Probni prijemni ispit iz matematike
April 2018.

1. Uprostiti izraz

$$\left(\frac{1}{x^3-x}-\frac{1}{x^3+x}\right):\left(\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^2-x}\right).$$

2. Odrediti vrednost izraza

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2}$$

za $a=2$ i $b=3$.
3. Rešiti eksponencijalnu jednačinu

$$49^x-50\cdot 7^x+49=0.$$

4. Rešiti trigonometrijsku jednačinu

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)=\sin^4 x+\cos^4 x.$$

5. Ako je

$$f(x)=\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}},$$

odrediti $f(f(x))$.

2018. April Zaštita

1. Izračunati
$$\left[\frac{2}{3} : \frac{4}{5} - 0,6^{-1} : 0,2^2\right] \cdot 0,6.$$

2. Uprostiti izraz
$$\left(\frac{1}{a-3b} - \frac{1}{a+3b} + \frac{6b}{a^2-9b^2}\right) : \frac{b(2a+b)}{a^2-9b^2}.$$

3. Rešiti eksponencijalnu jednačinu
$$100^x - 101 \cdot 10^x + 100 = 0.$$

Rešenja

1. Ako je I dati izraz, tada je
$$\begin{aligned} I &= \frac{x-1+x+1}{x(x+1)(x-1)} : \frac{x^2+1-x^2+1}{x(x^2-1)(x^2+1)} \\ &= \frac{2}{x^2-1} : \frac{2}{x(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{2}{x^2-1} \cdot \frac{x(x^2-1)(x^2+1)}{2} \\ &= x(x^2+1). \end{aligned}$$

2. Ako je I dati izraz
$$\begin{aligned} I &= \frac{\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}-\frac{a}{b}+2-\frac{b}{a}} \\ &= \frac{2\frac{a}{b}+2\frac{b}{a}}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2}\frac{a^2+b^2}{ab}. \end{aligned}$$

Za konkretne vrednosti $a = 2$ i $b = 3$ se dobija $13/12$.
3. Uvodjenjem nove nepoznate $t = 7^x$ dobija se kvadrana jdnačina $t^2 - 50t + 49 = 0$. Dobijaju se dva rešenja $t_1 = 1$ i $t_2 = 49$. Tako je $7^x = 1$, tj. $x_1 = 0$; i $7^x = 49$, tj. $x_2 = 2$.
4. Jednačina se može napisati u obliku
$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^4 x + \cos^4 x,$$
odnosno $\cos^4 x = 0$, koja je ekvivalentna sa $\cos x = 0$, čija su rešenja $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gde je $k \in Z$ ceo broj.

5. Uvodni korak u rešavanju može biti transformacija

$$f(x) = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x+1}{x-1}.$$

Tako je

$$f(f(x)) = \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x+1+x-1}{x-1}}{\frac{x+1-x+1}{x-1}} = x.$$

Kako je $f(f(x)) = x$ identička funkcija, to znači da je $f = f^{-1}$ funkcija jednaka svojoj inverznoj funkciji.

1.

$$\left[\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} - \frac{10}{6} : \left(\frac{2}{10}\right)^2\right] \cdot \frac{6}{10} = \left[\frac{5}{6} - \frac{5}{3} \cdot \frac{25}{1}\right] \cdot \frac{6}{10} = \frac{5-250}{6} \cdot \frac{6}{10} = -\frac{245}{10} = -\frac{49}{2}.$$

2. Transformacije daju

$$\frac{a+3b-a+3b+6b}{a^2-9b^2} \cdot \frac{a^2-9b^2}{b(2a+b)} = \frac{12}{2a+b}.$$

3. Smena $10^x = t$ daje kvadratnu jednačinu $t^2 - 101t + 100 = 0$, $t^2 - 100t - t + 100 = (t-100)(t-1) = 0$. Tako su rešenja $t_1 = 100$ tj. $x_1 = 2$, i $t_2 = 1$ tj. $x_2 = 0$.