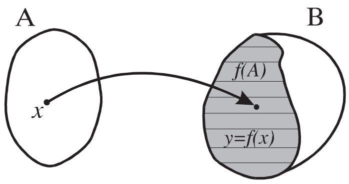
UVOD



Ako su A i B neprazni skupovi i ako je svakom $x \in A$ dodeljen, po izvesnom zakonu, tačno jedan element $y \in B$, tada kažemo da je na skupu A definisana funkcija (preslikavanje) f sa vrednostima u skupu B. Simbolički zapisano:

1. $(\forall x \in A)\ (\exists y \in B)\ (x, y) \in f$,
2. $(\forall x \in A)\ (\forall\ y_1,\ y_2 \in B)$

   $(x, y_1) \in f \ \wedge\ (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$.

Umesto $(x, y) \in f$ pišemo $y=f(x)$.

Skup A nazivamo oblast definisanosti (ili domen) funkcije f, a skup $f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subset B$ skup vrednosti (ili kodomen) funkcije f. Promenljivu x zovemo nezavisna promenljiva (argument, original), a y zavisna promenljiva (vrednost funkcije ili slika). Ako je $A \subset R$ i $B \subset R$ tada za funkciju $f : A \to B$ kažemo da je realna funkcija jedne realne promenljive.

Napomena: Umesto "funkcija f data sa $f(x)=?$" kraće pišemo samo funkcija $y=f(x)$.
Funkcija može biti zadata:

1. Analitički:
   - Eksplicitno $y=f(x)$,
   - Implicitno $F(x,y)=0$,
   - Parametarski $y=f(t)$, $x=g(t)$.
2. Grafički,
3. Tabelarno.

Funkcija može biti zadata i pomoću dve ili više formula

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , \quad x \le 0 \\ x & , \quad 0 < x \le 1 \\ \sqrt{x} & , \quad x > 1 \end{cases} .$$

Za preslikavanje $f : A \to B$ kažemo da je:

- Injektivno ("1 – 1")

različitim originalima odgovaraju različite slike, tj. $x_1 \ne x_2 \Rightarrow f(x_1) \ne f(x_2)$,

- Sirjektivno ("na")

za svako $y \in B$ postoji $x \in A$ takvo da je $f(x)=y$, tj. $f(A) = B$,

- Bijektivno ("1 – 1" i "na").

Oblast definisanosti

Oblast definisanosti je najširi podskup skupa R gde su izvodljive sve operacije date funkcijom.

- **Racionalna funkcija** $y=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $Q_m(x)\neq 0$

$$y=\frac{x-3}{x-2},\qquad \begin{array}{c} x-2\neq 0 \\ x\neq 2 \end{array} \Rightarrow D: x\in R\setminus\{2\}.$$

- $y=\sqrt[n]{f(x)}$

$n=2k\in N$, $f(x)\geq 0$
$n=2k+1\in N$, nema ograničenja za $f(x)$

$$\sqrt{x^2}=|\ x\ |=\begin{cases} x\ ,\ x\geq 0 \\ -x\ ,\ x<0\ . \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2-1}\Leftrightarrow x^2-1\geq 0\Leftrightarrow x^2\geq 1\Leftrightarrow \sqrt{x^2}\geq\sqrt{1}\Leftrightarrow |\,x\,|\geq 1\Rightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty).$$

Nule funkcije

Nula funkcije $y=f(x)$ je vrednost promenljive x za koju je $y=0$.

Parnost i neparnost funkcije:

Ako je oblast definisanosti D funkcije $y=f(x)$ simetričan skup (skup D je simetričan ako za svako $x\in D$ sledi da je i $-x\in D$) tada:

1. za funkciju f kažemo da je parna ako je $f(-x)=f(x)$ za sve vrednosti $x\in D$,
2. za funkciju f kažemo da je neparna ako je $f(-x)=-f(x)$, za sve vrednosti $x\in D$.

Funkcija ne mora da bude ni parna ni neparna.

Periodičnost

Funkcija je periodična ako postoji broj $\omega\neq 0$, takav da je $f(x+\omega)=f(x)$ za svako $x\in D$. Broj ω nazivamo period. Najmanji pozitivan broj ω, ako postoji, zove se osnovni period funkcije.

Monotonost funkcije

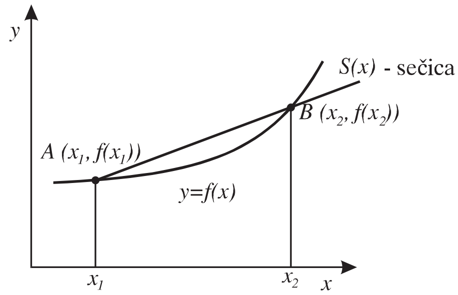
Za funkciju $f:D\to R$ kaže se da je nad intervalom $I\subset D$:

- monotono rastuća, ako za svake dve tačke $x_1,x_2\in I$, $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$,
- monotono opadajuća, ako za svake dve tačke $x_1,x_2\in I$,
  $x_1<x_2\Rightarrow\ f(x_1)>f(x_2)$,
- monotono nerastuća, ako za svake dve tačke $x_1,x_2\in I$,
  $x_1<x_2\Rightarrow\ f(x_1)\geq f(x_2)$,
- monotono neopadajuća, ako za svake dve tačke $x_1,x_2\in I$,
  $x_1<x_2\Rightarrow\ f(x_1)\leq f(x_2)$.

U svakom od navedenih slučajeva se kaže da je funkcija monotona nad intervalom I.

Konveksnost i konkavnost

Konveksnost i konkavnost funkcije se posmatra nad intervalom $I \subset D \subset R$.



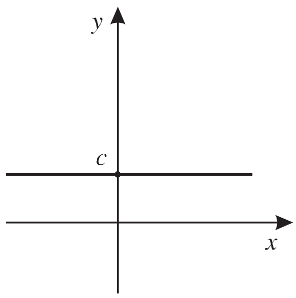
Ako za svake dve tačke $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ i $x \in (x_1, x_2)$ sledi:

- $f(x) < S(x)$ funkcija je konveksna nad intervalom *I*,
- $f(x) > S(x)$ funkcija je konkavna nad intervalom *I*.

Ograničenost

Za funkciju *y=f(x)* kažemo da je ograničena sa donje strane ako postoji broj M_1, takav da je za svako $x \in D, f(x) \geq M_1$. Funkcija *f* je ograničena sa gornje strane ako postoji broj M_2, takav da je za svako $x \in D, f(x) \leq M_2$. Funkcija je ograničena ako je ograničena i sa donje i sa gornje strane, tj. ako postoje brojevi M_1 i M_2, takvi da je za svako $x \in D, M_1 \leq f(x) \leq M_2$, ili ako postoji pozitivan broj *K*, takav da je $|f(x)| \leq K$ za svako $x \in D$.

Konstantna funkcija $y = f(x) = c$



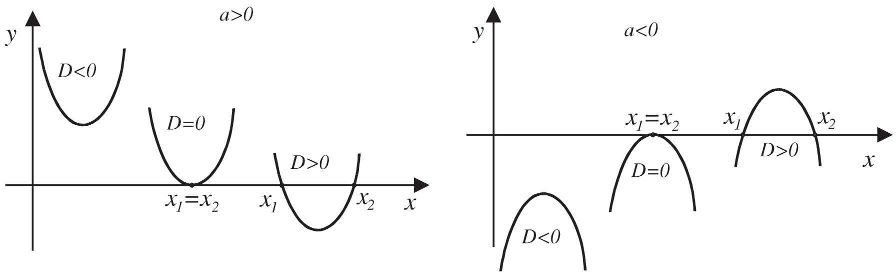
- $D : x \in R$,
- monotono nerastuća i monotono neopadajuća,
- nije ni konveksna ni konkavna.

Parabola $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

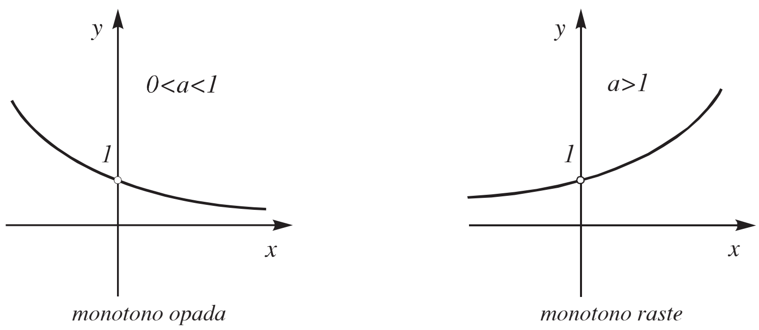
– $D : x \in R$.

U zavisnosti od znaka diskriminante D $(D = b^2 - 4ac)$ za rešenja (nule) funkcije se dobija:

- $D>0$ – rešenja su realna i različita,
- $D=0$ – rešenja su realna i jednaka,
- $D<0$ – nema realnih nula (rešenja su konjugovano-kompleksna).



Eksponencijalna funkcija $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$



– $D : x \in R$,

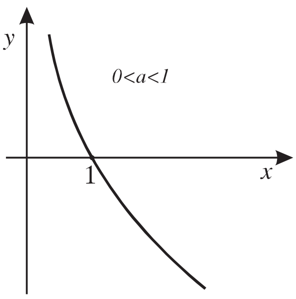
– funkcija nema nula,

– specijalan slučaj za $a=e$ $(y = e^x)$ ili $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$.

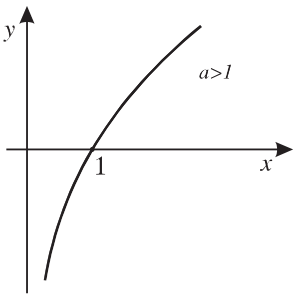
Logaritamska funkcija $y = f(x) = log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

$D : x \in R^+$.

Simetrična je u odnosu na pravu $y=x$ sa funkcijom $y = a^x$. Logaritamska funkcija je inverzna funkcija funkcije $y = a^x$.



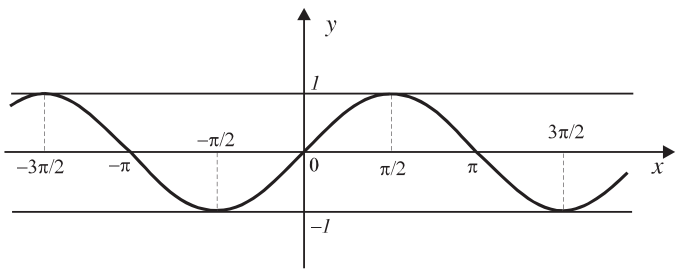
monotono opada



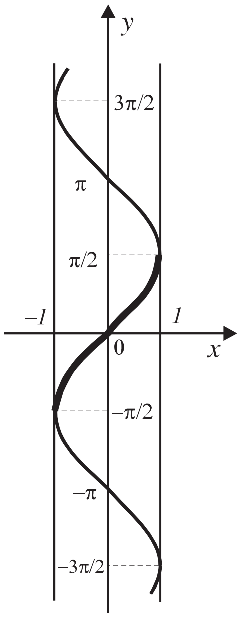
monotono raste

- $x=1$ je nula funkcije,
- $a=e=2,71828\ldots$ $y=lnx$,
- $a=10$ $y=logx$.

$y=sinx$



- $D : x \in R$,
- skup vrednosti $[-1, 1]$,
- funkcija je periodična: osnovni period je $\omega = 2\pi$,
- $sin(-x) = -sin\,x$ - funkcija je neparna,
- $x=k\pi,\ k \in Z$ - nule funkcije.



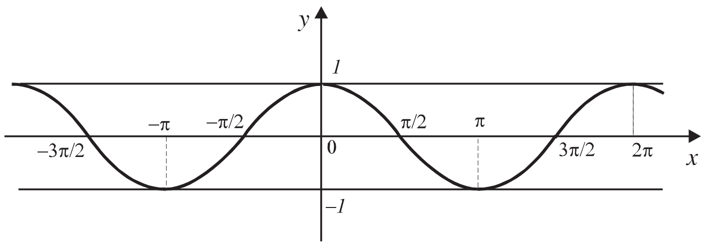
y=arcsinx

Funkcija $y=sinx$ obostrano jednoznačno (zbog monotonosti) preslikava interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ na interval $[-1,1]$. Zato je moguće definisati inverznu funkciju sa domenom $[-1,1]$ i skupom vrednosti $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Restrikcija funkcije $f(x)=sin\,x$ nad intervalom $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ima inverznu funkciju, koja se označava sa $y=arcsin\,x$. Simetrična je u odnosu na pravu $y=x$ sa $y=sinx$.

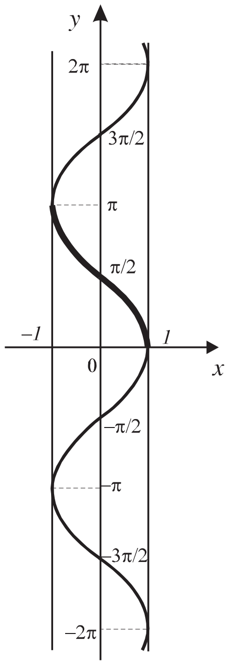
- $D: x\in[-1,1]$,
- skup vrednosti $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
- $y=arcsin(-x)=-arcsin\,x$ - funkcija je neparna,
- funkcija monotono raste.

y=cosx



- $D: x\in R$,
- skup vrednosti $[-1,1]$,
- funkcija je periodična: osnovni period je $\omega=2\pi$,
- $cos(-x)=cos\,x$ - funkcija je parna,
- $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \ k\in Z$ - nule funkcije.

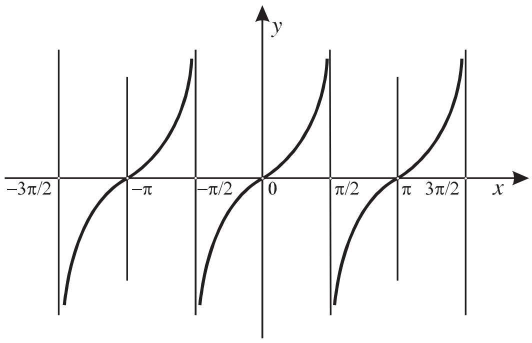
y=arccosx



Funkcija $y=cosx$ obostrano jednoznačno (zbog monotonosti) preslikava interval $[0,\pi]$ na interval $[-1,1]$. Zato je moguće definisati inverznu funkciju sa domenom $[-1,1]$ i skupom vrednosti $[0,\ \pi]$. Restrikcija funkcije $f(x)=\cos x$ nad intervalom $[0,\pi]$ ima inverznu funkciju, koja se označava sa $y=arccosx$.

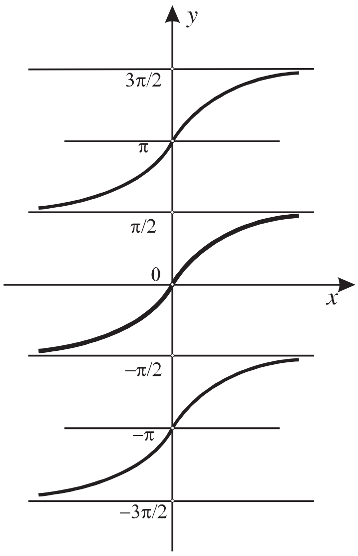
– $D:\ x\in[-1,1]$,
– Skup vrednosti $[0,\ \pi]$,
– Funkcija monotono opada.

y=tgx



– definisana za svako $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$,
– skup vrednosti funkcije je $(-\infty,\infty)$,
– funkcija je periodična: osnovni period je $\omega=\pi$,
– $tg(-x)=-tg(x)$ - funkcija je neparna,
– funkcija je monotono rastuća na svim intervalima oblika $(\frac{(2k+1)}{2}\pi,\frac{(2k+3)}{2}\pi)$, $k\in Z$
– $x=k\pi$, $k\in Z$ - nule funkcije.

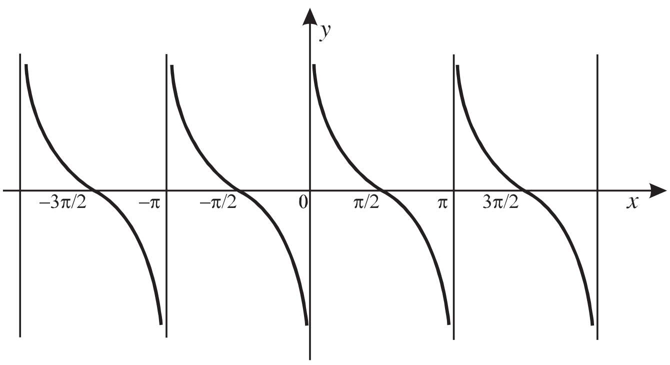
y=arctgx



Funkcija $y=tgx$ obostrano jednoznačno (zbog monotonosti) preslikava interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ na interval $(-\infty,\infty)$. Zato je moguće definisati inverznu funkciju sa oblašću definisanosti $(-\infty,\infty)$ i skupom vrednosti $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Restrikcija funkcije $y=tgx$ nad intervalom $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ima inverznu funkciju, koja se označava sa $y = arctgx$.

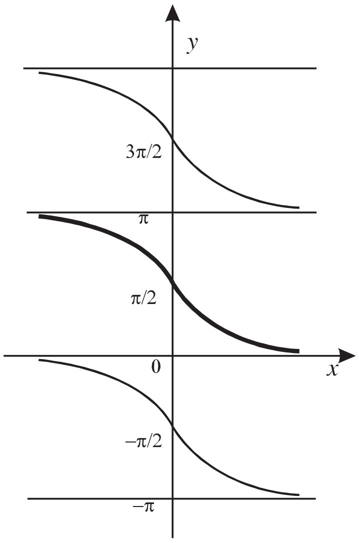
- $D : x \in R$,
- Skup vrednosti $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
- Monotono raste,
- $arctg(-x) = -arctg(x)$ - neparna.

y=ctgx



- definisana za svako $x \neq k\pi$, $k \in Z$,
- skup vrednosti funkcije je $(-\infty,\infty)$,
- funkcija je periodična: osnovni period je $\omega=\pi$,
- $ctg(-x) = -ctg(x)$ - funkcija je neparna,
- funkcija monotono opada na svim intervalima oblika $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k \in Z$
- $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$ - nule funkcije.

y=arcctgx



Funkcija $y=ctgx$ obostrano jednoznačno (zbog monotonosti) preslikava interval $(0,\pi)$ na interval $(-\infty,\infty)$. Zato je moguće definisati inverznu funkciju sa domenom $(-\infty,\infty)$ i skupom vrednosti $(0,\pi)$. Restrikcija funkcije $y=ctgx$ nad intervalom $(0,\pi)$ ima inverznu funkciju, koja se označava sa $y = arcctgx$.

– $D : x \in R$,
– skup vrednosti $(0,\pi)$,
– monotono opada.