji. Stoga se integralni kompenzator primenjuje u sledećim slučajevima:

1. Kada postoji potreba da se smanji propusni opseg sistema sa ciljem smanjenja uticaja šumova ili poremećaja koji deluju na sistem, a čiji se frekventni spektri nalaze u domenu učestanosti na granici propusnog opsega nekompenzovanog sistema.
2. Kada za dati sistem brzina reagovanja nije od posebnog interesa.
3. Ako se želi da se poveća tačnost rada sistema u ustaljenom stanju.



Sl. 6.11. Log dijagrami slabljenja i faze integralnog kompenzatora

Opšti postupak sinteze integralnog kompenzatora ćemo izvesti na jednom primeru.

Funkcija prenosa procesa je \_\_\_\_\_ . Projektovati redni kompenzator tako da budu zadovoljeni sledeći zahtevi [21]:

Brzinska konstanta \_\_\_\_\_ pretek faze \_\_\_\_\_ i pretek pojačanja \_\_\_\_\_

U sistem se mora uneti pojačanje  $K$  takvo da je: \_\_\_\_\_ , a

potom se nacрта frekventna karakteristika slabljenja sistema sa prethodno određenim pojačanjem  $K$ , koja je prikazana na slici 6.12.

Ispitivanjem faze u pojedinim tačkama zaključuje se da je:

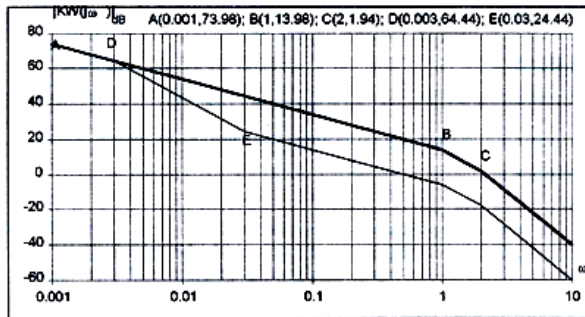
te je dovoljno da se za učestanost preteka faze usvoji \_\_\_\_\_ Nula kompenzatora određuje se iz uslova da ona bude dovoljno udaljena od presečne učestanosti pojačanja kako bi integralni kompenzator što manje uticao na fazu kompenzovanog sistema:

—

Grafičkim postupkom se određuje pol integralnog kompenzatora na sledeći način: počev od tačke \_\_\_\_\_ crta se amplitudska karakteristika u smeru opadanja učestanosti, dakle u levo, koja je u segmentima paralelna sa početnom krivom ( puna linija ), sve do vrednosti učestanosti \_\_\_\_\_ , odnosno do tačke E. Od ove tačke na levo potrebno je povući pravu pod nagibom za 20dB manjim (pol integralnog kompenzatora smanjuje nagib karakteristike slabljenja za 20 decibela po dekadi) od nagiba početne krive na tim učestanostima, dakle pod nagibom od -40dB po dekadi. U preseku ove prave i početne karakteristike dobija se vrednost pola integralnog kompenzatora u tački \_\_\_\_\_ . Proverom se ustanovljava da se usklađeni sistem \_\_\_\_\_ Još je važno proveriti pretek pojačanja[21].

Kako je:

zaključuje se da je učestanost preteka pojačanja veća od učestanosti , znači da je vrednost slabljenja na učestanosti manja nego na učestanosti . ( amplitudska karakteristika je opadajuća funkcija na višim učestanostima, kao i fazna karakteristika ). Samim time je i pretek pojačanja veći od 10 dB. Amplitudska karakteristika kompenzovanog sistema data je na slici 6.12. tanjom linijom.



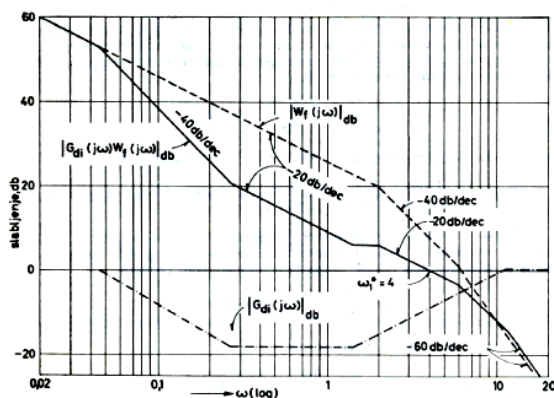
Slika 6.12. Ilustracija postupka sinteze diferencijalnog kompenzatora[21]

Primena integralnog kompenzatora, često ima za rezultat suviše mali propusni opseg kompenzovanog sistema. Takvi sistemi su malo osetljivi na dejstva šumova i poremećaja, ali su zato spori, tj. vremena uspona i smirenja su im nedopustivo velika. Postupak sinteze dovode do pojave velikih vremenskih konstanti u funkciji prenosa integralnog kompenzatora, što predstavlja poseban problem sa gledišta fizičke realizacije kompenzatora[39].

### 6.3.1.3 Sinteza diferencijalno-integralnog kompenzatora primenom Bodeove metode

Nedostaci sinteze sistema sa samo diferencijalnim ili integralnim kompenzatorom mogu se eliminisati istovremenim unošenjem ovih kompenzatora u sistem. Frekventna prenosna funkcija, električna šema i logaritamska frekventna karakteristika diferencijalno-integralnog kompenzatora dati su u tabeli 6.1.

Sinteza diferencijalno - integralnog kompenzatora vrši se tako što se najpre odrede parametri diferencijalnog, a zatim integralnog dela kompenzatora koristeći principe date za jedan i drugi redni kompenzator. Radi poređenja rezultata, prikazana je karakteristika pre i posle izvedbe kompenzatora. Sa slike 6.13 se vidi doprinos diferencijalnog kompenzatora u zoni visokih učestanosti i integralnog kompenzatora u zoni niskih učestanosti,[39].



Slika.6.13 Frekventne karakteristike pre i nakon izvedbe sa diferencijalno-integralnim kompenzatora[39]

### 6.3.2 Sinteza kaskadnog kompenzatora pomoću metode geometrijskog mesta korena (GMK)

U osnovi se može reći da principi sinteze kompenzatora ostaju isti, bez obzira da li se sinteza vrši pomoću frekventne metode ili u s-ravni, tj. korišćenjem geometrijskog mesta korena. Kod oba slučaja potrebno je izabrati strukturu i parametre kompenzatora, koga treba uneti u sistem, tako da se postignu neki unapred postavljeni zahtevi u pogledu kvaliteta prelaznog procesa i maksimalno dozvoljene greške stacionarnog režima. Kada se sinteza kompenzatora želi izvršiti pomoću frekventne metode, pomenuti zahtevi se moraju izraziti u vidu vrednosti odgovarajuće konstante greške, preteka faze ili preteka pojačanja i propusnog opsega ili vrednosti presečne učestanosti pojačanja kompenzovanog sistema o kojima se govorilo u prethodnim poglavljima[39].

Pri sintezi sistema pomoću metode geometrijskog mesta korena zahtevi u pogledu tačnosti rada, potrebnog pretoka stabilnosti i brzine reagovanja sistema se izražavaju i preko željenih lokacija polova i nula funkcije spregnutog prenosa kompenzovanog sistema u s-ravni jer karakter prelaznog procesa sistema i parametri ovog odziva su u najvećoj meri određeni lokacijom para dominantnih polova funkcije spregnutog prenosa, tj. konjugovano kompleksnim korenima karakteristične jednačine sistema, koji se nalaze najbliže imaginarnoj osi s-ravni. Lokaciju ovih polova je određena faktorom relativnog prigušenja  $\xi$  i neprigušenom prirodnom frekvencijom

$\omega_n$  ( alternativno  $\xi$  i  $T_d$ , gde je  $T_d$  dominantna vremenska konstanta,  $T_d \leq 1/\xi\omega_n$  ) [39].

Kao što je rečeno ovi parametri tačno definišu karakter i brzinu odziva sistema drugog reda i približno sistema višeg reda s izraženim dominantnim polovima. Oni dakle definišu prelazni režim [39].

Ustaljeno stanje sistema je određeno greškom u stacionarnom stanju, odnosno odgovarajućim konstantama greške ( $K_p$ ,  $K_v$  ili  $K_a$ ). Prema tome, tehnički zahtevi za zadovoljenje za stacionarno i prelazno stanje sadrže ova tri parametra  $\xi$ ,  $\omega_n$ ,  $K_g$ , gde je  $K_g$  - zahtevana konstanta greške.

Proces projektovanja započinje ispitivanjem ispunjenosti tehničkih zahteva. Najpre se proverava da li polazni, nekompensovani sistem, zadat funkcijom povratnog prenosa  $W_f(s)$ , ispunjava zadate dinamičke tehničke uslove:  $\xi$  i  $\omega_n$ . Par ( $\xi, \omega_n$ ) definiše položaj dominantnog pola funkcije spregnutog prenosa kompenzovanog sistema u  $s$ -ravni. Shodno metodi GMK, tačke na granama GMK definišu polove spregnutog prenosa sistema za odgovarajuće pojačanje. Prema tome, sistem će ispuniti zadate dinamičke zahteve ako pol, definisan sa

$$s_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad (6.27)$$

pripada GMK sistema. Kao što je poznato, tačke na granama GMK ispunjavaju osnovni fazni kriterijum

$$(6.28)$$

pa se kontrola ispunjenja dinamičkih zahteva svodi na proveru uslova

$$\phi(s_1) = \arg W_f(s_1) = -\pi \quad (6.29)$$

Ako je ovaj uslov ispunjen, sistem će zadovoljiti zadane tehničke uslove u pogledu dinamike, s tim što se mora odrediti pojačanje GMK u tački  $s_1$  i ono podesiti u funkciji povratnog prenosa sistema. Ako poslednji uslov nije ispunjen, potrebno je u sistem uneti diferencijalni kompenzator.

Kada su zadovoljeni zadati dinamički uslovi, pristupa se proveru ispunjenosti zadatah tehničkih uslova u pogledu statičke tačnosti. Ta provera se odvija proverom ispunjenosti relacije

$$K_g = \lim_{s \rightarrow 0} s^r W_f(s) \geq K_{gz}$$

gde eksponent  $r$  označava stepen astatizma sistema, a  $K_{gz}$  je tražena vrednost odgovarajuće konstante greške (položaja ( $r=0$ ), brzine ( $r=1$ ) ili ubrzanja ( $r=2$ )). Ako poslednja relacija nije ispunjena, u sistem se mora uneti integralni kompenzator.

Iz prethodnog izlaganja jasno je da se, kada polazni sistem ne zadovoljava dinamičke, a zadovoljava statičke zahteve, projektuje samo diferencijalni kompenzator. U suprotnom slučaju, projektuje se samo integralni kompenzator. Ako, pak, polazni sistem ne zadovoljava ni dinamičke niti statičke zahteve, tada se prvo projektuje diferencijalni, a zatim integralni kompenzator.

Tehnika sinteze sistema u  $s$ -ravni je jednostavnija u poređenju sa sintezom sistema pomoću frekvente metode i to zbog toga što se u primeni ove tehnike grafički i analitički operiše sa korenima karakteristične jednačine, što je pogodnije u poređenju sa manipulacijama na frekventnim karakteristikama [39].

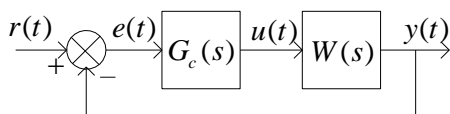
### 6.3.2.1 Sinteza diferencijalnog kompenzatora.

Ako je analizom ustanovljeno da projektovani nekompenzovani sistem ne ispunjava zadate tehničke uslove u pogledu dinamičkih karakteristika sistema, potrebno je u sistem uneti diferencijalni kompenzator. Za sintezu kaskadnog diferencijalnog kompenzatora potrebno je da se odrede pol i nula ovog kompenzatora i to tako da željeni par tačaka u  $s$ -ravni (lokacija dominantnih polova) postanu koreni karakteristične jednačine kompenzovanog sistema pri zatvorenoj povratnoj sprezi. Pretpostavlja se, da

su željeni dominantni polovi  $\xi$   $\xi$  odabrani i da je njihova lokacija u  $s$ -ravni definisana. Kao što je pomenuto, izbor lokacije ovih polova se vrši na bazi postavljenih tehničkih zahteva za određenom dinamičkom performansom kompenzovanog sistema. Ovi zahtevi, mogu da se izraze u vidu brojnih vrednosti parametara, koji karakterišu odskočni odziv sistema: preskoka; vremena kašnjenja, uspona i smirenja; periode oscilovanja prelaznog procesa i dominantne vremenske konstante. Zahtev u



pogledu maksimalno dozvoljenog preskoka određuje potrebnu vrednost relativnog faktora prigušenja, a na osnovu ostalih zahteva, uz već odabrano  $\xi$ , moguće je izvršiti adekvatan izbor vrednosti neprigušene i prirodne učestanosti  $\omega_n$ . Ako, na taj način odabrana, tačka  $s_1$  (ili  $s_2$ ) u s-ravni ne pripada geometrijskom mestu korena nekompensovanog sistema, to znači da je, samo podešavanjem faktora pojačanja funkcije povratnog prenosa, nemoguće podesiti zahtevanu dinamičku performansu, tj. da za sve vrednosti ovog faktora pojačanja (od nule do beskonačnosti) funkcija spregnutog prenosa nekompensovanog sistema nema par polova  $s_{1,2}$ , koji se poklapa sa parom željenih dominantnih polova. Tada je, dakle, potrebna kompenzacija, tj. unošenje u sistem elementa upravljanja, odgovarajuće funkcije prenosa obeležene sa  $G_c(s)$ .



Slika 6.14 SAU struktura sa kompenzatorom

Pri bilo kako složenoj funkciji povratnog prenosa nekompensovanog sistema, moguće je, unošenjem kaskadnog diferencijalnog kompenzatora, postići da karakteristična jednačina kompenzovanog sistema, pri odgovarajućoj vrednosti faktora pojačanja funkcije povratnog prenosa nekompensovanog sistema, ima željeni par konjugovano kompleksnih korena.

Prenosna funkcija diferencijalnog kompenzatora je:

$$\text{—} \tag{6.30}$$

gde je  $a < b$ . To znači da je nula  $-a$  funkcije prenosa  $G_d(s)$  bliža koordinatnom početku s-ravni, nego pol  $-b$  kao što je prikazano na slici. Inače, lokacije pola i nule diferencijalnog kompenzatora mogu biti u bilo kojim tačkama na negativnom delu realne ose s-ravni. Fazni ugao  $\lambda$  diferencijalnog kompenzatora u tački  $s_1$  određen je sa

$$\lambda = G_d(s_1) = \angle(s_1 + a) - \angle(s_1 + b) \tag{6.31}$$

gde su dati uglovi, uglovi vektora povučeni iz nule i pola diferencijalnog kompenzatora u tački  $s_1$  kao što je prikazano na slici 6.15. Konstruišimo krug, koji prolazi kroz tačku  $s_1$ , nulu  $-a$  i pol  $-b$ . Pošto se tačka  $s_1$  nalazi na ovom krugu, luk ugla  $\lambda$  je deo kruga ispod realne ose. Stoga je jasno da će i

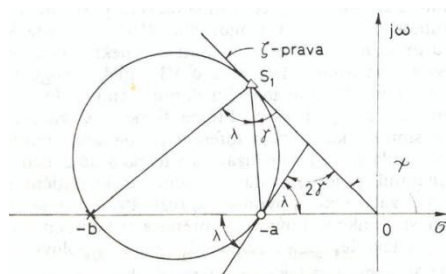
u svim drugim tačkama  $s$ -ravni, koje se nalaze na delu kruga iznad realne ose, ugao dat poslednjom relacijom biti isti, jer luk nad kojim se nalaze uglovi  $\lambda$  tih tačaka uvek ostaje isti. Drugim rečima, deo kruga iznad realne ose sa slike 6.15 predstavlja geometrijsko mesto tačaka za koje je fazni ugao  $\lambda$  funkcije prenosa diferencijalnog kompenzatora konstantan.

Neka je  $W_f(s)$  funkcija povratnog prenosa nekompensovanog sistema. Pošto se, po pretpostavci, tačka  $s_i$  ne nalazi na geometrijskom mestu korena nekompensovanog sistema, znači da  $\phi = \angle W_f(s_i) \neq -180^\circ$ . Da bi, posle unošenja kaskadnog kompenzatora  $G_d(s)$ , tačka  $s_1$  mogla da pripada geometrijskom mestu korena kompenzovanog sistema, potrebno je da funkcija povratnog prenosa ovog sistema  $W(s) = G_d(s)W_f(s)$  ispunjava uslov

$$\lambda + \phi = -180^\circ. \quad (6.32)$$

Prema tome, u tački  $s_1$  fazni ugao  $\lambda$  usvojenog diferencijalnog kompenzatora mora biti

$$\lambda = -\phi - 180^\circ. \quad (6.33)$$



Slika 6.15. Određivanje pola i nule diferencijalnog kompenzatora [39]

Na osnovu poslednjih jednačina i vrednost ugla  $\psi$  koji se dobija na osnovu zahtevanog faktora relativnog prigušenja  $\zeta$  dominantnih polova ( $\psi = \arccos(-\zeta)$ ) dobiju se podaci za određivanje parametara kompenzatora.

Na poslednjoj slici je povučena poluprava  $\zeta = \text{const}$ , na kojoj je fiksiran položaj dominantnog pola  $s_1$ . Također je konstruisan i krug  $\lambda = \text{const}$ , tj. geometrijsko mesto tačaka za koje je ugao diferencijalnog kompenzatora konstantan i jednak uglu  $\lambda$ , dobijenom iz jednačine (6.33). Prava  $\xi = \text{const}$  je tangenta ovog kruga u tački  $s_1$ . Na osnovu poslednje slike i elementarnih pravila planarne geometrije je

$$tj. \quad - \quad (6.34)$$

Takođe u literature [27], je dat obrazac za analitički proračun parametara kompenzatora (a i b) u eksplicitnom obliku [27]:

$$(a, b) = \omega_n \left[ \xi + \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\operatorname{tg} \left( \frac{180^\circ - \arccos(\xi)}{2} \pm \frac{\phi_n(s_1) + 180^\circ}{2N} \right)} \right]$$

gde je (6.35)

$$N = \text{celobrojna vrednost} \left( \left| \frac{\lambda}{\psi} \right| + 1 \right)$$

Gde znak “-” u izrazu (6.35) za  $\operatorname{tg}(\bullet)$  odnosi na nulu, a znak “+” na pol kompenzatora.

Broj ćelija kompenzatora se određuje po poslednjoj formuli

Postupak određivanja pola i nule kompenzatora, čijim se unošenjem u sistem može postići da odabrani par tačaka  $s_{1,2}$  postane par konjugovano kompleksnih korena karakteristične jednačine kompenzovanog sistema, se može sada sistematizovati na sledeći način :

1. Najpre se izračuna ugao  $\psi$  i to na osnovu usvojene lokacije para dominantnih polova. (Ova lokacija se bira na osnovu postavljenih zahteva za odgovarajućim pretekom stabilnosti i brzinom reagovanja.)
2. U tački  $s_1$  se sračuna fazni ugao funkcije povratnog prenosa nekompensovanog sistema,  $\phi = W_f(s_1)$ .
3. Po formuli  $\lambda = -\phi - 180^\circ$ , izračuna se ugao, koji treba u tački  $s_1$  da unese diferencijalni kompenzator,  $\lambda = G_d(s_1)$ .
4. Lokacija nule diferencijalnog kompenzatora na negativnom delu realne ose s-ravni se određuje izračunavanjem ugla  $\gamma$ , po formuli (6.34), i povlačenjem prave linije iz tačke  $s_1$  pod uglom  $\gamma$  u odnosu na  $\xi$ -pravu. U preseku ovako povučene prave linije sa realnom osom nalazi se nula - a diferencijalnog kompenzatora.

5. Da se odredi pol  $-b$ , treba iz tačke  $s_1$  povući pravu liniju pod uglom  $\lambda + \gamma$  u odnosu na  $\xi$ -pravu. U preseku tako povučene prave i realne ose s-ravni nalazi se lokacija pola diferencijalnog kompenzatora.

6. Na osnovu relacija:

$$a = \frac{1}{R_1 C} \quad i \quad b = a + \frac{1}{R_2 C}$$

određuju se vrednosti otpornika i kondenzatora kojim se realizuje električni diferencijalni kompenzator. Pri tome se, obično, vrednost kondenzatora  $C$  zadaje, a vrednosti otpornika  $R_1$  i  $R_2$  izračunavaju na osnovu  $a$  i  $b$ .

7. Određuje se pojačanje funkcije povratnog prenosa kompenzovanog sistema u zadatom dominantnom polu.

### Primer

Od sistema čija je funkcija povratnog prenosa

$$\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6.36)$$

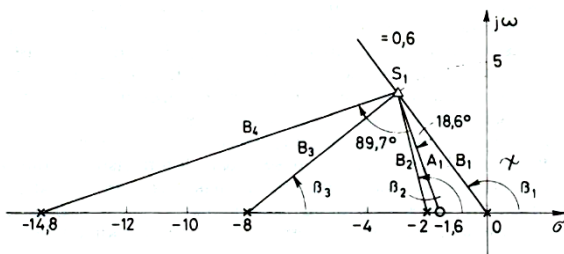
se zahteva:

da relativni faktor prigušenja para dominantnih polova funkcije spregnutog prenosa kompenzovanog sistema bude:  $\xi = 0,6$  i da dominantna vremenska konstanta bude  $T_d = 1/3$  sec.

Potrebno je postaviti par dominantnih konjugovano kompleksnih polova na pravoj  $\zeta = 0,6$  i krugu  $\omega_n = 5$  (jer je  $\omega_n = 1/\xi T_d = 5$  rad/sec i  $T_d = 1/\xi \omega_n$ ), odnosno u tačkama  $s_{1,2}$ :

$$\zeta \quad \zeta \quad (6.37)$$

Ugao  $\gamma = \arccos(-\xi) = 127^\circ$ .



Slika. 6.16. Sinteza diferencijalnog kompenzatora za sistem funkcije povratnog prenosa (6.36)[39]

Ako proverimo argument funkcije  $W_f(s)$  u tački  $s_1$  dobije se

$$\phi = W_f(s_1) = -(\angle s_1) - (\angle (s_1+2)) - (\angle (s_1+8)) = -\beta_1 (= -\psi) - \beta_2 - \beta_3 = -127^\circ - 104^\circ - 38,7^\circ = -269,7^\circ, \quad (6.38)$$

Postaje jasno da se tačke u kojima želimo da lociramo dominantne konjugovano kompleksne polove ne nalaze na geometrijskom mestu korena (inače bi argument iznosio  $180^\circ$ ). Shodno tome, prva “popravka“ koju kompenzator treba da izvrši jeste da unese priraštaj od:

$$\begin{aligned} \lambda &= -\phi - 180^\circ = 269,7^\circ - 180^\circ = 89,7^\circ, \\ \gamma &= \frac{1}{2}(\psi - \lambda) = \frac{1}{2}(127^\circ - 89,7^\circ) = 18,6^\circ, \\ \lambda + \gamma &= 108,3^\circ. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Na osnovu izračunatih vrednosti za uglove  $\gamma$  i  $\lambda + \gamma$  i primenjujući izloženi postupak, na sl. 6.16 se očitavaju vrednosti  $a=1,6$  i  $b=14,8$ . Prema tome, kompenzator ima funkciju prenosa

$$\text{—————} \quad (6.40)$$

pa je funkcija povratnog prenosa  $W(s)$  kompenzovanog sistema

$$\text{—————} \quad (6.41)$$

gde je  $K = 16K_f$ .

Vrednost faktora pojačanja  $K$ , pri kojoj će karakteristična jednačina kompenzovanog sistema  $1 + W(s) = 0$  imati par korena  $s_{1,2}$ , se može odrediti na osnovu svojstva geometrijskog mesta korena:

$$(6.42)$$

gde su  $B_1, B_2, B_3, B_4$  i  $A$ , veličine odgovarajućih potega na sl. 6.16, koji povezuju kritične frekvencije kompenzovanog sistema sa tačkom  $s_i$ . Izračunavanjem (ili merenjem) ovih veličina i zamenom u (6.42) dobija se

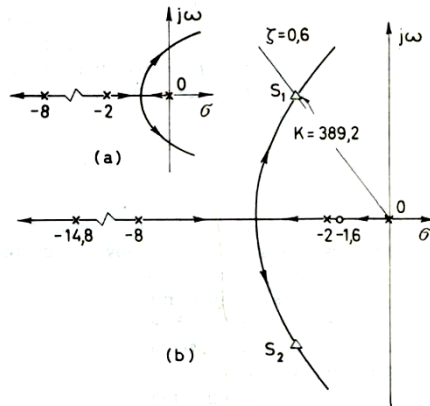
Odredimo, na kraju, i brzinsku konstantu sistema

Parametri diferencijalnog kompenzatora  $a$  i  $b$  se mogu takođe odrediti na osnovu analitičkog izraza preuzet iz navedene literature je [27].

$$(a, b) = 5 \left[ 0.6 + \frac{\sqrt{1-0.6^2}}{\operatorname{tg} \left( \frac{180^\circ - 53.13^\circ}{2} \mp \frac{-269.56^\circ + 180^\circ}{2 \cdot 1} \right)} \right] = (1.684; 14.849)$$

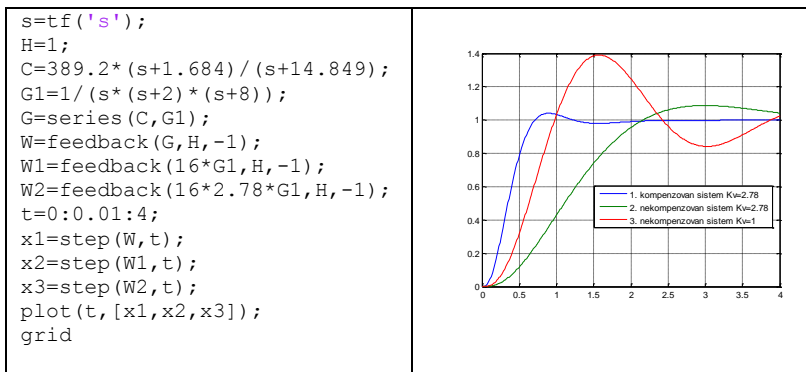
Funkcija povratnog prenosa kompenzovanog sistema je

Na sl. 6.17 (a) i (b) prikazana su geometrijska mesta korena, respektivno nekompenzovanog i kompenzovanog sistema.



Slika. 6.17. Geometrijsko mesto korena: a) nekompenzovanog, b) kompenzovanog sistema u primeru[39]

Na narednoj slici je dat odskočni odziv nekompenzovanog i kompenzovanog sistema iz poslednjeg primera.



Slika 6.18 Odskočni odziv sistema iz poslednjeg primera

Na slici se vidi efekat uticaja unesenog diferencijalnog kompenzatora na oblik prelaznog procesa sistema (karakteristika 1).

Napomenimo da se zadatak u prethodnom primeru mogao rešiti jednostavnije, ne primenjujući dati, opšti postupak sinteze diferencijalnog kompenzatora. Naime, u izvesnim slučajevima kompenzacija se može izvršiti *postupkom skraćivanja*. Ovaj postupak se zasniva na usvajanju nule diferencijalnog kompenzatora da bude jednaka jednom od polova funkcije provratnog prenosa nekompenzovanog sistema. Postupak skraćivanja se može primenjivati samo u onim slučajevima, gde se pomeranjem jednog

polu funkcije povratnog prenosa nekompensovanog sistema može postići da geometrijsko mesto korena prođe kroz željenu tačku u s-ravni.

Ako se za nulu ovog kompenzatora usvoji vrednost  $a_d = 2$  (postupak skraćivanja pola funkcije prenosa), pol  $b_d$  se može odrediti na osnovu željenog priraštaja faze u tački  $s_1$  :

$$\Delta\phi = \arg(s+2) - \arg(s+b_d) \Rightarrow 104^\circ - 89.7^\circ = \arg(s_1+b_d) \Rightarrow b_d = 19.77$$

Ovakvim izborom diferencijalnog kompenzatora obezbeđeno je da GMK sadrži željeni položaj dominantnih polova, međutim treba odrediti potrebno pojačanje  $K$  kako bi se polovi sistema u zatvorenoj sprezi nalazili tačno u tim tačkama. Takvo pojačanje  $K$  se određuje iz sledeće relacije (uslov modula):

$$|KG_d(s_1)W_f(s)| = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{|G_d(s_1)W_f(s)|} = \frac{|s_1||s_1+8||s_1+19.77|}{16} = 42.26$$

Konačno, funkcija prenosa diferencijalnog kompenzatora postaje:

$$G_d(s) = 42.26 \frac{s+2}{s+19.77}$$

### 6.3.2.2 Sinteza višestrukog diferencijalnog kompenzatora.

Sinteza ovog kompenzatora se vrši na sličan način, kao već pokazana sinteza običnog (jednostrukog) diferencijalnog kompenzatora. Razlike nastaju od onog trenutka, kada se odredi ugao  $\lambda$ , koji treba da bude fazni ugao kompenzatora u odabranoj tački  $s_1$ . Ako se pokaže da je ovaj ugao veliki, sintezu je dalje pogodnije nastaviti tako da rezultuje u višestruki diferencijalni kompenzator, funkcije prenosa[39]

$$\text{---} \tag{6.43}$$

Ako se ovaj kompenzator usvoji tako da mu je fazni ugao u tački  $s_1$  jednak zahtevanom uglu  $\lambda$ , tada će u toj tački fazni ugao  $\lambda^*$  svake sekcije  $(s+a)/(s+b)$  kompenzatora biti

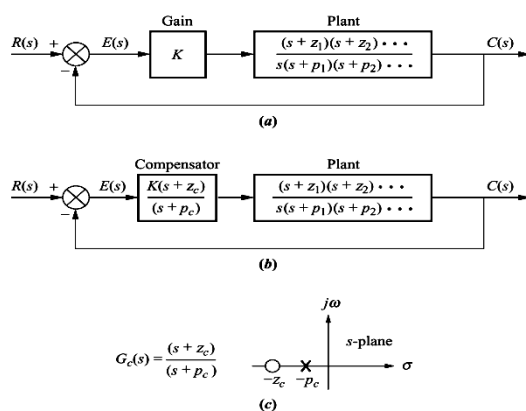
$$\text{---} \tag{6.44}$$



Sinteza ovakvog kompenzatora ima, dakle, za rezultat unošenje višestrukih kritičnih učestanosti u funkciju povratnog prenosa kompenzovanog sistema. Stoga se, po dobijanju rezultata ovakve sinteze, mora proveriti da li odabrana tačka u s-ravni, zaista, ima ulogu dominantnog pola funkcije spregnutog prenosa kompenzovanog sistema. Naime, zbog prisustva višestrukih nula u ovoj funkciji, može se desiti da ovu ulogu preuzmu neki drugi konjugovano kompleksni koreni karakteristične jednačine.

### 6.3.2.3 Sinteza integralnog kompenzatora

Ako je dat sistem kao na slici 6.19, kome je potrebno poboljšati performanse u sistem se unosi odgovarajući kompenzator.



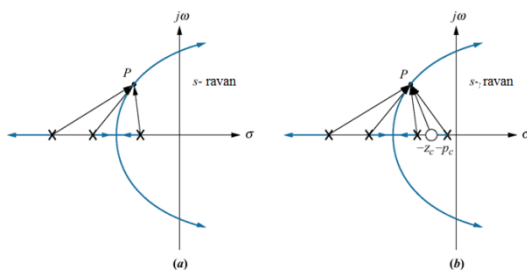
Slika 6.19 Nekompenzovan sistem a), kompenzovan sistem b) raspored nula i polova integralnog kompenzatora c)

Pretpostavlja se, u ovom slučaju, da sistem ispunjava tehničke zahteve u pogledu dinamičkih osobina (stabilnosti, brzine odziva, i dr.) a da ne ispunjava tehničke zahteve u pogledu statičke tačnosti. To znači da sistem nema potrebnu veličinu odgovarajuće konstante greške. U cilju omogućavanja povećanja konstante greške sistema, njemu se pridodaje integralni kaskadni kompenzator, funkcije prenosa:

$$G_c(s) = \frac{(s + z_c)}{(s + p_c)} \quad (6.45)$$

gde je  $b > a$ . Integralna kompenzacija mahom nalazi primenu u sistemima nultog astatizma i astatizma prvog reda. Međutim, sam postupak sinteze ostaje isti u oba slučaja.

Kao što je rečeno pretpostavlja se da je u pitanju sistem, koji već poseduje željenu dinamičku performansu. Drugim rečima, željeni dominantni polovi pripadaju geometrijskom mestu korena nekompenzovanog sistema.



Slika 6.20 GMK sistema pre i posle unosenja integralnog kompenzatora

Međutim, pri tome tačnost rada sistema nije zadovoljavajuća, pa se zahteva sinteza integralnog kompenzatora sa ciljem smanjenja veličine signala greške stacionarnog režima, odnosno povećanja odgovarajuće konstante greške.

Neka geometrijsko mesto korena takvog jednog sistema ima izgled, kao na sl. 6.20a (bez nule  $-b$  i pola  $-a$ ) i neka  $s_1$  označava lokaciju dominantnog pola, pri kojoj su ispunjeni postavljeni zahtevi u pogledu preteka stabilnosti i brzine reagovanja. Da bi se zadržale željene dinamičke performanse, uslov je da tačka  $s_1$  ostane na geometrijskom mestu korena sistema i posle unosenja integralnog kompenzatora (slika 6.20 b). Prema definiciji geometrijskog mesta korena, to znači da u tački  $s_1$  moduli i fazni uglovi funkcija povratnog prenosa kompenzovanog i nekompenzovanog sistema moraju biti međusobno približno isti i jednaki, respektivno, jedinici i  $-180^\circ$ :

$$G_i(s_1) W_f(s_1) \approx W_f(s_1) = 1 / -180^\circ,$$

odakle sledi da se integralni kompenzator mora birati tako da mu je

$$(6.46)$$

Očigledno je da će ovaj uslov biti ispunjen, ako je  $a \approx b$ , tj. ako integralni kompenzator ima karakter dipola u s-ravni. Pošto sa gledišta povećanja konstante greške, odnos  $b/a$  ima posebnu važnost, da bi ovaj odnos mogao da bude dovoljno veliki, potrebno je da parametri  $a$  i  $b$  budu mali, tj. da nula  $-b$  i pol  $-a$  integralnog kompenzatora budu bliski koordinatnom početku s-ravni. Postoje teškoće, koje nastaju ako se parametri  $b$  i  $a$  usvoje da budu suviše mali, tada se može desiti da vremenske konstante  $1/a$  i  $1/b$  integralnog kompenzatora budu nedopustivo velike sa gledišta mogućnosti fizičke

realizacije kompenzatora. Stoga se, pri usvajanju nule -  $b$  integralnog kompenzatora, treba rukovoditi sledećim pravilom, koje je rezultat praktičnog iskustva. Nula -  $b$  integralnog kompenzatora se bira tako da bude u preseku realne ose  $s$ -ravni i prave linije, povučene iz dominantnog pola  $s_1$  pod uglom  $\alpha = (5^\circ / 10^\circ)$  u odnosu na  $\xi$ -pravu. Pošto se na ovaj način odabere nula, pol  $-a$  integralnog kompenzatora se određuje u zavisnosti od postavljenog zahteva u pogledu veličine odgovarajuće konstante greške.

#### **6.3.2.4. Sinteza diferencijalno-integralnog kompenzatora.**

Za sintezu ovog kompenzatora dovoljno je poznavati izložene postupke sinteze diferencijalnog i integralnog kompenzatora. Naime, sinteza diferencijalno-integralnog kompenzatora se može izvršiti sledećim postupkom[39]:

1. Najpre se odredi tip (jednostruki, dvostruki, itd.) i parametri diferencijalnog dela kompenzatora i to tako da kompenzovani sistem ispuni zahteve u pogledu dinamičke performanse, tj. da adekvatno odabrani par dominantnih polova  $s_{1,2}$  bude na geometrijskom mestu korena kompenzovanog sistema. Pri tome se sinteza diferencijalnog dela kompenzatora može vršiti bilo postupkom skraćivanja (kad je to moguće), ili primenom standardnog postupka izloženog u prethodnim segmentima ove glave.
2. Odredi se vrednost faktora pojačanja  $K$ , koja odgovara tački  $s_1$ , i za tu vrednost se izračuna odgovarajuća konstanta greške sistema, dobijenog posle unošenja diferencijalnog kompenzatora.
3. Ako konstanta greške, izračunata pod tačkom 2, ima vrednost manju od zahtevane, pristupa se sintezi integralnog dela kompenzatora i to na način pokazan u prethodnom segment[39].

## **7. LITERATURA**

- [1] Anderson B., J. Moore, "*Optimal Control*". Prentice Hall, New Jersey, 1989.
- [2] Astrom K., B. Wittenmark, "*Computer Controlled Systems*". Prentice Hall, New Jersey, 1984.
- [3] B. Borozan, "*Sistemi automatskog upravljanja*", Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1995.
- [4] Bryson A. , Y. Ho, "*Applied Optimal Control*". Hemisphere Pub., Washington D.C., 1975.
- [5] Grujić , T. Lj. "*Zadaci sa rešenjima iz automatskog upravljanja*", Mašinski fakultet, Beograd, 1988.
- [6] Grujić, Lj., Lazić, D., "*Uvod u automatsko upravljanje* ", skripta, Mašinski fakultet, Beograd, 2007
- [7] Debeljković, Lj . D. "*Projektovanja linearnih sistema*", Mašinski fakultet, Milojković, R. B. Beograd, 1987.
- [8] Debeljković , Lj. D. "*Osnovi teorije identifikacije objekata i procesa*", Mašinski fakultet, Beograd, 1987.
- [9] Dikić, G., "*Osnove teorije automatskog upravljanja*", Visoka škola elektrotehnike i računarstva strukovnih studija, Beograd, 2011.
- [10] Elloy J. , J. Piasco, "*Classical and Modern Control with Worked Examples*". Pergamon Press, New York, 1981.
- [11] Franklin G. , J. Powell, A. Emami-Naeini, "*Feedback Control of Dynamics .s:systems*". Addison Wesley, Massachusetts, 1987.
- [12] Hsu J. , A. Mayer, "*Modern Control Principles and Applications*". Me Graw Hill New York, 1968.
- [13] Humo, E. "*Principi i elementi automatske regulacije*" , Svjetlost, Sarajevo, 1987.
- [14] Humo, E. "*Uvod u teoriju automatskog upravljanja*", Univerzitet u Sarajevu, Sarajevo, 1975
- [15] Ispitni zadaci iz predmeta Sistema automatskog upravljanja Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu, 2006
- [16] Jacić LJ. , Nikolić G. Rančić M., Debeljković D., "*Osnovi automatskog upravljanja i regulisanja*" GIP "Kultura", Beograd, 1998
- [17] Jegeš Z., "*Sistemi automatskog upravljanja*" – Skripta – Izdavač Viša tehnička škola Subotica
- [18] Jegeš Z., "*Zbirka zadataka iz sistema automatskog upravljanja*" – Skripta – Izdavač Viša tehnička škola Subotica
- [19] Jegeš Z., Maravić S., Vitasović T., "*MATLAB, Uputstvo za laboratorijske vežbe*", Skripta – Izdavač Viša tehnička škola Subotica
- [20] Kailath T., "*Linear Systems*". Prentice Hall, New Jersey, 1980.
- [21] Kovačević B., Đurović Ž., "*Sistemi automatskog upravljanja, Zbornik rešenih zadataka*", ETF Beograd, 1997.
- [22] Kuljača, Lj. , Vukić, Z. "*Automatsko upravljanje sistemima*", Školska knjiga, Zagreb, 1985.
- [23] Melsa J. , S. Jones, "*Computer Programsfor Computational Assistance in the Study of Linear Control Theory*". Me Graw Hill, New York, 1973.
- [24] Matlab, PC Users Guide.
- [25] Milinković S.,Debeljković D., "*Zbirka rešenih zadataka iz analize i sinteze sistema automatskog upravljanja*", Beograd 1996
- [26] Milojković, R. B. Grujić, T. LJ., "*Osnovi regulisanja*", Mašinski fakultet, Beograd, 1972.

- [27] Milosavljević Č, “*Teorija automatskog upravljanja – I*”, Univerzitet u Istočnom Sarajevu-Elektrotehnički fakultet, Istočno Sarajevo, 200
- [28] Netushil A. , “*Theory o/Automatic Control*”. Mir Publisher, Moscow, 1978.
- [29] Phillips C., R. Harbor. “*Feedback Control Systems*”. Prentice Hall, New Jersey, 1988.
- [30] Prljača, N.,Šehić, Z., “*Automatsko upravljanje – Analiza i Dizajn*”, Mikroštampa Tuzla, 2008
- [31] Rakić M., “*Teorija linearnih sistema automatskog upravljanja*”. Elektrotehnički fakultet, Beograd. 1972.
- [32] Rančić, M., Debeljković, D. Lj . “*Uvod u analizu i sintezu sistema automatskog upravljanja*”, Viša tehnička škola, Zrenjanin, 1995.
- [33] Sage A.. C. White. “*Optimum System Control*”. Prentice Hall, New Jersey, 1977.
- [34] Sekulić M.,”*Osnove teorije automatskog upravljanja-servomehanizmi*”, Naučna knjiga Beograd 1976
- [35] Seminarski radovi studenata Tehničkog fakulteta “Mihajlo Pupin” Zrenjanin
- [36] Simić D.,”*Osnovi automatskog upravljanja*”, Naučna knjiga Beograd, 1990.
- [37] Stengel R., “*Stochastic Optimal Control*”. John Wiley. New York, 1986.
- [38] Stojadinović, S., “*Zbirka zadataka iz automatskog upravljanje*”, Fizički fakultet, Beograd, 2008
- [39] Stojić M .. “*Kontinualni sistemi autmnatskog upravljanja*”. Naučna knjiga. Beograd,1985.
- [40] Turajlić, R. S., Petrović, B. T. “*Sistemi automatskog upravljanja - Zbirka Rešenih Zadataka*”, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1985.
- [41] Šiljak D .. “*Stabilnost sistema upravljanja*”. Elektrotehnički fakultet. Beograd. 1974.
- [42] Šupuk, T., “*Frekvencijska analiza: polarni i Nyquistovi dijagrami*“, (vježba 6), “*Frekvencijska analiza: Bodeovi dijagrami*“ (vježba 7), Fakultet elektrotehnike strojarstva i brodogradnje, Split
- [43] <http://ccd.uns.ac.rs/aus/sau/sau.htm>
- [44] <http://control.etfbl.net>
- [45] [elektron.tmf.bg.ac.rs](http://elektron.tmf.bg.ac.rs)