1. KOMBINATORIKA

1.1. Varijacije

Imamo skup $S=\{a_1, a_2, \ldots , a_n\}$, $k \in N$, $1 \le k \le n$

Varijacija k-te klase bez ponavljanja u skupu S je svaka uređena k-torka (a_{i1}, a_{i2}, ... , a_{in}) međusobno različitih elemenata skupa S.

Broj varijacija bez ponavljanja od *n* elemenata *k*-te klase određujemo po formuli:

$$\boxed{V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Varijacija sa ponavljanjem k-te klase u skupu S je svaka uređena k-torka elemenata iz skupa S.

Broj varijacija sa ponavljanjem od *n* elemenata *k*-te klase određujemo po formuli:

$$\boxed{\overline{V}_n^k = n^k}$$

<u>Primer:</u>

$S=\{1, 2, 3, 4\}$

V_4^2 (bez ponavljanja):

(1, 2) (1, 3) (1, 4)
(2, 1) (2, 3) (2, 4)
(3, 1) (3, 2) (3, 4)
(4, 1) (4, 2) (4, 3)

V_4^2 (sa ponavljanjem):

(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4)
(2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4)
(3, 1) (3, 2) (3, 3) (3, 4)
(4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4)

Zadaci

1.1.1. U razredu ima 32 učenika. Na koliko načina može 6 učenika sedeti u prvoj klupi?

Rešenje:

$$V_{32}^6 = \frac{32!}{(32-6)!} = \frac{32!}{26!} = 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 = 652458240$$

1.1.2. Na klupi su slobodna četiri mesta. Na koliko načina 15 osoba može popuniti ova mesta?

Rešenje:

$$V_{15}^4 = \frac{15!}{(15-4)!} = \frac{15!}{11!} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 = 32760$$

1.1.3. Koliko ima trocifrenih brojeva koji se sastoje od različitih cifara?

Rešenje:

$$V_9^1 \cdot V_9^2 = 9 \cdot \frac{9!}{(9-2)!} = 9 \cdot \frac{9!}{7!} = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$$

1.1.4. Jedan student treba da polaže 4 ispita za 8 dana. Na koliko načina to može učiniti ako se zna da poslednji ispit polaže osmog dana?

Rešenje:

$$V_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

1.1.5. Odeljenje jednog razreda broji 35 učenika. Oni su međusobno razmenili fotografije. Koliko je ukupno podeljeno fotografija?

Rešenje:

$$V_{35}^2 = \frac{35!}{(35-2)!} = \frac{35!}{33!} = 35 \cdot 34 = 1190$$

1.1.6. Od koliko različitih elemenata možemo formirati 210 varijacija druge klase?

Rešenje:

$$V_n^2 = 210$$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 210$$

$$n \cdot (n-1) = 210$$

$$n^2 - n - 210 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+840}}{2} = \frac{1 \pm 29}{2}$$

$$n_1 = 15$$

1.1.7. Koliko se brojeva može formirati pomoću elemenata skupa N koji čine svi prosti činioci broja 2310 ako traženi brojevi sadrže po dva različita prosta činioca?

Rešenje:

$$2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$$

$$V_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$$

1.1.8. Rešiti jednačine: a) $V_n^3 = \frac{5}{12} V_{n+2}^3$, b) $V_{2n+4}^3 : V_{n+4}^4 = 2:3$

Rešenje:

a)

$$V_n^3 = \frac{5}{12} V_{n+2}^3$$

$$\frac{n!}{(n-3)!} = \frac{5}{12} \frac{(n+2)!}{(n-1)!}$$

$$n(n-1)(n-2) = \frac{5}{12}(n+2)(n+1)n \,/\cdot \frac{12}{n}$$

$$12(n^2-3n+2) = 5(n^2+3n+2)$$

$$12n^2 - 36n + 24 = 5n^2 + 15n + 10$$

$$7n^2 - 51n + 14 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{51 \pm \sqrt{2601-392}}{14} = \frac{51 \pm 47}{14}$$

$$n_1 = 7$$

b)

$$V_{2n+4}^3 : V_{n+4}^4 = 2:3$$

$$\frac{(2n+4)!}{(2n+1)!} : \frac{(n+4)!}{n!} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{(2n+4)(2n+3)(2n+2)}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2(n+2)(2n+3)2(n+1)}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{2}{3}$$

$$6(2n+3) = (n+4)(n+3)$$

$$12n + 18 = n^2 + 3n + 4n + 12$$

$$n^2 - 5n - 6 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$n_1 = 6$$

1.1.9. Koliko različitih bacanja daju četiri kocke za igru?

Rešenje:

$$\overline{V}_6^4 = 6^4 = 1296$$

1.1.10. Koliko se petocifrenih brojeva može napisati pomoću 10 cifara koje se mogu ponavljati, tako da prve dve cifre budu 4 i 0?

Rešenje:

$$\overline{V}_{10}^3 = 10^3 = 1000$$

1.1.11. Koliko petocifrenih telefonskih brojeva ima ako znamo da su im sve cifre neparne?

Rešenje:

$$\overline{V}_5^5 = 5^5 = 3125$$

1.1.12. Odrediti broj reči, od 5 slova, koje se mogu napisati pomoću azbuke od 30 slova, bez obzira da li se u rečima ponavljaju sva slova i da li se dobijaju reči bez značenja.

Rešenje:

$$\overline{V}_{30}^5 = 30^5 = 243 \cdot 10^5$$

1.1.13. Dat je skup A={3, 4, 5, 6, 7}. Odrediti broj trocifrenih brojeva koji se mogu obrazovati od elemenata skupa A.

Rešenje:

$$\overline{V}_5^3 = 5^3 = 125$$

1.1.14. Dat je skup E={0, 1, 2, 3, 4, 5}. Odrediti broj četvorocifrenih brojeva većih od 1000, koji se mogu obrazovati od elemenata skupa E.

Rešenje:

$$5 \cdot \overline{V}_6^3 - 1 = 5 \cdot 6^3 - 1 = 1079$$

1.1.15. Koliko se Morzeovih znakova može formirati iz oba osnovna znaka . i -, ako se jedan znak sastoji od najviše 5 znakova?

Rešenje:

$$\overline{V}_2^1 + \overline{V}_2^2 + \overline{V}_2^3 + \overline{V}_2^4 + \overline{V}_2^5 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$$

1.1.16. Broj varijacija četvrte klase sa ponavljanjem od x elemenata iznosi 50625. Odrediti broj elemenata x.

Rešenje:

$$\overline{V}_x^4 = 50625$$

$$x^4 = 50625 / \log$$

$$4 \log x = \log 50625$$

$$\log x = \frac{\log 50625}{4} \Rightarrow x = 15$$

1.1.17. Broj varijacija treće klase sa ponavljanjem od x elemenata veći je za 408 od broja varijacija treće klase bez ponavljanja od istog broja elemenata. Odrediti broj x.

Rešenje: $x = 12$

1.2. Permutacije

Permutacija bez ponavljanja skupa S={a_1, a_2, ... , a_n} (ks=n) je svaka varijacija n-te klase bez ponavljanja u skupu S.

Broj permutacija bez ponavljanja od *n* elemenata određujemo po formuli:

$$\boxed{P(n) = n!}$$

Neka je dat skup od n elemenata, od kojih ima k_1 jednakih jedne vrste, k_2 jednakih druge vrste itd; k_m jednakih m-te vrste; pri čemu je m≤n i $k_1+k_2+...+k_m \le n$. Svaki linearni raspored koji se sastoji od svih elemenata zove se permutacija sa ponavljanjem.

Broj permutacija sa ponavljanjem određujemo po formuli:

$$\boxed{P_{k_1,k_2,\ldots,k_m}(n) = \frac{n!}{k_1!k_2!..k_m!}}$$

Primer:

S={1, 2, 3, 4}

$P(4)=V_4^4$ (bez ponavljanja):

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

S={1, 2, 2, 3}

$P_{1,2,1}(4)$ (sa ponavljanjem):

1223	2123	2132	3122
1232	2213	2312	3212
1322	2231	2321	3221

Zadaci

1.2.1. Na koliko različitih načina mogu da sednu četiri osobe ako su postavljene četiri stolice?

Rešenje:

$$P(4) = 4! = 24$$

1.2.2. Dat je skup E={1, 2, ... , 8}. Koliko permutacija, koje se mogu obrazovati od elemenata skupa E, počinje sa: 5, 123 i 8642?

Rešenje:

$$P(7) = 5040$$
$$P(5) = 120$$
$$P(4) = 24$$

1.2.3. Na koliko se načina može rasporediti 8 knjiga na jednoj polici?

Rešenje:

$$P(8) = 40320$$

1.2.4. Odrediti broj permutacija od elemenata a, a, a, b, b, b, c.

Rešenje:

$$P_{3,3,1}(7) = \frac{7!}{3! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 140$$

1.2.5. Koliko ima sedmocifrenih brojeva obrazovanih od cifara 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, ne uzimajući u obzir one koji počinju nulom ili nulama?

Rešenje:

$$3 \cdot P_{4,1,1}(6) = \frac{6!}{4! \cdot 1! \cdot 1!} = 3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$$

1.2.6. Koliko permutacija od elemenata a, a, a, a, a, b, b, b, c, počinje sa a, sa b i sa c?

Rešenje:

a $\quad P_{4,3,1}(8) = \frac{8!}{4! \cdot 3! \cdot 1!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$

b $\quad P_{5,2,1}(8) = \frac{8!}{5! \cdot 2! \cdot 1!} = 8 \cdot 7 \cdot 3 = 168$

c $\quad P_{5,3}(8) = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 8 \cdot 7 = 56$

1.2.7. Koliko permutacija od elemenata 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, počinje sa 22, sa 313 i sa 1234?

Rešenje:

$$22 \text{ - } P_{1,1,4,3}(9) = \frac{9!}{4! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 2520$$

1.2.8. Odrediti broj permutacija koje se mogu formirati od svih činilaca proizvoda $a^5 \cdot b^3$.

Rešenje: 56

1.2.9. Na koliko se različitih načina može prikazati a3b2c3 kao proizvod od osam činilaca a, a, a, b, b, c, c, c?

Rešenje:

$$P_{3,2,3}(8) = \frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{12} = 560$$

1.2.10. Broj permutacija od n elemenata odnosi se prema broju permutacija od n+2 elementa kao 0.1:3. Odrediti n.

Rešenje:

$$P(n):P(n+2)=0.1:3$$

$$\frac{n!}{(n+2)!}=\frac{0.1}{3}$$

$$3=(n+2)(n+1)\cdot 0.1/\cdot 10$$

$$n^2+3n-28=0$$

$$n_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+112}}{2}=\frac{-3\pm 11}{2}$$

$$n_1=4$$

1.2.11. Broj permutacija od n+2 elementa je veći 56 puta od broja permutacija od n elementa. Odrediti n.

Rešenje: $n_1=6$

1.2.12. Rešiti jednačinu: $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=30$.

Rešenje:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=30$$

$$(n+1)n=30$$

$$n^2+n-30=0$$

$$n_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+120}}{2}=\frac{-1\pm 11}{2}$$

$$n_1=5$$

1.2.13. Rešiti jednačinu: $\frac{(n+2)!}{n!}=72$.

Rešenje: $n_1=7$

1.3. Kombinacije

Kombinacija k-te klase bez ponavljanja skupa S={a₁, a₂, ... , aₙ} je svaki njegov podskup od k elemenata, 1≤k≤n.

Broj kombinacija bez ponavljanja od *n* elemenata *k*-te klase određujemo po formuli:

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}}$$

Kombinacije k-te klase od n elemenata u kojima se jedan elemenat može ponavljati do k puta, zovu se kombinacije sa ponavljanjem.

Broj kombinacija k-te klase od n elemenata sa ponavljanjem određujemo po formuli:

$$\boxed{\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}}$$

Primer:

$S=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

C_5^3 (bez ponavljanja):

123	234	345
124	235	
125	245	
134		
135		
145		

$S=\{1, 2, 3, 4\}$

C_4^3 (sa ponavljanjem):

111	222	333	444
112	221	331	441
113	223	332	442
114	224	334	443
123	234	341	
124			

Zadaci

1.3.1. Koliko se različitih grupa po 4 učenika može izabrati od 12 kvalifikovanih učenika koji će reprezentovati školu na takmičenju?

Rešenje:

$$C_{12}^4 = \frac{12!}{4!\cdot 8!} = 495$$

1.3.2. Na jednom šahovskom turniru učestvuje petnaest šahista. Svaki treba da odigra partiju sa svakim. Koliko će biti odigrano partija na turniru?

Rešenje:

$$C_{15}^2 = \frac{15!}{2!\cdot 13!} = 105$$

1.3.3. Odrediti broj dijagonala konveksnog petougla i n-tougla.

Rešenje:

$$C_5^2 - 5 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} - 5 = 5$$

$$C_n^2 - n = \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} - n = \frac{1}{2}n(n-1) - n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$$

1.3.4. Dat je skup A={a_1, a_2, ... , a_6}. Odrediti sve podskupove skupa A koji: ne sadrže elemente a_4, a_5 i a_6; sadrže sve elemente skupa A.

Rešenje:

- a_1, a_2, a_3

$$C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 1+3+3+1 = 8 = 2^3$$

- A

$$C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 1+6+15+20+15+6+1 = 64 = 2^6$$

1.3.5. Odrediti broj svih podskupova skupa koji ima n elemenata.

Rešenje:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... = 2^n$$

1.3.6. Za delegaciju škole treba izabrati, od 10 učenika koji govore nemački i 15 koji govore engleski jezik, pet učenika od kojih bar jedan govori engleski. Na koliko načina se može obaviti izbor?

Rešenje:

$$10\cdot C_{15}^4 + C_{10}^2\cdot C_{15}^3 + C_{10}^3\cdot C_{15}^2 + C_{10}^4\cdot C_{15}^1 + C_{15}^5 = 52878$$

1.3.7. Na jednom šahovskom turniru odigrano je 210 partija. Odrediti broj učesnika ako se zna da je svaki učesnik odigrao partiju sa svakim.

Rešenje:

$$C_n^2 = 210$$

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} = 210$$

$$n(n-1) = 420$$

$$n^2 - n - 420 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+1680}}{2} = \frac{1\pm 41}{2}$$

$$n_1 = 21$$

1.3.8. Rešiti jednačinu: $5C_n^3 = C_{n+2}^4$.

Rešenje:

$n_1 = 14, n_2 = 3$

1.3.9. Rešiti jednačinu: $C_{n+1}^{n-2} + 2C_{n-1}^{3} = 7(n-1)$.

Rešenje:

$$C_{n+1}^{n-2} + 2C_{n-1}^{3} = 7(n-1)$$
$$\frac{(n+1)!}{3!(n-2)!} + 2\frac{(n-1)!}{3!(n-4)!} = 7(n-1)$$
$$n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2}$$
$$n_1 = 5$$

1.3.10. Koliko ima trouglova čije dužine stranica imaju vrednosti u skupu {5, 6, 7, 8}?

Rešenje:

$$\overline{C}_4^3 = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

1.3.11. Imamo na raspolaganju 6 automobila, a 9 ljudi želi da vozi. Na koliko načina se to može izvesti ako redosled automobila: nije bitan; bitan je?

Rešenje:

- $C_9^6 = 84$
- $V_9^6 = 60480$

1.3.12. Broj kombinacija druge klase od x elemenata sa ponavljanjem iznosi 276. Odrediti x.

Rešenje:

$$\overline{C}_x^2 = 276$$
$$\frac{(x+1)!}{2!(x-1)!} = 276$$
$$(x+1)x = 552$$
$$x^2 + x - 552 = 0$$
$$x_1 = 23$$

1.3.13. Broj kombinacija treće klase bez ponavljanja od x elemenata odnosi se prema broju kombinacija treće klase od istog broja elemenata sa ponavljanjem kao 7:15. Odrediti x.

Rešenje: $x = 8$

1.3.14. Odrediti n i k ako je: V_n^k=24 i C_n^k=4.

Rešenje:

$n = 4$

$k = 3$

1.4. Binomni obrazac

Ako je *n* bilo koji prirodan broj i *a* i *b* bilo koji kompleksni brojevi, tada je:

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k}$$

gde je $\binom{n}{k}$ binomni koeficijent i $1 \leq k \leq n$.

Opšti član u razvijenom obliku binoma $(a+b)^n$ dat je formulom:

$$\boxed{T_{k+1} = \binom{n}{k}a^{n-k}b^k}$$

Paskalov trougao prikazuje koeficijente uz $a^{n-k}b^k$ u razvoju binoma:

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

...

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1

...

Zadaci

1.4.1. Primeniti binomnu formulu na binom: $(2x+5)^4$.

Rešenje:

$$(2x+5)^4 = \binom{4}{0}(2x)^4 + \binom{4}{1}(2x)^3 5 + \binom{4}{2}(2x)^2 5^2 + \binom{4}{3}(2x)5^3 + \binom{4}{4}5^4 =$$

$$= 16x^4 + 20 \cdot 8 \cdot x^3 + 6 \cdot 4x^2 \cdot 25 + 4 \cdot 2 \cdot 125x + 625 =$$

$$= 16x^4 + 160x^3 + 600x^2 + 1000x + 625$$

1.4.2. Odrediti peti član u razvijenom obliku binoma: $\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}}\right)^{12}$.

Rešenje:

$$T_5 = \binom{12}{4}(x^{\frac{1}{2}})^8 \cdot (x^{\frac{2}{3}})^4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot x^4 \cdot x^{\frac{8}{3}} = 495 x^{\frac{20}{3}}$$

1.4.3. Odrediti član koji ne sadrži x u razvijenom obliku binoma: $\left(x + x^{-2}\right)^{12}$.

Rešenje:

$$T_{k+1} = \binom{12}{k} x^{12-k} \cdot (x^{-2})^k = \binom{12}{k} x^{12-k-2k}$$

$$12 - 3k = 0$$

$$k = 4$$

Peti član ne sadrži x.

1.4.4. U razvijenom obliku binoma $\left(x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}}\right)^{11}$ odrediti član koji posle sređivanja sadrži x sa izložiocem 5.

Rešenje:

$$(x^{\frac{1}{3}})^{11-k} \cdot (x^{\frac{1}{2}})^k = x^5$$

$$x^{\frac{11}{3} - \frac{k}{3}} \cdot x^{\frac{k}{2}} = x^5$$

$$\frac{11-k}{3} + \frac{k}{2} = 5$$

$$22 - 2k + 3k = 30$$

$$k = 8$$

$$T_9 = \binom{11}{8} x^5 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2} x^5 = 165 x^5$$

1.4.5. Odrediti 13. član u razvijenom obliku binoma $(9x - \frac{1}{\sqrt{3x}})^n$, ako je binomni koeficijent trećeg člana jednak 105.

Rešenje:

$$\frac{n!}{(n-2)!2!} = 105$$

$$n \cdot (n-1) = 210$$

$$n^2 - n - 210 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 840}}{2}$$

$$n_1 = 15$$

$$T_{12+1} = \binom{15}{12} (9x)^3 (\frac{1}{\sqrt{3x}})^{12} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2} \cdot 3^6 x^3 \frac{1}{3^6 x^6} = 455 x^{-3}$$

1.4.6. Zbir koeficijenata prvog, drugog i trećeg člana u razvijenom obliku binoma $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ jednak je 46. Odrediti član koji ne sadrži x.

Rešenje:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=46$$

$$1+n+\frac{n!}{(n-2)!2!}=46$$

$$2+2n+n\cdot(n-1)=92$$

$$n^2-n-90=0$$

$$n_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+360}}{2}\Rightarrow n_2=9$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^9$$

$$Tk+1=\binom{9}{k}\left(x^2\right)^{9-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k=\binom{9}{k}x^{18-2k}x^{-k}$$

$$18-2k-k=0$$

$$k=6$$

$$T7=\binom{9}{6}=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2}=84$$

1.4.7. Binomni koeficijent trećeg člana u razvijenom obliku binoma $\left(x\sqrt{x}+x^{-5}\right)^n$ jednak je 78. Odrediti član koji ne sadrži x.

Rešenje:

n=13, $T_{k+1}=\binom{13}{k}(x^{\frac{3}{2}})^{13-k}\cdot x^{-5k}$, k=3

1.4.8. Zbir binomnih koeficijenata drugog i trećeg člana u razvijenom obliku binoma $\left(x^{-\frac{3}{2}}+x^{\frac{2}{3}}\right)^n$ jednak je 136. Odrediti član koji ne sadrži $x^{8.5}$.

Rešenje:

n=16, $T_{k+1}=\binom{16}{k}(x^{-\frac{3}{2}})^{16-k}\cdot\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^k$, k=15

2. σ-POLJE DOGAĐAJA

Ω - skup svih mogućih ishoda (događaja) koji se mogu očekivati pri nekom opitu.

Primer: opit je bacanje kocke, a Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6}

ω - elementarni događaj, pojedini ishod ili rezultat (elemenat skupa Ω).

Primer: pala je šestica.

A – događaj koji je bilo koji podskup skupa Ω.

Primer: pojava parnog broja

Siguran događaj – događaj koji se realizuje uvek.

Nemoguć događaj – prazan podskup Ω, događaj čija je realizacija nemoguća.

Analogno relacijama i operacijama u Teoriji skupova i ovde možemo posmatrati relacije:

implikacija (⊂) – A⊂B (A povlači B) znači da se B realizuje kad se realizuje A. Ako A⊂B i B⊂A u pitanju su identični događaji.

komplementaran ili suprotan događaj događaja A – A^c ili $\overline{A}$ je događaj koji se realizuje samo ako se događaj A ne realizuje.

presek ili proizvod događaja – A∩B ili AB znači događaj koji se realizuje samo kada se realizuju i događaj A i događaj B.

unija događaja – A∪B ili A+B (kada su A i B disjunktni događaji) znači događaj koji se realizuje ako se realizuje bar jedan od događaja A i B.

razlika događaja – A/B ili A–B=AB^c znači događaj koji se realizuje kada se realizuju oni ishodi ω koji pripadaju događaju A, a ne pripadaju događaju B.

simetrična razlika događaja – AΔB=(A-B)∪(B-A)=(A∪B)-AB

disjunktni događaji – A∩B=AB=∅ znači da se događaji ne mogu istovremeno ostvariti.

Proširenje operacija unije i preseka na konačno i prebrojivo mnogo događaja:

$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ događaj koji se realizuje ako se realizuje svaki od događaja A*i*, *i*=1,...*n*.

$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_n$ ...

Ako je $A=B_1+B_2+...+B_n$, $B_iB_j=\emptyset$ za $i\neq j$, A je rastavljen na n posebnih činilaca. Ako njihova unija čini Ω, događaji B_i obrazuju potpunu grupu događaja.

Klasa *F* događaja koji se posmatraju kod opita sa slučajnim ishodima je σ-polje događaja (ili σ-algebra), ako:

1. $\Omega\in F$,
2. $A\in F \Rightarrow A^c\in F$
3. $A_n\in F$, $n=1, 2, ... \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{n} A_n \in F$

Važi i da ako prazan skup pripada F onda proizvod svih A_n takođe pripada F.

Važe sledeći identiteti:

Komutativnost preseka i unije: $A\cap B=B\cap A$; $A\cup B=B\cup A$

Asocijativnost preseka i unije: $A(BC)=(AB)C$; $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

Distributivni zakon: $A(B\cup C)=AB\cup AC$; $A\cup (BC)=(A\cup B)(A\cup C)$

Zakon jedinice: $A\cup\emptyset=A$; $A\cup\Omega=\Omega$; $A\emptyset=\emptyset$; $A\Omega=A$

De Morganovi zakoni: $(AB)^c=A^c\cup B^c$; $(A\cup B)^c=A^cB^c$;

$\left(\bigcap A_i\right)^c=\bigcup A_i^c$; $\left(\bigcup A_i\right)^c=\bigcap A_i^c$

Idempotentni zakon: $AA=A$; $A\cup A=A$

$\emptyset^c=\Omega$; $AA^c=\emptyset$; $A\cup A^c=\Omega$; $(A^c)^c=A$; $\Omega^c=\emptyset$

$A\cup B=A\cup A^cB$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_1^c A_2 + A_i^c A_2^c A_3 + \ldots + A_1^c \ldots A_n$$

Zadaci

2.1. Četiri studenta Aca, Bojan, Darko i Marko polažu ispit. Ako sa A, B, D i M označimo njihove uspehe na ispitu, izraziti sledeće događaje: E – nijedan nije položio, F – položila su dva studenta, G – položio je samo Bojan, H - položili su svi i I - položio je makar jedan od njih.

Rešenje:

$E=A^cB^cD^cM^c$
$F= ABD^cM^c+ AB^cDM^c+ AB^cD^cM+ A^cBDM^c+ A^cBD^cM+ A^cB^cDM$
$G= A^cBM^cD^c$
$H=ABDM$
$I= A\cup B\cup D\cup M$

2.2. Bacaju se istovremeno novčić i numerisana kocka, pri čemu se registruje pojava pisma i grba na novčiću, kao i pojava broja na gornjoj strani kocke. Opisati skup ishoda.

Rešenje:

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(P,1),(P,2),(P,3),(P,4),(P,5),(P,6),\\&(G,1)(G,2),(G,3),(G,4),(G,5),(G,6)\}\end{aligned}$$

2.3. U kutiju su 4 cedulje numerisane brojevima 1,2,3,4. Na slučajan način se iz kutije izvlači jedna po jedna cedulja bez vraćanja i to sve dok se ne izvuče cedulja na kojoj je neparan broj. Opisati prostor ishoda.

Rešenje:

$$\Omega = \{1,3,21,23,41,43,421,423,241,243\}$$

2.4. Baca se kocka i registruje broj koji se pojavi na gornjoj strani. Neka je događaj A: pada broj manji od 3, a događaj B: pada broj manji od 5. Opisati prostor ishoda, kao i događaje A i B.

Rešenje:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\},\quad A = \{1,2\}, B = \{1,2,3,4\}$$

2.5. Dokazati sledeće jednakosti za ma koje događaje A,B,C:

a) $A \cup BC = (A \cup B)(A \cup C)$

b) $A \cup B = AB \cup AB^c \cup A^c B$

Rešenje:

a)
$$\omega \in (A \cup (B \cap C)) \Leftrightarrow (\omega \in A \vee (\omega \in B \wedge \omega \in C))$$
$$\Leftrightarrow ((\omega \in A \vee \omega \in B) \wedge (\omega \in A \vee \omega \in C)) \Leftrightarrow \omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

b)
$$A + B = AB + AB^C + A^C B = A(B + B^C) + A^C B = A\Omega + A^C B = A + A^C B =$$
$$= (A + A^C)(A + B) = \Omega(A + B) = A + B$$

2.6. Neka je $A \subset B$. Uprostiti izraze:AB, A+B,ABC,A+B+C.

Rešenje:

$$AB = A \cap B = A$$
$$A + B = A \cup B = B$$
$$ABC = A \cap B \cap C = A \cap C = AC$$
$$A + B + C = A \cup B \cup C = B \cup C = B + C$$

2.7. Dokazati da događaji $A_1, A_1^C A_2, A_1^C A_2^C A_3, A_1^C A_2^C A_3^C$ obrazuju potpun sistem događaja.

Rešenje:

$$A_1 + A_1^C A_2 + A_1^C A_2^C A_3 + A_1^C A_2^C A_3^C = A_1 + A_1^C A_2 + A_1^C A_2^C (A_3 + A_3^C) =$$
$$= A_1 + A_1^C A_2 + A_1^C A_2^C \Omega = A_1 + A_1^C A_2 + A_1^C A_2^C = A_1 + A_1^C (A_2 + A_2^C) =$$
$$= A_1 + A_1^C \Omega = A_1 + A_1^C = \Omega$$
$$A_1 \cdot A_1^C A_2 = \emptyset$$
$$A_1 \cdot A_1^C A_2^C A_3 = \emptyset$$
$$A_1 \cdot A_1^C A_2^C A_3^C = \emptyset$$
$$A_1^C A_2 \cdot A_1^C A_2^C A_3 = \emptyset$$
$$A_1^C A_2 \cdot A_1^C A_2^C A_3^C = \emptyset$$
$$A_1^C A_2^C A_3 \cdot A_1^C A_2^C A_3^C = \emptyset$$

2.8. Dokazati da događaji AB, $A^C B$,AB^C,$A^C B^C$ obrazuju potpun sistem događaja ako su A i B proizvolji događaji.

Rešenje:

$AB + A^C B + AB^C + A^C B^C = B(A + A^C) + B^C(A + A^C) =$

$= B\Omega + B^C\Omega = B + B^C = \Omega$

$AB \cdot A^C B = \varnothing$

$AB \cdot AB^C = \varnothing$

$AB \cdot A^C B^C = \varnothing$

$A^C B \cdot AB^C = \varnothing$

$A^C B \cdot A^C B^C = \varnothing$

$AB^C \cdot A^C B^C = \varnothing$

2.9. Dokazati da je $M = (A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \cap (A \cup B^c)$ nemoguć događaj.

Rešenje:

$$B \cup (A \cap A^C) \cap B^C \cup (A^C \cap A) = B \cup \varnothing \cap B^C \cup \varnothing = B \cap B^C = \varnothing$$

2.10. Uprostiti izraz $A = (B \cup C)(B \cup C^C)(B \cup C^C)$

Rešenje:

$$A = B \cap C$$

3. DEFINICIJE VEROVATNOĆE DOGAĐAJA

Klasična definicija verovatnoće

Imamo prostor elemetnarnih događaja $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ i događaj $A = \{\omega_{i1}, ..., \omega_{im}\}$ podskup Ω, gde je $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_m \le n$. Tada verovatnoću događaja *A* određujemo prema:

$$p(A) = \frac{m}{n}$$

gde su: *n* – broj svih mogućih ishoda

m – broj povoljnih ishoda za događaj *A*

Statistička definicija verovatnoće

n(A) – broj realizacija događaja *A* u *n* opita $0 \le n(A) \le 1$

$\frac{n(A)}{n}$ – relativna frekvencija događaja *A*

$$f_r(A) = \frac{n(A)}{n}$$

Za dovoljno veliko n frekvencija događaja A je skoro konstantna vrednost i ona se uzima za verovatnoću događaja A.

Frekvencija događaja *A* teži verovatnoći događaja *A*, kad se *n* uvećava, ako za proizvoljno malo ε, verovatnoća nejednakosti $\left(\left|\frac{n(A)}{n} - p\right| \langle \varepsilon\right)$ teži jedinici.:

$$p\left(\left|\frac{n(A)}{n} - p\right| \langle \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

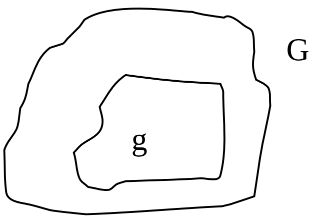
Geometrijska definicija verovatnoće

Proširenje klasične definicije verovatnoće na beskonačan broj slučajeva je geometrijska verovatnoća:

$$p(A) = \frac{površina(g)}{površina(G)}$$

gde su: G – oblast na koju može pasti slučajno bačena tačka

g – oblast čija je površina proporcionalna verovatnoći da tačka padne u nju (ne zavisi od oblika i položaja oblasti) i g⊂G.



Zadaci

3.1. Kuglica je izvučena iz kutije u kojoj se nalazi 4 bele, 3 crvene i 4 plave kuglice. Odrediti verovatnoću da izvučena kuglica:

a) bude bela

b) bude bela ili crvena

c) nije crvena

Rešenje:

a) $p(A)=\dfrac{4}{11}$

b) $p(B)=\dfrac{7}{11}$

c) $p(C)=\dfrac{8}{11}$

3.2. Slučajno je izabran telefonski broj sa 6 cifara. Kolika je verovatnoća da su u njemu sve cifre različite?

Rešenje:

$$n=\overline{V}_{10}^{6}=10^{6}$$

$$m=V_{10}^{6}=\frac{10!}{4!}=151200$$

$$p(A)=\frac{m}{n}=\frac{151200}{10^{6}}=0.1512$$

3.3. Meta se sastoji iz 3 zone čija je verovatnoća pogađanja redom 0.15, 0.25 i 0.35. Koja je verovatnoća da se pri gađanju meta promaši?

Rešenje:

$$p(A)=0.15+0.25+0.35=0.75$$

$$p(A^{c})=1-0.75=025$$

3.4. Bacaju se dve numerisane kocke. Odrediti verovatnoću događaja A: pao je zbir 8 i B: pao je proizvod 8.

Rešenje:

$$\mathrm{n}=\overline{\mathrm{V}}_{6}^{2}=6^{2}=36$$

A – dobijen je zbir 8 $A=\{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)\}$, $m_1=5$

$\mathrm{p(A)}=\dfrac{5}{36}$

A_2 – dobijen je proizvod 8 $B=\{(2,4),(4,2)\}$, $m_2=2$

$$\mathrm{p(B)}=\frac{2}{36}$$

3.5. Šta je verovatnije dobiti pri bacanju dve kocke: zbir 11 ili zbir 12?

Rešenje:

$n = \overline{V}_6^2 = 6^2 = 36$

A_1 – dobijen je zbir 11 $A_1 = \{(5,6),(6,5)\}$, $m_1=2$

$p(A_1) = \frac{2}{36}$

A_2 – dobijen je zbir 12 $A_2 = \{(6,6)\}$, $m_2=1$

$p(A_2) = \frac{1}{36}$

3.6. Kolika je verovatnoća da će se na dvema bačenim kockama dobiti zbir tačaka 10 ili ako se to ne dogodi, da će se pri ponovljenom bacanju dobiti zbir 8?

Rešenje:

A- zbir 10 : 46,64,55 $\quad p(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

B – zbir 8: 26,62,35,53,44 $\quad p(B) = \frac{5}{36}$

C – $A+A^cB$ $\quad p(C) = \frac{3}{36} + \frac{33}{36} \cdot \frac{5}{36} = 0.21$

3.7. U kutiji se nalazi 6 belih i 4 crvene kuglice. Odjednom se izvlači tri kuglice. Naći verovatnoću da će se među njima naći makar jedna bela kuglica.

Rešenje:

$$n = C_{10}^3 = \frac{10!}{7!3!} = 120$$

$$m = C_4^3 = 4$$

$$P(A^c) = 1 - \frac{4}{120} = \frac{29}{30}$$

$p(A) -$ izvučena je crvena kuglica

3.8. Kupac je kupio 7 sijalica od 40W, 5 sijalica od 60W i 3 sijalice od 100W. Usput je razbio 3 sijalice. Kolika je verovatnoća da razbijene sijalice imaju ukupno 180W?

Rešenje:

$n = C_{15}^3 = 455$

$m = 3 \cdot C_7^2 + C_5^3 = 73$

$p(A) = \frac{73}{455} \approx 0.16$

3.9. U prodavnici je 30 sijalica, od kojih je 6 boljeg kvaliteta, ali se ne zna koje su to sijalice. Ako je kupac kupio 4 sijalice, koja je verovatnoća da je među njima tačno dve boljeg kvaliteta?

Rešenje:

$$p(A) = 0.15$$

3.10. Na raspolaganju su duži 2, 4, 5, 7 i 9 cm. Kolika je verovatnoća da se od 3 slučajno izabrane duži može konstruisati trougao?

Rešenje:

$$n = C_5^3 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10\,,\ m: 245,457,579,479\ \ p(A) = \frac{4}{10} = 0.4$$

3.11. Ako konstruišemo jednakostraničan trougao ivice 3 cm, naći verovatnoću da je rastojanje između temena trougla i neke slučajno izabrane tačke unutar trougla veće od 1.

Rešenje:

$$p(A) = 1 - \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{9\sqrt{3}}{4}} \approx 0.6$$

3.12. U kvadrat upisan je krug. Izračunati verovatnoću da će slučajno izabrana tačka kvadrata biti van kruga.

Rešenje:

G=a^2

g=$r^2\pi = (\frac{a}{2})^2 \pi = \frac{a^2}{4}\pi$

$$p(A) = 1 - \frac{\frac{a^2}{4}\pi}{a^2} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

3.13. U krug upisan je kvadrat. Izračunati verovatnoću da će slučajno izabrana tačka u krugu biti i u kvadratu.

Rešenje:

$$a = r\sqrt{2}\ \ p(A) = \frac{2r^2}{r^2\pi} = \frac{2}{\pi} \approx 0.64$$

4. AKSIOMATSKO ZASNIVANJE TEORIJE VEROVATNOĆE

Klasa F događaja koji se posmatraju kod opita sa slučajnim ishodima je σ-polje događaja (ili algebra događaja), ako:

$\Omega \in F$,

$A \in F \Rightarrow A^c \in F$

$A_i \in F,\ i=1, 2, \ldots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in F$

Važi i da ako prazan skup pripada F onda proizvod svih A_i takođe pripada F. Takođe algebri događaja F pripadaju $A\Delta B$ i $(A\Delta B)^c$. ($A\Delta B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)$, $(A\Delta B)^c = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$)

Definicija: Neka je F σ-polje događaja i R^+ skup svih nenegativnih realnih brojeva. Neka je, dalje, preslikavanje: $p: F \to R^+$ takvo da su zadovoljeni sledeći uslovi:

- normiranost – $p(\Omega)=1$
- σ-aditivnost – $A_i \in F$, $A_iA_j=\varnothing$ za $i \neq j$ $p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i)$
- aditivnost – $A_i \in F$, $i=1, 2, \ldots, n$, $A_iA_j=\varnothing$ za $i \neq j$ $p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$

Tada se trojka (Ω, F, p) naziva prostor verovatnoće. Posledice definicije su:

$p(\varnothing) = 0$

$p(A^c) = 1 - p(A)$

$A \subseteq B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$

$\forall A \in F \Rightarrow 0 \leq p(A) \leq 1$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(AB)$

$p(A \cup B) \leq p(A) + p(B)$

Nejednakost u poslednjem slučaju važi ako su događaji A i B disjunktni.

Ako je $p(A)=1$ kažemo da je događaj A skoro siguran (s. s.), a ako je $p(A)=0$ kažemo da je događaj A skoro nemoguć (s. n.).

Zadaci

4.1. Kod bacanja numerisane kocke, neka je događaj A: pao je paran broj. Odrediti σ - algebru koja sadrži A.

Rešenje:

$$A = \{2,4,6\},$$
$$A^c = \{1,3,5\},$$
$$F = \{\varnothing, \{2,4,6\}, \{1,3,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}\}$$

4.2. Kod bacanja numerisane kocke, neka je događaj A: pao je paran broj, a događaj B: pao je broj deljiv sa 3. Odrediti σ - algebru koja sadrži A i B.

Rešenje:

$$A = \{2,4,6\},$$
$$B = \{3,6\},$$
$$F = \{\varnothing, A, B, A^c, B^c, A\cup B, A\cap B, A\cup B^c, A^c\cup B, A\cap B^c, A^c\cap B, A^c\cap B^c, A^c\cup B^c,$$
$$A\Delta B = (A^c\cap B)\cup(A\cap B^c), \overline{A\Delta B} = (A\cap B)\cup(A^c\cap B^c), \Omega = \{1,2,3,4,5,6\}\}$$

4.3. Pokazati da iz $C\subset D$ sledi $p(D\setminus C) = p(D) - p(C)$.

Rešenje:

$$C\subset D \Rightarrow D = C\cup(D\setminus C)$$
$$p(D) = p((C)\cup(D\setminus C))$$
$$C\cap(D\setminus C) = \varnothing \Rightarrow p(D) = p(C) + p(D\setminus C) \Rightarrow p(D\setminus C) = p(D) - p(C)$$

4.4. Koliko je $p(A\cup B\cup C\cup D)$? Uputstvo: odrediti prvo $p(A\cup B\cup C)$.

Rešenje:

$$p(A\cup B\cup C) = p(A) + p(B\cup C) - p(A\cap(B\cup C)) =$$
$$= p(A) + p(B) + p(C) - p(B\cap C) - p((A\cap B)\cup(A\cap C)) =$$
$$= p(A) + p(B) + p(C) - p(B\cap C) - p(A\cap B) - (A\cap C) + p(A\cap B\cap C)$$

$$p(A\cup B\cup C\cup D) = p(A\cup B\cup C) + p(D) - p((A\cup B\cup C)\cap D) =$$
$$= p(A\cup B\cup C) + p(D) - p((A\cap D)\cup(B\cap D)\cup(C\cap D)) =$$
$$= p(A) + p(B) + p(C) - p(B\cap C) - p(A\cap B) - (A\cap C) + p(A\cap B\cap C) + p(D) -$$
$$- p(A\cap D) - p(B\cap D) - p(C\cap D) + p(B\cap C\cap D) + p(A\cap B\cap D) + p(A\cap C\cap D) -$$
$$-(A\cap B\cap C\cap D)$$

4.5. Poznate su verovatnoće događaja A i AB. Odrediti p(AB^c).

Rešenje:

$$(A\cap B)\cup(A\setminus B) = A$$
$$(A\cap B)\cap(A\setminus B) = \varnothing$$
$$p((A\cap B)\cup(A\setminus B)) = p(A)$$
$$p(A\cap B) + p(A\setminus B) = p(A) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p(A\setminus B) = p(A) - p(A\cap B)$$
$$p(AB^c) = p(A) - p(A\cap B)$$

5. USLOVNE VEROVATNOĆE

Verovatnoća događaja A pod uslovom da se realizovao događaj B, p(A/B) ili $p_B(A)$ se određuje prema:

$$p_A(B) = p(B/A) = \frac{p(AB)}{p(A)}$$

Ovim je određena nova verovatnoća i novi prostor (Ω, F, p_A). Ova verovatnoća zadovoljava uslove (aksiome):

- nenegativnost: $p_A(B) \geq 0$
- normiranost: $p_A(\Omega) = 1$
- $p_A\left(\sum_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} p_A(B_i)$

Imamo da je: $p_A(A) = 1$ $\quad p(A/B) \leq 1$

Takođe sledi pravilo množenja:

$$p(AB) = p(A)p(B/A) = p(B)p(A/B)$$

Nezavisni događaji – Događaj A je nezavisan od događaja B akko je $p_A(B) = p(B)$, u tom slučaju je $p(AB) = p(A)p(B)$. Osobine nezavisnih događaja:

- proizvoljan događaj A i siguran događaj Ω su nezavisni: $p(A\Omega) = p(A)p(\Omega)$
- nezavisni su i događaji A i ∅: $A\varnothing = \varnothing, p(\varnothing) = 0 \Rightarrow p(A\varnothing) = 0 = p(A)p(\varnothing)$
- ako su nezavisni događaji A i B, nezavisni su i A i B^c, A^c i B i A^c i B^c
- ako su nezavisni A i B_1 i A i B_2 nezavisni su i A i $B_1 + B_2, B_1B_2 \neq \varnothing$

Odnos između nezavisnih i disjunktih događaja:

- ako su događaji A i B nezavisni i sa pozitivnim verovatnoćama onda su disjunktni
- ako su događaji A i B sa pozitivnim verovatnoćama disjunktni onda su zavisni
- događaji $A_1, A_2, ..., A_n$ su nezavisni u ukupnosti ako postoji međusobna nezavisnost proizvoljnih r $(r \leq n)$ takvih događaja, tj. ako za svaku konačnu kolekciju $A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{in}, 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_r, (r \leq n)$važi:

$$p(A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{in}) = p(A_{i1})p(A_{i2})...p(A_{in})$$

Ako su događaji $A_1, A_2, ..., A_n$ uzajamno disjunktni sa pozitivnim verovatnoćama čija je suma Ω, tada za svako B∈F važi formula totalne verovatnoće:

$$p(B) = p(A_1)p_{A1}(B) + p(A_2)p_{A2}(B) + ... + p(A_n)p_{An}(B)$$

p(A_i) su apriorne verovatnoće (unapred poznate), A_i su hipoteze, p_{Ai}(B) su aposteriorne verovatnoće

Bajesova formula: $p(A_i / B) = \dfrac{p(A_i)p(B/A_i)}{p(B)} = \dfrac{p(A_i)p(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{n} p(A_j)p(B/A_j)}$

Tumačenje: realizacija događaja B je nastupila pod hipotezom (uzorkom) A_i.

Zadaci:

5.1.Odrediti verovatnoću da slučajano izbran prirodni broj:
a) bude deljiv sa 2 i sa 3,
b) ne bude deljiv sa 2 ili sa 3.

Rešenje:

A: broj deljiv sa 2, B: broj deljiv sa 3

a) $p(A) = \dfrac{1}{2}, p(B) = \dfrac{1}{3},\ p(C) = p(AB) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$

b) $p(D) = p(A^c \cup B^c) = p(A^c) + p(B^c) - p(A^c B^c) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}$

5.2. Ako je p(A)=0.9, p(B)=0.8, pokazati da je p(A/B)$\geq$0.875.

Rešenje:

$$p(A/B) = \frac{p(AB)}{p(B)} = \frac{p(A) + p(B) - p(A\cup B)}{p(B)} \geq \frac{0.9 + 0.8 - 1}{0.8} = 0.875$$
$$p(A\cup B) \leq 1$$

5.3. Iz skupa S={1,2,3,...,20} je slučajno izabran jedan broj. Ako je poznato da je izabrani broj deljiv sa 3 kolika je verovatnoća da je u pitanju paran broj?

Rešenje:

$$A: 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20$$
$$B: 3,6,9,12,15,18$$
$$A\cap B = \{6,12,18\}$$
$$p(A) = \frac{1}{2}$$
$$p(B) = \frac{6}{20}$$
$$p(A/B) = \frac{p(AB)}{p(B)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{6}{20}} = \frac{1}{2}$$

5.4. Kolika je verovatnoća da će se na dvema bačenim kockama dobiti zbir tačaka 10 ili ako se to ne dogodi, da će se pri ponovljenom bacanju dobiti zbir 8?

Rešenje:

A- zbir 10 : 46,64,55
B – zbir 8: 26,62,35,53,44
C – $A+A^cB$

p(A)=$\frac{3}{36}$

p(B)=$\frac{5}{36}$

p(A^c)=$\frac{33}{36}$

p(A^cB)=0.126

p(C)=p(A)+p(A^cB)=0.2

5.5. Student je izašao na ispit znajući 20 od 25 pitanja. Ispitivač je postavio 3 pitanja. Koja je verovatnoća da student zna sva tri pitanja?

Rešenje:

$$p(A_1A_2A_3) = p(A_1)p(A_2/A_1)p(A_3/A_1A_2) = \frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{18}{23} = 0.4956$$

5.6. Čovek ima 5 ključeva od kojih samo jedan otvara vrata. Ključevi su po obliku slični pa ih on ne razlikuje. Da bi otvorio vrata on proba ključeve jedan za drugim, pa ključ koji "ne otvara" stavlja na stranu. Odrediti verovatnoću da će mu za otvaranje vrata trebati 1,2,3,4,5 pokušaja.

Rešenje:

$$p(A_1) = \frac{1}{5}$$

$$p(A_2) = p(A_1^c)p(A_2/A_1^c) = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

$$p(A_3) = p(A_1^c)p(A_2^c/A_1^c)p(A_3/A_1^cA_2^c) = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

$$p(A_4) = p(A_1^c)p(A_2^c/A_1^c)p(A_3^c/A_1^cA_2^c)p(A_4/A_1^cA_2^cA_3^c) = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

$$p(A_5) = p(A_1^c)p(A_2^c/A_1^c)p(A_3^c/A_1^cA_2^c)p(A_4^c/A_1^cA_2^cA_3^c)p(A_5/A_1^cA_2^cA_3^cA_4^c) =$$

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{5}$$

5.7. Iz kutije u kojoj je *m* belih i *n* crnih kuglica odjednom je izvučeno *k* kuglica. Pod predpostavkom da su sve izvučene kuglice iste boje koja je verovatnoća da su sve crne?

Rešenje:

A - izvučeno je k kuglica

B- izvučene su crne ili bele kuglice

$$p(A/B)=\frac{p(AB)}{p(B)}=\frac{\dfrac{C_n^k}{C_{n+m}^k}}{\dfrac{C_n^k+C_m^k}{C_{n+m}^k}}=\frac{\dbinom{n}{k}}{\dbinom{n}{k}+\dbinom{m}{k}}$$

5.8. Strelci A,B,C, gađaju po jednom u cilj nezavisno jedan od drugog, pogađajući ga sa verovatnoćama 0.6, 0.5 i 0.4. Ustanovljeno je da je cilj pogođen 2 puta. Šta je verovatnije da je strelac C pogodio ili promašio?

Rešenje:

A,B,C - cilj je pogodio strelac A,B,C

D - cilj je pogođen dva puta

$D = ABC^c + A^c BC + AB^c C$

$p(A) = 0.6$

$p(B) = 0.5$

$p(C) = 0.4$

$$p(D) = 0.6\cdot 0.5\cdot 0.6 + 0.4\cdot 0.5\cdot 0.4 + 0.6\cdot 0.5\cdot 0.4 = 0.38$$

$$p(C^c/D)=\frac{p(C^cD)}{p(D)}=\frac{p(C^c(ABC^c+A^cBC+AB^cC))}{p(D)}=\frac{p(ABC^c)}{p(D)}=\frac{0.18}{0.38}=0.47$$

$$p(C/D) = 1-0.47 = 0.53$$

$$p(C/D) > p(C^c/D)$$

Verovatnije je da je strelac C pogodio!

5.9. Proizvodi fabrike dolaze na kontrolu ispravnosti kod 2 kontrolora sa verovatnoćama 0.6 i 0.4. Verovatnoća da će proizvod biti proglašen ispravnim kod prvog kontrolora je 0.94, a kod drugog 0.98. Proizvod je bio ispravan. Naći verovatnoću da je proveru izvršio prvi kontrolor.

Rešenje:

p(A) = 0.6
p(B) = 0.4
p(C/A) = 0.94
p(C/B) = 0.98

p(C) = $p(A)p(C/A) + p(B)p(C/B) = 0.956$

p(A/C) = $\dfrac{p(A)p(C/A)}{p(C)} = 0.59$

5.10. U grupi sportista je 10 fudbalera, 8 košarkaša i 6 rukometaša. Verovatnoća da će postići pogodak je za fudbalera 0.6, za košarkaša 0.8 i za rukometaša 0.75. Odrediti verovatnoću da će slučajno odabrani sportista postići pogodak. Koja je verovatnoća da košarkaš poentira ?

Rešenje:

p(A) = 10/24 = 0.42
p(B) = 8/24 = 0.33

p(C) = 6/24 = 0.25
p(D\A) = 0.6
p(D\B) = 0.8
p(D\C) = 0.75

p(D) = 0.7
p(B\D) = 0.377

5.11. U fabrici se 25% artikala proizvodi na mašini A, 35% na mašini B i 40% na mašini C. Mašine A,B,C prave 5%, 4% i 2% škarta respektivno. Svi proizvodi stavljaju se u isto skladište. Kolika je verovatnoća da je taj neispravni artikal napravljen na mašini A?

Rešenje:

p(D) = 0.0345
p(A\D) = 0.36

5.12. Verovatnoća da dva blizanca budu istog pola je 0.64. Verovatnoća rađanja muškog deteta je 0.51. U slučaju rađanja dece raznih polova oba redosleda su jednako verovatna. Naći verovatnoću da je drugi blizanac muškog pola ako je i prvi bio muškog pola.

Rešenje:

$$p(M_1M_2 + M_1Z_2 + Z_1M_2 + Z_1Z_2) = 1$$
$$p(M_1M_2 + Z_1Z_2) = 0.64$$
$$p(M_1Z_2) = p(Z_1M_2) = 0.5 \cdot (1 - 0.64) = 0.18$$
$$p(M_2 / M_1) = ?$$
$$p(Z_2 / M_1) = \frac{p(M_1Z_2)}{p(M_1)} = \frac{0.18}{0.51} = 0.35$$
$$p(M_2 / M_1) = 1 - p(Z_2 / M_1) = 1 - 0.35 = 0.65$$

5.13. Predpostavlja se da među istim brojem muškaraca i žena ima 5% daltonista muškaraca i 25% daltonista žena. Slučajno odabrana osoba je daltonista. Koja je verovatnoća da je ta osoba muškarac?

Rešenje:

p(C) = 0.15
p(A\C) = 0.17

6. NIZOVI NEZAVISNIH OPITA

S_m – događaj koji se realizuje kada se u n nezavisnih opita događaj A realizuje m puta. Verovatnoću događaja S_m određujemo prema Bernulijevoj šemi:

$$p_n(m)=\binom{n}{m}p^m q^{n-m} \qquad 0\le m\le n \qquad p \text{ – verovatnoća događaja } A$$

q – verovatnoća događaja A^c

U opštem slučaju Bernulijeva šema ima oblik:

$$p_n(m_1,m_2,\dots,m_k)=\frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_k!}p_1^{m_1}p_2^{m_2}\dots p_k^{m_k}$$

U ovom slučaju vrši se n nezavisnih opita i u svakom od njih se može realizovati samo jedan od događaja A_i, i=1, 2, ... , k; $p(A_i)=p_i$; $p_1+p_2+\dots+p_k=1$. Određujemo verovatnoću da se u n ponovljenih opita događaj A_1 realizovao m_1 puta, događaj A_2 m_2 puta, ... , događaj A_k m_k puta.

$$np-q\le m\le np+q$$

Lokalna Moavr-Laplasova teorema – koristi se za približno određivanje verovatnoće pojavljivanja datog događaja m puta u slučaju kada su vrednosti n i k velike, za $p=q=0.5$, odnosno za $n>100$ i $npq>20$:

$$p_n(m)=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\varphi(x)}\frac{1}{\sqrt{npq}}=\varphi(x)\frac{1}{\sqrt{npq}} \qquad \text{gde je } x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$

Funkcija $\varphi(x)$ je Gausova funkcija, čije su vrednosti date u tabeli. Ova funkcija je parna: $\varphi(x)=\varphi(-x)$.

Integralna Moavr-Laplasova teorema:

$$p(a\le x\le b)=\sqrt{2\pi}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\Phi(b)-\Phi(a)$$

$$x\in[x_1,x_2]$$

$$a=\frac{x_1-np}{\sqrt{npq}}$$

$$b=\frac{x_2-np}{\sqrt{npq}}$$

gde je vrednost funkcije $\phi(x)$ data u tabeli. Ova funkcija je neparna: $\phi(-x)=-\phi(x)$.

Posledica ove teoreme je ***Bernulijev zakon velikih brojeva***. Neka je ε proizvoljan pozitivan broj. Interesuje nas granična vrednost verovatoće događaja $M=\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)$ kada $n\to\infty$, gde je m/n relativna frekvencija događaja A verovatnoće $p(A)=p$:

$$p\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{\frac{-t^2}{2}}dt=2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Poasanova aproksimacija Bernulijeve šeme koristi se za retke događaje, kada je malo p, tj. np<20:

$$p_n(m)=\binom{n}{m}p_n^m(1-p_n)^{n-m}\to\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$$

$\lambda=np_n$ $\qquad$ $0<\lambda<\infty$

$(n\to\infty, p_n\to 0, n\cdot p_n\to\lambda)$

Zadaci

6.1. U seriji jednog proizvoda ima 4% škarta. Slučajno se 5 puta bira po jedan proizvod iz serije. Naći verovatnoću:

a) da se neće izvući ni jedan škart,

b) da će se najmanje 3 puta izvući škart.

Rešenje:

a)

$$p=0.04,$$
$$q=1-p=0.96$$
$$n=5, m=0$$
$$p_n(m)=\binom{5}{0}\cdot 0.04^0\cdot 0.96^5=0.96^5=0.81$$

b)

$$p=0.04,$$
$$q=1-p=0.96$$
$$n=5, m=3,4,5$$
$$p_5(3)=\binom{5}{3}\cdot 0.04^3\cdot 0.96^2=0.0006$$
$$p_5(4)=\binom{5}{4}\cdot 0.04^4\cdot 0.96=0.12\cdot 10^{-4}$$
$$p_5(5)=\binom{5}{5}\cdot 0.04^5\cdot 0.96^0=0.1\cdot 10^{-6}$$
$$p(A)=p_5(3)+p_5(4)+p_5(5)=0.0006$$

II način

$$a=\frac{3-np}{\sqrt{npq}}=6.39, b=\frac{5-np}{\sqrt{npq}}=10.95$$
$$p(3\le x\le 5)=\Phi(10.95)-\Phi(6.39)\approx 0$$

Napomena: Vrednosti za Φ potražiti u Tablici I proveriti!!!

6.2. Verovatnoća pogotka cilja je 0.25. Cilj se gađa 6 puta. Koja je verovatnoća da je cilj bio pogođen:

a) 2 puta,

b) bar jedanput?

Rešenje:

a)

$$p = 0.25, q = 0.75$$
$$n = 6$$
$$p_6(2) = \binom{6}{2} \cdot 0.25^2 \cdot 0.75^4 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot 0.02 \approx 0.3$$

b)

$$p = 0.25, q = 0.75$$
$$n = 6$$
$$1 - p_6(0) = 1 - \binom{6}{0} \cdot 0.25^0 \cdot 0.75^6 = 0.82$$

6.3. Istraživanjem je utvrđeno da na svakih 1000 novorođenčadi ima 515 dečaka i 485 devojčica. U nekoj porodici ima četvoro dece. Kolika je verovatnoća da među njima nema više od 2 devojčice.

Rešenje:

$$p = 0.485, q = 0.515$$
$$n = 4, m = 0,1,2$$

$$p_4(0) + p_4(1) + p_4(2) =$$
$$= \binom{4}{0} \cdot 0.485^0 \cdot 0.515^4 + \binom{4}{1} \cdot 0.485 \cdot 0.515^3 + \binom{4}{2} \cdot 0.485^2 \cdot 0.515^2 =$$
$$= 0.07 + 0.26 + 0.37 = 0.7$$

6.4. Vrši se 10 gađanju u cilj pri čemu je verovatnoća pogotka u jednom gađanju 0.2. Odrediti verovatnoću da broj pogodaka ne bude manji od 2 i ne veći od 4.

Rešenje:

$$n = 10, p = 0.2, q = 0.8$$
$$a = \frac{2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{2 - 10 \cdot 0.2}{\sqrt{10 \cdot 0.2 \cdot 0.8}} = 0,$$
$$b = \frac{4 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4 - 10 \cdot 0.2}{\sqrt{10 \cdot 0.2 \cdot 0.8}} = 1.58,$$
$$p(2 \le x \le 4) = \Phi(1.58) - \Phi(0) = 0.44295$$

6.5. Broj dece u nekoj porodici je 10. Ako je verovatnoća rađanja muškog deteta 0.5 odrediti verovatnoću:

a) da porodica ima 5 dečaka i 5 devojčica

b) da je broj dečaka u porodici između 5 i 8.

Rešenje:

a)

$$p = q = 0.5$$
$$n = 10$$
$$p_{10}(5) = \binom{10}{5} \cdot 0.5^5 \cdot 0.5^5 = 0.246$$

b)

$$n = 10,\ p = q = 0.5$$
$$a = \frac{5 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{5 - 10 \cdot 0.5}{\sqrt{10 \cdot 0.5 \cdot 0.5}} = 0,$$
$$b = \frac{8 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{8 - 10 \cdot 0.5}{\sqrt{10 \cdot 0.5 \cdot 0.5}} = 1.897,$$
$$p(5 \le x \le 8) = \Phi(1.897) - \Phi(0) = 0.47042$$

6.6. Verovatnoća da neki proizvod ne prođe kontrolu je 0.2. Odrediti verovatnoću da kod 400 slučajno izabranih proizvoda broj onih koji nisu prošli kontrolu bude između 70 i 100.

Rešenje:

$$n = 400,\ p = 0.2, q = 0.8$$
$$a = \frac{70 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0.2}{\sqrt{400 \cdot 02 \cdot 0.8}} = -1.25,$$
$$b = \frac{100 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0.2}{\sqrt{400 \cdot 0.2 \cdot 0.8}} = 2.5,$$
$$p(70 \le x \le 100) = \Phi(2.5) - \Phi(-1.25) = \Phi(2.5) + \Phi(1.25) =$$
$$= 0.49379 + 0.39435 = 0.88814$$

6.7. Bacaju se dve kocke 155 uzastopno. Kolika je verovatnoća da će se zbir 8 pojaviti više od 24, a manje od 30 puta?

Rešenje:

26,62,44,53,35

$$n = 155,\ p = \frac{5}{36}, q = \frac{31}{36}$$
$$p(24 \le x \le 30) = \Phi(1.968) - \Phi(0.574) = 0.47558 - 0.21566 = 0.25992$$

6.8. U proizvodnji metalih šipki je prosečno 10% neispravnih. Sa kojom verovatnoćom se može smatrati da će u seriji od 400 slučajno izabranih šipki biti ispravno više od 299?

Rešenje:

$$n = 400,\ p = 0.9, q = 0.1$$
$$p(300 \le x \le 400) = \Phi(6.67) + \Phi(10) \approx 1$$

Napomena:

p=0.9 jer se u zadatku dat procenat neispravnih šipki.

Za svako a ili b koje je veće od 5 može se uzeti približna vrednost Φ od 0.5.

6.9. Neka je verovatnoća pojave događaja A u svakom od 100 nezavisnih opita 0.8. Naći verovatnoću pojave događaja A od 75 do 90 puta.

Rešenje:

$$n = 100,\ p = 0.8, q = 0.2$$
$$p(75 \le x \le 90) = \Phi(2.5) + \Phi(1.25) = 0.8884$$

6.10. Naći broj potrebnih ponavljanja opita da bi se sa verovatnoćom ne manjom od 0.95 moglo tvrditi da je razlika između frekvencije i verovatnoće p=0.5 najviše 0.01.

Rešenje:

$$n = ?,\ p = q = 0.5,\ p(n) \ge 0.95$$
$$p\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le 0.01\right) \ge 0.95$$
$$p\left(\left|\frac{m}{n} - 0.5\right| \le 0.01\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi\left(0.01\sqrt{\frac{n}{0.5 \cdot 0.5}}\right)$$
$$2\Phi\left(0.01\sqrt{\frac{n}{0.25}}\right) \ge 0.95$$
$$\Phi\left(0.01\sqrt{\frac{n}{0.25}}\right) \ge 0.475$$
$$0.02\sqrt{n} \ge 1.96$$
$$\sqrt{n} \ge 98$$
$$n \ge 9604$$

6.11. Posejano je 600 zrna kukuruza. Verovatnoća klijanja jednog zrna je 0.9. Naći granicu apsolutnog odstupanja frekvencije proklijalog semena od verovatnoće p=0.9 ako ta granica treba da bude garantovana sa verovatnoćom 0.995.

Rešenje:

$$\varepsilon = ?, n = 600, p = 0.9, q = 0.1, p(n) = 0.995$$

$$p\left(\left|\frac{m}{600} - 0.9\right| \le \varepsilon\right) = 0.995$$

$$p\left(\left|\frac{m}{600} - 0.9\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{600}{0.9 \cdot 0.1}}\right)$$

$$2\Phi(\varepsilon \cdot 81.65) = 0.995$$

$$\Phi(81.65\varepsilon) = 0.4975$$

$$81.65\varepsilon = 2.81$$

$$\varepsilon = 0.034$$

6.12. Odrediti verovatnoću da pri bacanju novčića 100 puta relativna frekvencija pojave grba odstupa od verovatnoće 0.5 više od 0.1 puta.

Rešenje:

$$\varepsilon = 0.1, n = 100, p = q = 0.5$$

$$p\left(\left|\frac{m}{100} - 0.5\right| \le 0.1\right) = ?$$

$$p\left(\left|\frac{m}{100} - 0.5\right| \le 0.1\right) = 2\Phi\left(0.1\sqrt{\frac{100}{0.5 \cdot 0.5}}\right)$$

$$2\Phi(2) = 2 \cdot 0.47725 = 0.9545$$

$$p\left(\left|\frac{m}{100} - 0.5\right| > 0.1\right) = 1 - 0.9545 = 0.0455$$

6.13. U partiji od 10000 proizvoda ima 6000 proizvoda prve klase. Kolika je verovatnoća da u uzorku od 100 proizvoda bude 70 proizvoda prve klase?

Rešenje:

$$n = 100, m = 70, p = 0.6, q = 0.4$$

$$p_{100}(70) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 100 \cdot 0.6}{\sqrt{100 \cdot 0.6 \cdot 0.4}} = 2.04$$

$$p_{100}(70) \approx \frac{1}{4.899} \cdot \varphi(2.04) = 0.2 \cdot 0.0498 = 0.01$$

6.14. U kutiji je 5 plavih i 50 crnih kuglica. Kolika je verovatnoća da se u 10 nezavisnih izbora sa vraćanjem 3 puta izvuče plava kuglica?

Rešenje:

$$n = 10, m = 3, p = \frac{1}{11}, q = \frac{10}{11}$$
$$\lambda = 10 \cdot 0.09 = 0.9$$
$$p_{10}(3) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{0.9^3}{3!} \cdot e^{-0.9} = 0.05$$

6.15. Naći verovatnoću da se od 500 slučajno izabranih ljudi šestoro rodilo 1.aprila.

Rešenje:

$$n = 500, m = 6, p = \frac{1}{365}, q = \frac{364}{365}$$
$$\lambda = 1.37$$
$$p_{500}(6) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{1.37^6}{6!} \cdot e^{-1..37} = 0.002$$

6.16. Prema podacima tehničke kontrole prosečno kod 2% časovnika treba izvršiti dopunsko regulisanje.

a) Koja je verovatnoća da se na 290 od 300 slučajno izabranih časovnika ne vrši dopunsko regulisanje?

b) Ako se kod 300 časovnika nađe najmanje 11 kod kojih treba izvršiti dopunsko regulisanje, cela partija se ne prihvata. Koja je verovatnoća da se partija prihvati?

Rešenje:

a)

$$n = 300, m = 290, p = 0.02, q = 0.98$$
$$\lambda = 6$$
$$p_{300}(10) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{6^{10}}{10!} \cdot e^{-6} = 0.04$$

b)

$$n = 300, m = 11, p = 0.02, q = 0.98$$
$$\lambda = 6$$
$$p_{300}(11) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{6^{11}}{11!} \cdot e^{-6} = 0.02$$
$$p = 1 - p_{300}(11) = 1 - 0.02 = 0.98$$

6.17. Za jedan sat telefonska centrala dobije prosečno 60 poziva. Naći verovatnoću da neće biti ni jednig poziva za vreme trajanja od 30 minuta.

Rešenje:

$$n = 30, m = 0, p = \frac{1}{60}$$

$$\lambda = 0.5$$

$$p_{30}(0) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{0.5^0}{0!} \cdot e^{-0.5} = 0.61$$

6.18. Verovatnoća da je jedan proizvod defektan je 0.01. Iz velikog skladišta uzima se 100 proizvoda. Naći verovatnoću da među njima bude tačno 5 defektnih.

Rešenje:

$$n = 100, m = 5, p = 0.01$$

$$\lambda = 1$$

$$p_{100}(5) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{1^5}{5!} \cdot e^{-1} \approx 0.003$$

7. SLUČAJNE PROMENLJIVE

Definicija - Realizacija svakog slučajnog događaja može se okarakterisati brojem. Promenljiva veličina, koja te brojne vrednosti uzima sa određenim verovatnoćama, naziva se **slučajnom promenljivom**. Slučajna promenljiva se često definiše i kao funkcija, koja svakom elementarnom događaju pridružuje neki broj.

Diskretna slučajna promenljiva - kada slučajna promenljiva uzima sa pozitivnim verovatnoćama konačan broj ili prebrojivo mnogo vrednosti.

Neprekidna slučajna promenljiva - kada slučajna promenljiva sa pozitivnim verovatnoćama može da uzme proizvoljnu brojevnu vrednost na određenom intervalu.

7.1.Diskretna slučajna promenljiva

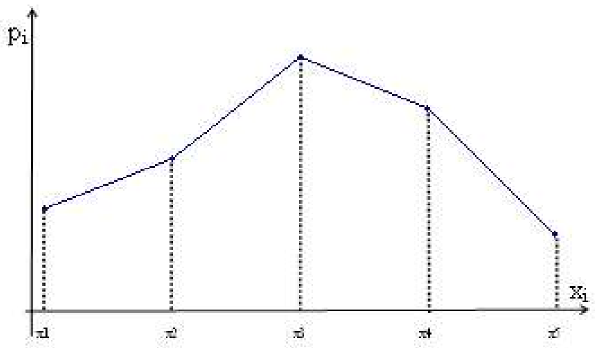
Diskretnu slučajnu promenljivu definišu, potpuno određuju:

- **Zakon raspodele verovatnoća** slučajne promenljive je pravilo po kome svakoj vrednosti slučajne promenljive pridružujemo odgovarajuću verovatnoću.

$$X : \begin{pmatrix} x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n \\ p_1 \; p_2 \; \ldots \; p_n \end{pmatrix}, \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

- $x_1, x_2, ..., x_n$ vrednosti koje može da ima slučajna promenljiva X .
- $p_1, p_2, ..., p_n$ verovatnoće sa kojima X uzima vrednosti $x_1, x_2, ..., x_n$.

Grafička ilustracija raspodele verovatnoća je **poligon raspedele verovatnoća**.



- Verovatnoća događaja X<x, koja zavisi od x, tj. funkcija je od x, naziva se **funkcijom raspodele verovatnoća** ili kumulativnim zakonom raspodele verovatnoća, a označava se sa ***F(x)***, tj.

$$F(x) = p(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i$$

Kod diskretne slučajne promenljive funkcija raspodele je:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ p_1, & x_1 < x \le x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3 \\ ..., \quad \text{za} & ... \\ p_1 + p_2 + ... + p_n, & x_{n-1} < x \le x_n \\ 1 & x > x_n \end{cases}$$

7.2. Neprekidna slučajna promenljiva

***f(x)* - gustina raspodele verovatnoća** - nema univerzalni karakter, postoji samo za neprekidne slučajne promenljive

***F(x)* - funkcija raspodele verovatnoća**

$$f(x) = F'(x)$$

$$p(a \le X \le b) = \int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Osobine gustine raspodele:

$$f(x) \ge 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Zadaci:

7.1. Sastaviti zakon i funkciju raspodele verovatnoća broja pojavljivanja događaja A u 3 nezavisna opita ako je verovatnoća ostvarivanja događaja A u svakom opitu 0.6.

Rešenje:

$$p = 0.6, q = 1 - p = 0.4, n = 3, m = 0,1,2,3$$

$$p_3(0) = \binom{3}{0} \cdot 0.6^0 \cdot 0.4^3 = 0.064$$

$$p_3(1) = \binom{3}{1} \cdot 0.6^1 \cdot 0.4^2 = 0.288$$

$$p_3(2) = \binom{3}{2} \cdot 0.6^2 \cdot 0.4 = 0.432$$

$$p_3(3) = \binom{3}{3} \cdot 0.6^3 \cdot 0.4^0 = 0.216$$

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.064 & 0.288 & 0.432 & 0.216 \end{pmatrix}$$

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0.064, & 0 < x \le 1 \\ 0.352, & 1 < x \le 2 \\ 0.784, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

7.2. Neki novčić se baca 2 puta. Napisati zakon i funkciju raspodele slučajne promenljive X - broj pojave grba.

Rešenje:

$$p = 0.5, q = 1 - p = 0.5, n = 2, m = 0,1,2$$

$$p_2(0) = \binom{3}{0} \cdot 0.5^0 \cdot 0.5^2 = 0.25$$

$$p_2(1) = \binom{3}{1} \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.5$$

$$p_2(2) = \binom{3}{2} \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^2 = 0.25$$

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$$

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0.25, & 0 < x \le 1 \\ 0.75, & 1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

7.3. Neki novčić se baca 5 puta. Napisati zakon i funkciju raspodele slučajne promenljive X - broj pojave pisama.

Rešenje:

$$p = 0.5, q = 1 - p = 0.5, n = 5, m = 0,1,2,3,4,5$$

$$p_5(0) = \binom{5}{0} \cdot 0.5^0 \cdot 0.5^5 = \frac{1}{32}$$

$$p_5(1) = \binom{5}{1} \cdot 0.5 \cdot 0.5^4 = \frac{5}{32}$$

$$p_5(2) = \binom{5}{2} \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^3 = \frac{10}{32}$$

$$p_5(3) = \binom{5}{3} \cdot 0.5^3 \cdot 0.5^2 = \frac{10}{32}$$

$$p_5(4) = \binom{5}{4} \cdot 0.5^4 \cdot 0.5 = \frac{5}{32}$$

$$p_5(5) = \binom{5}{5} \cdot 0.5^5 \cdot 0.5^0 = \frac{1}{32}$$

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{32} & \frac{5}{32} & \frac{10}{32} & \frac{10}{32} & \frac{5}{32} & \frac{1}{32} \end{pmatrix}$$

7.4. Slučajna veličina ima za gustinu:

a) $f(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$ na intervalu [-1,1]. Odrediti a i F(x).

b) $f(x) = \begin{cases} a\cos x, & |\mathrm{x}| \le \dfrac{\pi}{3} \\ 0, & inace \end{cases}$. Odrediti a, F(x) i $p(0 < X < \dfrac{\pi}{6})$.

c) $f(x)=\begin{cases} a(x+1), & 0\le x\le 2 \\ 0, & inace \end{cases}$. Odrediti a, F(x) i $p(1<X<2)$.

Rešenje:

a)

$$a\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=1$$
$$a(arctg1-arctg(-1))=1$$
$$a\cdot 2\frac{\pi}{4}=1$$
$$a=\frac{2}{\pi}$$
$$F(X)=\int_{-1}^{x}\frac{dt}{1+t^2}\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}(arctgx-arctg(-1))=\frac{2}{\pi}arctgx+\frac{1}{2}$$

b)

$$a\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos xdx=1$$
$$a(\sin\frac{\pi}{3}-\sin(-\frac{\pi}{3}))=1$$
$$a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1$$
$$a\sqrt{3}=1$$
$$a=\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$F(X)=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{x}\frac{\sqrt{3}}{3}\cos tdt=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}\sin x}{3}+\frac{1}{2}$$
$$p\left(0<X<\frac{\pi}{6}\right)=F\left(\frac{\pi}{6}\right)-F(0)=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\sin 0+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

c)

$$a\int_0^2 (x+1)dx = 1$$

$$a\left(\int_0^2 x dx + \int_0^2 dx\right) = 1$$

$$a\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + [x]_0^2\right) = 1$$

$$a(2+2) = 1$$

$$a = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}\int_0^2 (x+1)dx$$

$$p(1 < X < 2) = \frac{1}{4}\sin\int_1^2 (x+1)dx = \frac{1}{4}\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + [x]_1^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(2 - \frac{1}{2} + 2 - 1\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{2} = \frac{5}{8}$$

7.5. Neprekidna slučajna promenljiva X zadana je gustinom $f(x) = \begin{cases} a\cos 2x, & x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \\ 0, & x \notin \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \end{cases}$.

Odrediti konstantu a, naći funkciju raspodele $F(X)$, kao i verovatnoću $p\left(0 \langle X \langle \frac{\pi}{8}\right)$.

Rešenje:

$a = 1,$

$$F(X) = \frac{1}{2}(\sin 2x + 1)$$

$$p\left(0 \langle X \langle \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

7.6. Slučajna promenljiva ima normalnu raspodelu $N(0,1)$. Naći:

a) $p(0 < X < 1.42)$

b) $p(-0.73 < X < 0)$

c) $p(-1.73 < X < 2.01)$

d) $p(|X| < 0.5)$

e) $p(X > 1.13)$

Rešenje:

a) $p(0 < X < 1.42) = \Phi(1.42) = 0.4222$

b) $p(-0.73 < X < 0) = \Phi(0.73) = 0.2673$

c) $p(-1.73 < X < 2.01) = \Phi(2.01) + \Phi(1.73) = 0.47778 + 0.41466 =$
$= 0.93696$

d) $p(|X| < 0.5) = 2\Phi(0.5) = 0.38292$

e) $p(X > 1.13) = 0.5 - \Phi(1.13) = 0.12924$

Napomena: Vidi DODATAK XC

7.7. Prečnik matrica koje fabrika proizvodi je slučajna promenljiva X: $N(1.5, 0.04)$. Naći verovatnoću škarta pod uslovom da je propisana tolerancija prečnika ± 0.07. Kolika tolerancija prečnika može da se garantuje sa verovatnoćom 0.97?

Rešenje:

$$p(-0.07 < X > 0.07) = 2\Phi\left(\frac{0.07}{0.04}\right) = 2\Phi(1.75) = 0.91988$$

$$p = 1 - 0.91988 = 0.08012$$

$$2\Phi\left(\frac{a}{0.04}\right) = 0.97$$

$$\Phi\left(\frac{a}{0.04}\right) = 0.485$$

$$\frac{a}{0.04} = 2.17 \Rightarrow a = 0.0868 \approx 0.09$$

Tolerancija [1.41,1.59]

7.8. Pri velikom broju merenja uočeno je da 75% grešaka ne premašuje 1.25. Zamenjujući frekvencije pojavljivanja grešaka njihovim verovatnoćama, odrediti verovatno odstupanje grešaka, smatrajući da su greške merenja realizacije slučajne promenljive X: $N(0, \sigma)$.

Rešenje:

$$p(X < 1.25) = 0.75$$

$$0.5 + \Phi\left(\frac{1.25}{\sigma}\right) = 0.75$$

$$\Phi\left(\frac{1.25}{\sigma}\right) = 0.25$$

$$\frac{1.25}{\sigma} = 0.67 \Rightarrow \sigma = 1.86$$

7.9. Data je slučajna promenljiva X: $N(m,\sigma)$. Odrediti nepoznate parametre iz uslova: $p(X \langle 20) = 0.119$ i $p(X \rangle 28) = 0.025$.

Rešenje:

$p(X\langle 20)=0.119$

$p(X\rangle 28)=0.025$

$0.5+\Phi\left(\frac{20-m}{\sigma}\right)=0.119$

$0.5-\Phi\left(\frac{28-m}{\sigma}\right)=0.025$

$\Phi\left(\frac{m-20}{\sigma}\right)=0.381\Rightarrow\frac{m-20}{\sigma}=1.18$

$\Phi\left(\frac{28-m}{\sigma}\right)=0.475\Rightarrow\frac{28-m}{\sigma}=1.96$

$m=23.009,\quad \sigma=2.55$

7.10. U proizvodnji nekih proizvoda propisana tolerancija za jednu dimenziju je u granicama od 5 do 15 mm. Procenat škarta ispod donje granice je 4%, a iznad gornje je 8 %. Uz predpostavku da je posmatrana dimenzija slučajna promenljiva $X:N(m,\sigma)$,odrediti m i σ.

Rešenje:

$m=10.54\, i\, \sigma=3.16$

7.11. Predpostavimo da telesne težine 800 studenata imaju normalnu raspodelu sa srednjom težinom 66kg i standardnim odstupanjem 5kg. Naći broj studenata čija je težina između 65 i 75kg.

Rešenje:

$$n=800$$

$$X : N(66,5)$$

$$p(65<X<75)=\Phi\left(\frac{75-66}{5}\right)-\Phi\left(\frac{65-66}{5}\right)=$$

$$=\Phi(1.8)+\Phi(0.2)=0.46407+0.07926=54.33\%$$

7.12. Mašina proizvodi metalne šipke dužine 24*cm*, s tolerancijom 0.5*cm*. Na osnovu dužeg posmatranja zna se da je σ = 0.03. Pod pretpostavkom da dužine X metalnih šipki imaju normalnu raspodelu, izračunati procenat metalnih šipki koje će se naći u intervalu tolerancije.

Rešenje:

$$X : N(24,0.03)$$

$$p(|X|<0.05)=2\Phi\left(\frac{0.05}{0.03}\right)=2\Phi(1.67)=90\%$$

7.13. Pokazati da je $P(|X-m|\langle 3\sigma)=0.997$.

Rešenje:

$$p(|X-m|<3\sigma)=0.997$$

$$2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=0.997$$

$$2\Phi(3)=0.997$$

$$2\cdot 0.49865\approx 0.997$$

8. DVODIMENZIONALNA SLUČAJNA PROMENLJIVA

8.1. Diskretna dvodimenzionalna slučajna promenljiva

Vrednosti dvodimenzionalne slučajne promenljive se mogu predstaviti tačkama u ravni *xOy*; ona je slučajna tačka (x,y) u ravni.

Zakon raspodele verovatnoća je pravilo po kome svakom paru vrednosti (x_i, y_i) slučajne promenljive (x,y) pridružujemo odgovarajuću verovatnoću p_{ij}. Znači, imamo:

p_{ij} – verovatnoću da slučajna promenljiva X uzme vrednost x_i, a slučajna promenljiva Y vrednost y_{ij} tj.

$$P(X = x, Y = y) = p_{ij}, \ \ i = 1,...,n, \ \ j = 1,...,m, \ \ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$$

Takođe, imamo **marginalne verovatnoće** po vrstama p_i i po kolonama p_j, gde su:

$$p_{i1} + p_{i2} + ... + p_{im} = p_{i.} \qquad i = 1,...,n, \qquad p_{i.} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = P(X = x_i)$$

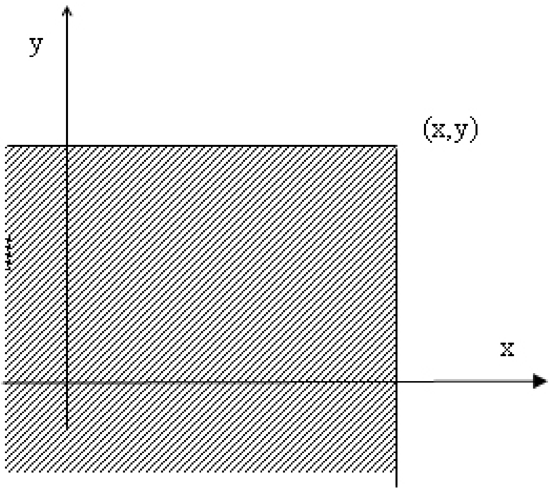
$$p_{1j} + p_{2j} + ... + p_{nj} = p_{.j} \qquad j = 1,...,m, \qquad p_{.j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = P(Y = y_j)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_{i.} = \sum_{j=1}^{m} p_{.j} = 1$$

Funkcija raspodele $F(x,y)$ predstavlja verovatnoću istovremene realizacije događaja $X<x$, $Y<y$, tj:

$$F(x,y)=P(X<x, Y<y)$$

Grafička interpretacija funkcije raspodele je:



$F(x,y)$ je verovatnoća da slučajna tačka (x,y) padne u beskonačni kvadrat sa temenom u tački (x,y).

$$P[(X,Y) \in S] = P(a \langle X \langle b, c \langle Y \langle d) =$$
$$= F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c)$$

Osobine funkcije raspodele

1. F(x,y) je neopadajuća funkcija svojih argumenata

$F(x_2, y) \geq F(x_1, y), x_2 \rangle x_1$

$F(x, y_2) \geq F(x, y_1), y_2 \rangle y_1$

2. $F(x,-\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty,-\infty) = 0$

3. $F(x,+\infty) = P(X \langle x, -\infty \langle Y \langle \infty) = F_1(x)$

$F(+\infty, y) = P(-\infty \langle X \langle \infty, Y \langle y) = F_2(y)$

$F_1(x), F_2(y)$ - odgovarajuće funkcije raspodele promenljivih *X* i *Y*:

4. $F(+\infty,+\infty) = 1$

Marginalne verovatnoće:

$$p_{i.} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = P(X = x_i) \qquad i = 1,...,n,$$

$$p_{.j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = P(Y = y_j) \qquad j = 1,...,m,$$

Uslovne verovatnoće:

$$p_{i/j} = P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$$

$$p_{j/i} = P(Y = y_j / X = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}$$

Definicija nezavisnosti dveju slučajnih promenljivih: Slučajne promenljive *X* i *Y* su nezavisne ako je ispunjena relacija:

$p_{ij} = p_{i.} p_{.j}$, za proizvoljan par brojeva *i*, *j* u diskretnom slučaju ili relacije:

$$p_{i/j} = p_{i.}$$

$$p_{j/i} = p_{.j}$$

$$F(x, y) = F_1(x) F_2(y)$$

8.2. Neprekidna dvodimenzionalna slučajna promenljiva

Gustina raspodele i funkcija raspodele

$$f(x, y) = \frac{\delta^2 F(x, y)}{\delta x \delta y} = F''_{xy}(x, y)$$

$P[(X, Y) \in D] = \iint\limits_{(D)} f(x, y) dxdy$ - verovatnoća da tačka (*x*,*y*) padne u oblast *D*.

Ovde imamo pojam elementarne verovatnoće $f(x, y)dxdy$, a to je verovatnoća da slučajna tačka (*x*,*y*) padne u pravougaonik sa stranama *dx* i *dy* i jednim temenom u tački (*x*,*y*). Sabirajući elementarne verovatnoće po oblasti *D* dobijamo verovatnoću da tačka (*x*,*y*) padne u oblast *D*.

$$F(x,y)=P(-\infty\langle X\langle x,-\infty\langle Y\langle y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy$$

Osobine gustine raspodele

$f(x,y)\geq 0$

$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1$

Marginalne funkcije raspodele

$$F_1(x)=F(x,+\infty)=P(-\infty\langle X\langle x,-\infty\langle Y\langle\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy$$

$$F_2(y)=F(+\infty,y)=P(-\infty\langle X\langle\infty,-\infty\langle Y\langle y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy$$

Marginalne gustine raspodele

$$f_1(x)=F_1'(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$$

$$f_2(y)=F_2'(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$$

Marginalne gustine raspodele se mogu dobiti pomoću gustine raspodele dvodimezionalne slučajne promenljive, međutim, obrnuto ne važi. Odnosno, da bi potpuno okarakterisali dvodimenzionalnu slučajnu promenljivu, potrebno je pored marginalnih raspodela znati i zavisnost između njih. Odnosno, **uslovni zakon raspodele verovatnoća**.

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

Tumačenje: verovatnoća da slučajna tačka (X,Y) padne u pravougaonik S je jednaka verovatnoći da ona padne $S_1(x\langle X\langle x+dx)$ u pojas pod uslovom da je pala u pojas $S_2(y\langle Y\langle y+dy)$.

Definicija nezavisnosti dveju slučajnih promenljivih: Slučajne promenljive X i Y su nezavisne ako je ispunjena relacija:

$$f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$$

ili relacije:

$f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$

$f(x/y)=f_1(x)$

$f(y/x)=f_2(y)$

$F(x,y)=F_1(x)F_2(y)$

$F''_{xy}=f(x,y)=F_1'(x)F_2'(y)$

$\forall a\leq X\langle b,c\leq Y\langle d\Rightarrow P(a\leq X\langle b,c\leq Y\langle d)=P(a\leq X\langle b)\cdot P(c\leq Y\langle d)$

Zadaci:

8.1. Neka u eksperimentu bacanja dve kocke X označava broj tačaka na gornjoj strani prve kocke, a Y broj tačaka na gornjoj strani druge kocke. Naći verovatnoće:

a) $p(X+Y=6)$

b) $p(X-Y=2)$

c) $p(X^2+Y^2\le 20)$

d) $p(X+Y>9)$

e) $p(XY<10)$

Rešenje:

a) $p(X+Y=6)=\dfrac{5}{36}$

b) $p(X-Y=2)=\dfrac{4}{36}$

c) $p(X^2+Y^2\le 20)=\dfrac{13}{36}$

d) $p(X+Y>9)=\dfrac{6}{36}$

e) $p(XY<10)=\dfrac{17}{36}$

8.2. Eksperiment se sastoji u izvlačenju 3 karte sa vraćanjem, iz špila od 52 karte. Ako sa X označimo broj izvučenih kečeva, a sa Y označimo broj izvučenih dama i kraljeva, odrediti zakon raspodele slučajnih promenljivih X i Y, kao i marginalne verovatnoće.

Rešenje:

X\Y	0	1	2	3	pi.
0	$\frac{1000}{2197}$	$\frac{600}{2197}$	$\frac{120}{2197}$	$\frac{8}{2197}$	$\frac{1728}{2197}$
1	$\frac{300}{2197}$	$\frac{60}{2197}$	$\frac{12}{2197}$	0	$\frac{372}{2197}$
2	$\frac{30}{2197}$	$\frac{6}{2197}$	0	0	$\frac{36}{2197}$
3	$\frac{1}{2197}$	0	0	0	$\frac{1}{2197}$
p.j	$\frac{1331}{2197}$	$\frac{666}{2197}$	$\frac{132}{2197}$	$\frac{8}{2197}$	1

$$p(X=0,Y=0)=\frac{40^3}{52^3}=\frac{1000}{2197}\qquad p(X=0,Y=2)=3\left(\frac{8}{52}\cdot\frac{8}{52}\cdot\frac{40}{52}\right)=\frac{120}{2197}$$

$$p(X=0,Y=1)=3\left(\frac{8}{52}\cdot\frac{40}{52}\cdot\frac{40}{52}\right)=\frac{600}{2197}\qquad p(X=0,Y=3)=\frac{8^3}{52^3}=\frac{8}{2197}\ \ldots$$

8.3. Data je raspodela verovatnoća dvodimenzionalne slučajne promenljive (X,Y). Naći marginalne raspodele slučajnih promenljivih X i Y, kao i njihove zakone i funkcije raspodele.

X\Y	-2	-1	0	1	2	3
0	0.05	0.05	0.1	0	0.05	0.05
1	0.1	0.05	0.05	0.1	0	0.05
2	0.03	0.12	0.07	0.06	0.03	0.04

Rešenje:

X\Y	-2	-1	0	1	2	3	p.i
0	0.05	0.05	0.1	0	0.05	0.05	0.3
1	0.1	0.05	0.05	0.1	0	0.05	0.35
2	0.03	0.12	0.07	0.06	0.03	0.04	0.35
p.j	0.18	0.22	0.22	0.16	0.08	0.14	1

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.3 & 0.35 & 0.35 \end{pmatrix} \qquad Y:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.18 & 0.22 & 0.22 & 0.16 & 0.08 & 0.14 \end{pmatrix}$$

$$F(X)=\begin{Bmatrix} 0, & x\le 0 \\ 0.3, & 0<x\le 1 \\ 0.65, & 1<x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{Bmatrix} \qquad F(Y)=\begin{Bmatrix} 0, & y\le -2 \\ 0.18, & -2<y\le -1 \\ 0.4, & -1<y\le 0 \\ 0.62, & 0<y\le 1 \\ 0.78, & 1<y\le 2 \\ 0.86 & 2<y\le 3 \\ 1, & y>3 \end{Bmatrix}$$

8.4. Data je raspodela verovatnoća dvodimenzionalne slučajne promenljive (X,Y). Naći marginalne raspodele slučajnih promenljivih X i Y, kao i njihove zakone raspodele.

X\Y	1	2	3
1	3	7	0
2	1	4	2
3	5	1	8
4	2	1	6

Rešenje:

X\Y	1	2	3	pi.
1	3/40	7/40	0/40	10/40
2	1/40	4/40	2/40	7/40
3	5/40	1/40	8/40	14/40
4	2/40	1/40	6/40	9/40
p.j	11/40	13/40	16/40	1

8.5. Data je raspodela verovatnoća dvodimenzionalne slučajne promenljive (X,Y). Naći marginalne raspodele slučajnih promenljivih X i Y, kao i njihove zakone raspodele i verovatnoće $p(X<x_3, Y=y_2)$, $p(X\le x_2 / Y>y_1)$.

Y/X	x_1	x_2	x_3
y_1	0.12	0.18	0.1
y_2	0.1	0.11	0.39

Rešenje:

X/Y	y_1	y_2	pi.
x_1	0.12	0.1	0.22
x_2	0.18	0.11	0.29
x_3	0.1	0.39	0.49
p.j	0.4	0.6	1

$$p(X < x_3, Y = y_2) = 0.1 + 0.11 = 0.21 \quad p(X \le x_2 / Y > y_1) = \frac{p(X \le x_2, Y > y_1)}{p(Y > y_1)} = \frac{0.21}{0.6} = 0.35$$

8.6. Naći marginalne verovatnoće, zakone i funkcije raspodela koordinata dvodimenzionalne slučajne promenljive (X,Y) date tabelom:

x\ Y	2	4	5
1	3	7	1
3	2	8	4
10	9	5	6

Odrediti verovatnoće p(X>Y) i p(X=Y+2), kao i uslovne raspodele koordinata X i Y.

Rešenje:

x\ Y	2	4	5	pi.
1	3/45	7/45	1/45	11/45
3	2/45	8/45	4/45	14/45
10	9/45	5/45	6/45	20/45
p.j	14/45	20/45	11/45	1

$$p(X > Y) = \frac{2}{45} + \frac{20}{45} = \frac{22}{45} \qquad p(X = Y + 1) = \frac{2}{45}$$

$$X / Y = 2 : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 \\ \frac{3}{14} & \frac{2}{14} & \frac{9}{14} \end{pmatrix} \qquad Y / X = 1 : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ \frac{3}{11} & \frac{7}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

$$X / Y = 4 : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 \\ \frac{7}{20} & \frac{8}{20} & \frac{5}{20} \end{pmatrix} \qquad Y / X = 3 : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ \frac{2}{14} & \frac{8}{14} & \frac{4}{14} \end{pmatrix}$$

$$X / Y = 5 : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 \\ \frac{1}{11} & \frac{4}{11} & \frac{6}{11} \end{pmatrix} \qquad Y / X = 10 : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ \frac{9}{20} & \frac{5}{20} & \frac{6}{20} \end{pmatrix}$$

8.7. Baca se kocka 2 puta. Neka slučajna promenljiva X odgovara rezultatu prvog bacanja kocke, a slučajna promenljiva Y odgovara rezultatu drugog bacanja kocke. Naći raspodelu slučajne promeljive Z=X+Y.

Rešenje:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = Y$$

$$Z = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{12} & \frac{1}{9} & \frac{5}{36} & \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

9. FUNKCIJE SLUČAJNIH PROMENLJIVIH

Ako svakoj mogućoj vrednosti slučajne promenljive *X* odgovara jedna moguća vrednost slučajne promenljive *Y*, tada se *Y* naziva funkcijom slučajne promenljive *X* u oznaci:

$$Y = \varphi(X)$$

U slučaju diskretne slučajne promenljive:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 \ x_2 \dots x_n \\ p_1 \ p_2 \dots p_n \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \varphi(X) \begin{pmatrix} y_1 = \varphi(x_1) & y_2 = \varphi(x_2) & \dots & y_n = \varphi(x_n) \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

Ako je $\varphi(X)$ monotona funkcija (npr: $Y = 3X + 1$), onda je $P(Y = y_i) = P(X = x_i) = p_i$. Ako je $\varphi(X)$ nemonotona funkcija (npr: $Y = 3X^2 + 1$), onda su verovatnoće $P(Y = y_i)$ jednake zbiru $P(X = x_i)$ onih vrednosti slučajne promenljive *X* za koje *Y* ima jednake vrednosti.

U slučaju neprekidne slučajne promenljive:

Neka je X neprekidna slučajna promenljiva definisana gustinom raspodele verovatnoća *f(x)* za $a < x < b$ i neka je funkcija $Y = \varphi(X)$ neprekidna i diferecijabilna. Imamo slučajeve:

1. *za* $a < x < b$, $Y = \varphi(X)$ *je monotono rastuća*

Verovatnoća događaja da se tačka (X,Y) nalazi na delu krive $Y = \varphi(X)$ ispod prave AB:Y=y, tj. verovatnoća događaja Y<y jednaka je verovatnoći događaja $a < X < x$:

$$G(y) = P(Y < y) = P(a < X < x) = F(x) - F(a) = F(\psi(y)) - F(a)$$

gde su: F(x) funkcija raspodele slučajne promenljive X, a $\psi(y)$ inverzna funkcija funkcije $Y = \varphi(X)$. Gustina raspodele funkcije $Y = \varphi(X)$ je:

$$g(y) = f(\psi(y)) \cdot \psi'(y)$$

2. *za* $a < x < b, Y = \varphi(X)$ *je monotono opadajuća*

$$G(y) = P(Y < y) = P(x < X < b) = F(b) - F(x) = -F(\psi(y)) + F(b)$$
$$g(y) = -f(\psi(y)) \cdot \psi'(y)$$

U slučaju monotonosti funkcije $Y = \varphi(X)$ uzima se jedinstvena formula za gustinu raspodele verovatnoća:

$$g(y) = f(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|$$

3. *Kada* $Y = \varphi(X)$ *nije monotona*

$$G(y) = P(Y < y) = \sum P(X \in \Delta_i(y)) = \sum \int_{\Delta i(y)} f(x)dx$$

$$g(y) = G'(y)$$

Zadaci:

9.1. Ako slučajna promenljiva X ima raspodelu verovatnoća $X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$, naći raspodelu verovatnoća slučajne promenljive Y=3X+1.

Rešenje:

$$\varphi(X) = 3X + 1$$
$$y_1 = \varphi(x_1) = 3\cdot 1 + 1 = 4$$
$$y_2 = \varphi(x_2) = 3\cdot 2 + 1 = 7$$
$$y_3 = \varphi(x_3) = 3\cdot 3 + 1 = 10$$
$$Y:\begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

9.2. Ako slučajna promenljiva X ima raspodelu verovatnoća $X:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$, naći raspodelu verovatnoća slučajne promenljive $Y=3X^2+1$.

Rešenje:

$$\varphi(X) = 3X^2 + 1$$
$$y_1 = \varphi(x_1) = 3\cdot(-2)^2 + 1 = 13$$
$$y_2 = \varphi(x_2) = 3\cdot(-1)^2 + 1 = 4$$
$$y_3 = \varphi(x_3) = 3\cdot 1^2 + 1 = 4$$
$$y_4 = \varphi(x_4) = 3\cdot 2^2 + 1 = 13$$
$$Y:\begin{pmatrix} 4 & 13 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

9.3. Opisati slučajnu promenljivu $Y=X^2-1$, ako je:

Rešenje:

$$X:\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \qquad Y:\begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$X:\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad Y:\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

9.4. Slučajna promenljiva X označava verovatnoću pojavljivanja događaja A u 3 nezavisna opita, pri čemu je verovatnoća pojavljivanja događaja A u jednom opitu 0.25. Odrediti zakon i funkciju raspodele za slučajne promenljive Y=2X+1 i $Z=X^2$.

Rešenje:

$$p_3(0)=\binom{3}{0}0.25^0\cdot 0.75^3=0.42\,\ldots$$

$$X:\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 0.42 & 0.42 & 0.14 & 0.02\end{pmatrix}$$

$$Y:\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 0.42 & 0.42 & 0.14 & 0.02\end{pmatrix}$$

$$Z:\begin{pmatrix}0 & 1 & 4 & 9\\ 0.42 & 0.42 & 0.14 & 0.02\end{pmatrix}$$

9.5. Ako je $X:\begin{pmatrix}0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{6} & \pi\\ 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3\end{pmatrix}$, naći zakon raspodele za Y=sinX.

Rešenje:

$$Y:\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1\\ 0.4 & 0.2 & 0.3 & 0.1\end{pmatrix}$$

9.6. Ako je $X:\begin{pmatrix}-\pi & -\frac{\pi}{2} & 0 & \frac{\pi}{2} & \pi\\ \frac{1}{11} & \frac{3}{11} & \frac{4}{11} & \frac{2}{11} & \frac{1}{11}\end{pmatrix}$, naći zakon raspodele za Y=cosX.

Rešenje:

$$Y:\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{2}{11} & \frac{5}{11} & \frac{4}{11}\end{pmatrix}$$

9.7. Gustina $f(x)$ slučajne promenljive X definisana je na intervalu (-∞, ∞). Naći gustinu raspodele verovatnoća $g(y)$ slučajne promenljive Y, ako je $Y=2X^2$.

Rešenje:

$$Y=2X^2$$

$$X^2 = \frac{Y}{2} \Rightarrow X = \pm\sqrt{\frac{Y}{2}} = \Psi_{1,2}(y)$$

$$|\Psi_1'(y)| = \frac{1}{2\sqrt{2y}} = |\Psi_2'(y)|$$

$$g(y) = f(\Psi_1(y))|\Psi_1'(y)| + f(\Psi_2(y))|\Psi_2'(y)| =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2y}}\left(f\left(\sqrt{\frac{y}{2}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{y}{2}}\right)\right)$$

9.8. Naći gustinu raspodele verovatnoća $g(y)$ slučajne promenljive Y, ako je:

a) $Y = |X|$ na intervalu (-∞, ∞)

b) $Y = X^3$ na intervalu (0, ∞).

Rešenje:

a)

$$Y = |X|$$

$$X = \pm Y \Rightarrow \Psi_1(y) = y, \Psi_2(y) = -y$$

$$|\Psi_1'(y)| = |\Psi_2'(y)| = 1$$

$$g(y) = f(y) + f(-y)$$

b)

$$Y = X^3$$

$$X = \sqrt[3]{Y} \Rightarrow \Psi(y) = \sqrt[3]{y}$$

$$\Psi'(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

$$g(y) = f(\sqrt[3]{y})\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

9.9. Gustina $f(x)$ slučajne promenljive X definisana je na intervalu (0, ∞). Naći gustinu raspodele verovatnoća $g(y)$ slučajne promenljive Y, ako je:

a) $Y = e^{-X}$,

b) $Y = \ln X$,

c) $Y = \frac{1}{X^2}$,

d) $Y = e^{-X^2}$

Rešenje:

a)

$$Y = e^{-X}$$

$$\ln Y = -X \Rightarrow X = \ln\frac{1}{Y} \Rightarrow \Psi(y) = \ln\frac{1}{y}$$

$$\Psi'(y) = -\frac{1}{y}$$

$$g(y) = \frac{1}{y} f(\ln\frac{1}{y})$$

b)

$$Y = \ln X$$

$$X = e^Y \Rightarrow \Psi(y) = e^Y$$

$$\Psi'(y) = e^Y$$

$$g(y) = f(e^Y)e^Y$$

c)

$$Y = \frac{1}{X^2}$$

$$X = \pm\sqrt{\frac{1}{Y}} \Rightarrow \Psi(y) = \sqrt{\frac{1}{y}}$$

$$\Psi'(y) = \frac{1}{2}\sqrt{y}\left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{1}{2y\sqrt{y}}$$

$$g(y) = \frac{1}{2y\sqrt{y}}\, f(\ln\sqrt{\frac{1}{y}})$$

d)

$$Y = e^{-X^2}$$

$$\ln Y = -X^2 \Rightarrow X = \pm\sqrt{\ln\frac{1}{Y}}$$

$$\Psi'(y) = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2y\sqrt{\ln\frac{1}{y}}}$$

$$g(y) = \frac{1}{2y\sqrt{\ln\frac{1}{y}}}\, f\left(\sqrt{\ln\frac{1}{y}}\right)$$

9.10. Slučajna promenljiva X definisana je gustinom raspodela verovatnoća $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ na intervalu $(-\infty < X < \infty)$. Naći gustinu raspodele verovatnoća *g*(*y*) slučajne promenljive *Y*=*X*^{2}.

Rešenje:

$$Y = X^2$$

$$X = \pm\sqrt{Y} \Rightarrow \Psi_1(y) = \sqrt{y}, \Psi_2(y) = -\sqrt{y}$$

$$|\Psi_1'(y)| = |\Psi_2'(y)| = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{\sqrt{y}}$$

9.11. Slučajna promenljiva ima Košijevu raspodelu verovatnoća definisanu gustinom $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ na intervalu $(-\infty < X < \infty)$. Naći gustinu raspodele verovatnoća *g*(*y*) slučajne promenljive Y=X^3+2.

Rešenje:

$$Y = X^3 + 2$$

$$X = \sqrt[3]{Y-2} \Rightarrow \Psi(y) = \sqrt[3]{Y-2}$$

$$\Psi_1'(y) = \frac{1}{3}(y-2)^{-\frac{2}{3}}$$

$$g(y) = \frac{1}{\pi\left(1+\sqrt[3]{(y-2)^2}\right)} \frac{1}{3\sqrt[3]{(y-2)^2}} = \frac{1}{3\pi\left(\sqrt[3]{(y-2)^2} + \sqrt[3]{(y-2)^4}\right)}$$

9.12. Slučajna promenljiva ima uniformnu raspodelu verovatnoća na intervalu $(0,2\pi)$. Naći gustinu raspodele verovatnoća *g*(*y*) slučajne promenljive Y=cosX.

Rešenje:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & x \in (0, 2\pi) \\ 0, & inace \end{cases}$$

$$Y = \cos X$$

$$X = \arccos Y \Rightarrow \Psi_1(y) = \arccos Y, \Psi_2(y) = -\arccos Y$$

$$|\Psi_1'(y)| = |\Psi_2'(y)| = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$g(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{2\pi\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$$

10. NUMERIČKE KARAKTERISTIKE SLUČAJNIH PROMENLJIVIH

10.1. Matematičko očekivanje, medijan i mod

Matematičko očekivanje E(x) **–** srednja vrednost slučajne promenljive *X*:

- u slučaju diskretne slučajne promenljive: $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$
- u slučaju neprekidne slučajne promenljive: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

Ako je $Y=\varphi(x)$, funkicja slučajne promenljive *X*, tada je matematičko očekivanje slučajne promenljive *Y* jednako:

$$E(Y)=E(\varphi(X))=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)p_i & \text{u diskretnom slučaju}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(f)dx & \text{u neprekidnom slučaju}\end{cases}$$

Matematičko očekivanje funkcije X^r (r=1,2,...), naziva se ***običnim momentom reda r:***

$$m_r=E(X^r)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,r}p_i & \text{u diskretnom slučaju}\\ \int_{-\infty}^{\infty}x^r f(f)dx & \text{u neprekidnom slučaju}\end{cases}$$

Definicija: ako je *F(x)* funkcija raspodele slučajne promenljive *X*, tada se rešenje jednačine:

$$F(x_p)=p$$

naziva ***kvartilom reda p***. Kvartil reda 0.5 naziva se ***medijanom*** slučajne promenljive *X*, tj. medijan *Me* se dobija kao rešenje jednačine:

$$F(Me)=F(x_{0.5})=p(x\langle Me)=0.5$$

Pored medijana, koriste se i kvartili $X_{0.25}$ i $X_{0.75}$, prvi i treći.

Definicija: ako je *X* diskretna slučajna promenljiva, tada je ***mod*** njena najverovatnija vrednost. Ako je *X* neprekidna slučajna promenljiva, tada je mod maksimum gustine raspodele.

Osobine matematičkog očekivanja

$$E(C)=C$$
$$E(CX)=CE(X)$$
$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$
$$E(XY)=E(X)E(Y)$$
$$E(|X|)\geq|E(X)|$$

10.2. Disperzija i standardno odstupanje

(parametri koji mere rasturanje vrednosti jednodimenzionalne slučajne promenljive oko centra rasturanja)

Definicija: ***Disperzijom*** slučajne promenljive X naziva se matematičko očekivanje kvadrata odstupanja slučajne promenljive X od $E(X)$:

$$D(X)=\sigma^2=E(X-E(X))^2=$$

$$E(X^2)-E^2(X)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(x))^2 p_i & \text{- u diskretnom slučaju}\\ \int_{-\infty}^{\infty}(x-E(x))^2 f(f)dx & \text{-u neprekidnom slučaju}\end{cases}$$

Pozitivan koren iz disperzije:

$$\sigma=\sqrt{D(X)}$$

naziva se ***standardnim odstupanjem*** (***devijacijom***).

Da bi rasturanje različitih raspodela moglo da se upoređuje, uvedena je relativna mera rasturanja, poznata pod nazivom ***koeficijent varijacije***:

$$k_v=\frac{\sigma}{E(X)}$$

Centralni momenat r-tog reda definiše se formulom:

$$\mu_r=E(X-E(X))^r=$$

$$E(X^r)-E^r(X)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(x))^r p_i & \text{u diskretnom slučaju}\\ \int_{-\infty}^{\infty}(x-E(x))^r f(f)dx & \text{u neprekidnom slučaju}\end{cases}$$

Centralni momenti se mogu izraziti i pomoću običnih momenata:

$$\mu_1=0$$
$$\mu_2=m_2-m_1^2$$
$$\mu_3=m_3-3m_2m_1+2m_1^3$$
$$\mu_4=m_4-4m_3m_1+6m_2m_1^2-3m_1^4$$

Ako je $Y=\varphi(x)$ funkcija slučajne promenljive X, onda je centralni momenat r-tog reda slučajne promenljive Y jednak:

$$\mu_r=E(\varphi(X)-E(\varphi(X)))^r=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}(\varphi(x_i)-E(\varphi(x)))^r p_i & \text{u diskretnom slučaju}\\ \int_{-\infty}^{\infty}(\varphi(x)-E(\varphi(x)))^r f(f)dx & \text{u neprekidnom slučaju}\end{cases}$$

Disperzija slučajne promenljive Y je: $D(Y)=E\left(\varphi^2(X)\right)-E^2(\varphi(X))$

Osobine disperzije

$$D(C)=0 \qquad D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$
$$D(CX)=C^2D(X) \qquad D(X-Y)=D(X)+D(Y)$$

10.3.Koeficijent korelacije

(parametri raspodele dvodimenzionalne slučajne promenljive)

Centar rasturanja vrednosti dvodimenzionalne slučajne promenljive *(X,Y)* okarakterisan je "srednjom tačkom" (M_1,M_2), gde su M_1 i M_2 matematička očekivanja slučajnih promenljivih X i Y, koja se u diskretnom i neprekidnom slučaju definišu kao:

$$M_1=E(X)=\left\langle\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{m}p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}x_i p_{i.}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}xdx\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}xf_1(x)dx\end{array}\right.$$

$$M_2=E(Y)=\left\langle\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{m}y_j p_{.j}\\ \int_{-\infty}^{\infty}yf_2(y)dy\end{array}\right.$$

Dalje imamo ***obične momente reda r+s***:

$$m_{rs}=\left\langle\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i^r y_j^s p_{ij}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^r y^s f(x,y)dxdy\end{array}\right.$$

odakle su matematička očekivanja M_1 i M_2 obični momenti prvog reda: $M_1=m_{10}, M_2=m_{01}$

Zatim, ***centralni momenat reda r+s***:

$$\eta_{rs}=E(x-E(x))^r(y-E(y))^s=\left\langle\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i-E(x))^r(y_j-E(y))^s p_{ij}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(x))^r(y-E(y))^s f(x,y)dxdy\end{array}\right.$$

Momenat $\eta_{11}=E((X-E(X))(Y-E(Y)))=E(XY)-E(X)E(Y)$ se zove ***kovarijansa***, a razlomak

$$\rho=\rho_{xy}=\frac{\eta_{11}}{\sqrt{E(X-E(X))^2E(Y-E(Y))^2}}=\frac{\eta_{11}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{m_{11}-M_1M_2}{\sigma_x\sigma_y};\quad \sigma_x\sigma_y\neq 0$$

je ***koeficijent korelacije*** za slučajne veličine X i Y.

Ako su dve slučajne promeljive nezavisne onda su i nekorelativne, obrnuto ne mora da važi.

Zadaci:

10.1. Slučajna veličina *X* ima sledeći raspored: $X:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$. Odrediti *E(X)* i *D(X)*.

Rešenje:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i p_i = -1\cdot 0.2+0\cdot 0.1+1\cdot 0.3+2\cdot 0.4=0.9$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{4} x_i^{\,2} p_i = (-1)^2\cdot 0.2+0^2\cdot 0.1+1^2\cdot 0.3+2^2\cdot 0.4=2.1$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=2.1-0.9^2=1.29$$

10.2. Neka je $X:\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0.2 & 0.1 & 0.5 & a \end{pmatrix}$. Odrediti *a*, *E(X)* i *D(X)*.

Rešenje:

$$a=1-(0.2+0.1+0.5)=0.2$$

$$E(X)=1\cdot 0.2+3\cdot 0.1+4\cdot 0.5+7\cdot 0.2=3.9$$

$$E(X^2)=1^2\cdot 0.2+3^2\cdot 0.1+4^2\cdot 0.5+7^2\cdot 0.2=18.9$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=18.9-3.9^2=3.69$$

10.3 Slučajna veličina *X* ima gustinu proporcionalnu sa x^2 na intervalu (0,3). Odrediti joj *E(X)* i σ.

Rešenje:

$$f(X)=\begin{cases} kx^2, & x\in(0,3) \\ 0, & x\notin(0,3) \end{cases}$$

$$\int_0^3 kx^2dx = 1$$

$$k\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 1$$

$$k\frac{27}{3} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{9}$$

$$E(X) = \int_0^3 \frac{1}{9}x^2 xdx = \frac{1}{9}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \frac{1}{9}\frac{81}{4} = \frac{9}{4}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{9}\int_0^3 x^2x^2dx = \frac{1}{9}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^3 = \frac{27}{5}$$

$$D(X) = \frac{27}{5} - \frac{81}{16} = \frac{27}{80}$$

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{27}{80}}$$

10.4. Diskretna slučajna promenljiva ima dve moguće vrednosti y_1 i y_2. Pri tome je $y_2 \rangle y_1$. Ako je $p(Y = y_1) = 0.6$, $E(Y) = 1.4$ i $D(X) = 0.24$.

Rešenje:

$$Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$E(Y) = 1.4 \Leftrightarrow 0.6y_1 + 0.4y_2 = 1.4$$

$$D(X) = 0.24 \Leftrightarrow E(Y^2) - E^2(Y) = 0.24$$

$$0.6{y_1}^2 + 0.4{y_2}^2 - 1.4^2 = 0.24$$

$$0.6y_1 + 0.4y_2 = 1.4 \Rightarrow y_1 = \frac{1.4 - 0.4y_2}{0.6}$$

$$0.6{y_1}^2 + 0.4{y_2}^2 = 2.2$$

$$\frac{1.96 - 1.12y_2 + 0.16{y_2}^2}{0.6} + 0.4{y_2}^2 = 2.2 / \cdot 0.6$$

$$1.96 - 1.12y_2 + 0.16{y_2}^2 + 0.24{y_2}^2 = 1.32$$

$$0.4{y_2}^2 - 1.12y_2 + 0.64 = 0$$

$$y_{21,2} = \frac{1.12 \pm \sqrt{1.2544 - 1.024}}{0.8} = \frac{1.12 \pm 0.48}{0.8}$$

$$y_{21} = 2 \qquad y_{22} = 0.8$$

$$y_{11} = 1 \qquad y_{12} = 1.8$$

$$Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

10.5. Date su nezavisne slučajne promenljive $X:\begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 & 13 \\ 0.4 & 0.25 & 0.15 & 0.2 \end{pmatrix}$ i $Y:\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0.35 & 0.6 & 0.05 \end{pmatrix}$. Odrediti E(X),D(2X) i D(Y).

Rešenje:

$$E(X) = 2\cdot 0.4 + 7\cdot 0.25 + 9\cdot 0.15 + 131.\cdot 0.2 = 6.5$$
$$D(2X) = 4D(X) = 70.2$$
$$D(Y) = 1.1771$$

10.6. Dati su zakoni raspodela nezavisnih slučajnih promenljivih. $X:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.21 & 0.19 & 0.34 & 0.26 \end{pmatrix}$ i $Y:\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$. Naći $E(XY)$ i $D(X+2Y)$.

Rešenje:

$$E(XY) = E(X)E(Y) = 1.56$$
$$D(X+2Y) = D(X) + 4D(Y) = 1.1675 + 12.16 = 13.3275$$

10.7. Odrediti Me za slučajnu promenljivu X, ako je ona definisana funkcijom raspodele: $F(X) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - e^{-ax}, & x > 0 \end{cases}$.

Rešenje:

$$F(Me) = 0.5$$
$$1 - e^{-aMe} = 0.5$$
$$e^{-aMe} = 0.5 / \ln$$
$$-aMe = \ln\frac{1}{2}$$
$$Me = \frac{\ln 2}{a}$$

10.8. Odrediti matematičko očekivanje, medijanu i modus ako slučajna veličina ima funkciju raspodele: $F(X) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$.

Rešenje:

$$f(X) = F'(X) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x \le 2 \\ 0, & inace \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^2 x\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

$$F(Me) = 0.5$$

$$\frac{Me^2}{4} = 0.5$$

$$Me^2 = 2$$

$$Me = \sqrt{2}$$

$f'(X) = \frac{1}{2}$ nema max f(x), nema modusa

10.9. Izračunati koeficijent varijacije za raspored zadat u tabeli:

razmak	*f*	*x*	*y*	*fy*	*fy²*
5,5-7,5	2	6,5	-5	-10	50
7,5-9,5	3	8,5	-4	-12	48
9,5-11,5	17	10,5	-3	-51	153
11,5-13,5	43	12,5	-2	-86	172
13,5-15,5	62	14,5	-1	-62	62
15,5-17,5	81	16,5	0	0	0
17,5-19,5	70	18,5	1	70	70
19,5-21,5	61	20,5	2	122	244
21,5-23,5	18	22,5	3	54	162
23,5-25,5	3	24,5	4	12	48

Rešenje:

razmak	*f*	*x*	*y*	*fy*	*fy²*	*x²*	*fx*	*fx²*
5,5-7,5	2	6,5	-5	-10	50	42,25	13	84,5
7,5-9,5	3	8,5	-4	-12	48	72,25	25,5	216,75
9,5-11,5	17	10,5	-3	-51	153	110,25	178,5	1874,25
11,5-13,5	43	12,5	-2	-86	172	156,25	537,5	6718,75
13,5-15,5	62	14,5	-1	-62	62	210,25	899	13035,5
15,5-17,5	81	16,5	0	0	0	272,25	1336,5	22052,25
17,5-19,5	70	18,5	1	70	70	342,25	1295	23957,5
19,5-21,5	61	20,5	2	122	244	420,25	1250,5	25635,25
21,5-23,5	18	22,5	3	54	162	506,25	405	9112,5
23,5-25,5	3	24,5	4	12	48	600,25	73,5	1800,75
$\sum$	360	155	-5	37	1009		6014	104488

$$E(X)=\frac{\sum fx_i}{N}=\frac{6014}{360}=16.7$$
$$E(X^2)=\frac{\sum fx_i^2}{N}=\frac{104488}{360}=290.23$$
$$D(X)=11.34$$
$$\sigma=\sqrt{11.34}=3.37$$
$$V=\frac{3.37}{16.7}\cdot 100=20.17\%$$

10.10. Odrediti E(XY), E(X), E(Y) ako je zakon raspodele slučajnog vektora (X,Y) dat tablicom. da li su X i Y nezavisne?

X/Y	*0*	*1*	*2*
0	1/9	2/9	0
1	0	1/9	2/9
2	2/9	0	1/9

Rešenje:

X/Y	0	1	2	f_x	xf_x
0	1/9	2/9	0	1/3	0
1	0	1/9	2/9	1/3	1/3
2	2/9	0	1/9	1/3	2/3
f_y	1/3	1/3	1/3	1	-
yf_y	0	1/3	2/3	-	-

$$E(X)=1,\qquad E(Y)=1$$

X/Y	0	1	2		
0	1/9	2/9	0		
1	0	1/9	2/9		
2	2/9	0	1/9	S_i	xS_i
$f_{0y}y$	0	2/9	0	2/9	0
$f_{1y}y$	0	1/9	4/9	5/9	5/9
$f_{2y}y$	0	0	2/9	2/9	4/9

$$E(XY)=1$$

X i Y nisu nezavisne jer je: $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$

10.11. Izračunati koeficijent korelacije za dati dvodimenzionalni raspored.

X/Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	2	3	2	2	1	0	0	0	0	0
4	0	0	1	4	4	3	3	1	0	0	0
5	0	0	0	1	4	6	5	4	1	1	0
6	0	0	0	0	1	2	3	6	4	2	0
7	0	0	0	0	0	0	2	3	5	4	2
8	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3	2

Rešenje:

X/Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	fx	x*fx	x^2*fx
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3
2	2	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	7	14	28
3	1	2	3	2	2	1	0	0	0	0	0	11	33	99
4	0	0	1	4	4	3	3	1	0	0	0	16	64	256
5	0	0	0	1	4	6	5	4	1	1	0	22	110	550
6	0	0	0	0	1	2	3	6	4	2	0	18	108	648
7	0	0	0	0	0	0	2	3	5	4	2	16	112	784
8	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3	2	7	56	448
fy	5	5	6	8	11	12	13	14	12	10	4	100	500	2816
y*fy	0	5	12	24	44	60	78	98	96	90	40	547		
y^2*fy	0	5	24	72	176	300	468	686	768	810	400	3709	Si*xi	
f_{1y}*y	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	
f_{2y}*y	0	2	4	3	0	0	0	0	0	0	0	9	18	
f_{3y}*y	0	2	6	6	8	5	0	0	0	0	0	27	81	
f_{4y}*y	0	0	2	12	16	15	18	7	0	0	0	70	280	
f_{5y}*y	0	0	0	3	16	30	30	28	8	9	0	124	620	
f_{6y}*y	0	0	0	0	4	10	18	42	32	18	0	124	744	
f_{7y}*y	0	0	0	0	0	0	12	21	40	36	20	129	903	
f_{8y}*y	0	0	0	0	0	0	0	0	16	27	20	63	504	
												Σ	3151	

$$E(X)=\frac{500}{100}=5 \qquad E(X^2)=\frac{2816}{100}=28.16 \quad D(X)=28.16-5^2=3.16$$

$$E(Y)=\frac{547}{100}=5.47 \quad E(Y^2)=\frac{3709}{100}=37.09 \quad D(Y)=37.09-5.47^2=7.1691$$

$$\sigma_y=2.68 \;\; \sigma_x=1.78 \;\; \rho_{xy}=\frac{31.51-5*5.47}{1.78*2.68}=0.87$$

10.12. Izračunati koeficijent korelacije za dati dvodimenzionalni raspored.

X/Y	1	2	3
1	3	7	0
2	1	4	2
3	5	1	8
4	2	1	6

Rešenje:

X/Y	1	2	3	**fx**	**xfx**	**x^2fx**
1	3	7	0	**10**	**10**	**10**
2	1	4	2	**7**	**14**	**28**
3	5	1	8	**14**	**42**	**126**
4	2	1	6	**9**	**36**	**144**
fy	**11**	**13**	**16**	**40**	**102**	**308**

yfy	**11**	**26**	**48**	**85**		
y2fy	**11**	**52**	**144**	**207**	Si*xi	
$f_{1y}y$	**3**	**14**	**0**	**17**	**17**	
$f_{2y}y$	**1**	**8**	**6**	**15**	**30**	
$f_{3y}y$	**5**	**2**	**24**	**31**	**93**	
$f_{4y}y$	**2**	**2**	**18**	**22**	**88**	
				Σ	**228**	

$E(X) = 2.55 \quad E(X^2) = 7.7 \quad D(X) = 1.1975$

$E(Y) = 2.125 \quad E(Y^2) = 5.175 \quad D(Y) = 0.659$

$\sigma_y = 0.81 \; \sigma_x = 1.09 \; \rho_{xy} = 0.40$

11. NEJEDNAKOST ČEBIŠEVA

Ako slučajna promeljiva ima konačnu disperziju, onda je:

$$p\left(\left|X-E(X)\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}\text{, ODNOSNO }\ p\left(\left|X-E(X)\right|<\varepsilon\right)>1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

gde je ε proizvoljan pozitivan broj.

U vezi sa ovim pominje se i nejednakost Markova:

$$p(X>a)<\frac{E(X)}{a}\text{, odnosno }\ p(X>a)<1-\frac{E(X)}{a}$$

Zadaci:

11.1. Diskretna slučajna promenljiva ima raspodelu verovatnoća: $X:\begin{pmatrix}0.3 & 0.6\\ 0.2 & 0.8\end{pmatrix}$. Oceniti $p\left(\left|X-E(X)\right|<0.2\right)$ pomoću nejednakosti Čebiševa.

Rešenje:

$$E(X)=0.3\cdot 0.2+0.6\cdot 0.8=0.54$$
$$E(X^2)=0.3^2\cdot 0.2+0.6^2\cdot 0.8=0.306$$
$$D(X)=0.0144$$
$$p\left(\left|X-E(X)\right|<0.2\right)\geq 1-\frac{0.0144}{0.04}=0.64$$

11.2. Slučajna promenljiva ima raspodelu verovatnoća: $X:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 0.05 & 0.1 & 0.25 & 0.3 & 0.2 & 0.1\end{pmatrix}$. Oceniti $p\left(\left|X-E(X)\right|<2\right)$ pomoću nejednakosti Čebiševa.

Rešenje:

$$E(X)=3.8 \qquad E(X^2)=16.1 \qquad D(X)=1.66$$
$$p\left(\left|X-3.8\right|<2\right)\geq 0.585$$

11.3. Iz $p\left(\left|X-E(X)\right|<\varepsilon\right)\geq 0.9$ i D(X)=0.09 odrediti ε.

Rešenje:

$$p\left(\left|X-E(X)\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{0.09}{\varepsilon^2}=0.9$$
$$\frac{0.09}{\varepsilon^2}=0.1$$
$$\varepsilon^2=0.9\Rightarrow \qquad \varepsilon=0.3$$

11.4. Slučajna promenljiva X ima E(X)=1 i standardno odstupanje 0.2.Pomoću nejednakosti Čebiševa oceniti 0.5<X<1.5.

Rešenje:

$$p\left(\left|X-1\right|<0.5\right)\geq 1-\frac{0.2^2}{0.5^2}=1-0.16=0.84$$

11.5. Slučajna promenljiva X ima E(X)=2 i standardno odstupanje 1. Pomoću nejednakosti Čebiševa oceniti p(-3<X<7).

Rešenje:

$$p\left(\left|X-2\right|<5\right)\geq 1-\frac{1^2}{5^2}=1-\frac{1}{25}=0.96$$

11.6. Matematičko očekivanje *E(X)* brzine vetra na datoj visini je 25 *km/h*, dok je standardno odstupanje σ = 4,5 *km/h*. Kolike se brzine vetra mogu očekivati na toj visini sa verovatnoćom ne manjom od 0,9?

Rešenje:

$$E(X)=25$$
$$\sigma=4.5\Rightarrow D(X)=20.25$$
$$p(\left|X-25\right|\leq\varepsilon)\geq 0.9$$
$$0.9=1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}=1-\frac{20.25}{\varepsilon^2}$$
$$-0.1=-\frac{20.25}{\varepsilon^2}\Rightarrow\varepsilon^2=\frac{20.25}{0.1}=202.5\Rightarrow 14.23$$
$$\left|X-25\right|\leq 14.23$$
$$10.77\leq X\leq 39.23$$

11.7. Slučajna promenljiva ima raspodelu verovatnoća: $X:\begin{pmatrix}2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12\\ 0.1 & 0.3 & 0.25 & 0.15 & 0.15 & 0.05\end{pmatrix}$. Oceniti $p(X<11)$ pomoću nejednakosti Markova.

Rešenje:

$$E(X)=6.2$$
$$p(X<11)\geq 1-\frac{6.2}{11}\approx 0.44$$

11.8. Srednji vek motora je 4 godine. Oceniti verovatnoću da dati motor neće raditi više od 20 godina.

Rešenje:

$$p(X<20)\geq 1-\frac{4}{20}=0.8$$

12. LINEARNE REGRESIJE

Ako je poznat zakon raspodele slučajnih veličina *(X,Y)*, određujemo uslovne verovatnoće u diskretnom i naprekidnom slučaju:

$$p(Y = y_j \,/\, X = x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}; \quad i = 1,2,...$$

$$f(y/x) = f_x(y) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

Ako je zavisnost među slučajnim veličinama delimična, radi se o uslovnom matematičkom očekivanju:

$$R(X) = \bar{y}(x) = E(Y \,/\, X = x)$$

koje u diskretnom slučaju ima oblik:

$$R(X) = \bar{y}(x) = \sum_j y_j \, p(y_i / x_i)$$

a u neprekidnom:

$$R(X) = \bar{y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y/x) dy$$

Slučaj linearne regresije – aproksimativna kriva je $Y = \alpha X + \beta$. Linearnu regresiju možemo ***odrediti metodom najmanjih kvadrata***. Parametre α i β određujemo iz uslova da funkcija $G(\alpha,\beta) = E(Y - (\alpha X + \beta))^2$ ima minimum. Dobijamo sistem jednačina:

$$\begin{aligned} &\alpha E(X^2) + \beta E(X) = E(XY) \qquad G'_\alpha = 0 \quad \wedge \quad G'_\beta = 0 \\ &\alpha E(X) + \beta = E(Y) \end{aligned}$$

čijim rešavanjem dolazimo do izraza za linearnu regresiju *Y* na *X*.

$$y = \rho_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - E(X)) + E(Y)$$

Ako je na raspolaganju *n* tačaka $M_i(x_i, y_i)$, traži se da funkcija:

$$G(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n} p_i (y_i - (\alpha x_i + \beta))^2$$

ima najmanju vrednost.

Odatle je:

$$\alpha = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

$$\beta = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

čijom se zamenom u $Y = \alpha X + \beta$ dobija linearna regresija *Y* na *X*.

Zadaci

12.1. Odrediti srednje kvadratnu regresionu pravu Y na X na osnovu zadate tabele podataka:

x	1	3	4	6	8	9	11	14
y	1	2	4	4	5	7	8	9

Rešenje:

	x	**y**	$\mathbf{x_i^2}$	$\mathbf{x_i y_i}$
	1	1	1	1
	3	2	9	6
	4	4	16	16
	6	4	36	24
	8	5	64	40
	9	7	81	63
	11	8	121	88
	14	9	196	126
Σ	**56**	**40**	**524**	**364**

$$\alpha = \frac{8 \cdot 364 - 56 \cdot 40}{8 \cdot 524 - 56^2} = 0.64 \qquad \beta = \frac{524 \cdot 40 - 56 \cdot 364}{8 \cdot 524 - 56^2} = 0.55$$

$$Y = 0.64X + 0.55$$

12.2. Za podatke u tabeli $M_i(x_i, y_i)$ odrediti regresiju Y na X.

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1.25	1	1.25
1.5	1.4	2.25	2.1
3	1.5	9	4.5
4.5	1.75	20.25	7.875
5	2.25	25	11.25

Rešenje:

$$\alpha = 0.202 \qquad \beta = 1.024$$

$$Y = 0.202X + 1.024$$

12.3. Zakon raspodele slučajnog vektora (X,Y) dat je tablicom. Odrediti regresiju Y na X i ρ_{xy}.

X/Y	0	2	4	6
1	0	3	1	4
2	2	1	0	1
3	4	2	2	0

Rešenje:

X/Y	0	2	4	6	**fx**	**xfx**	$\mathbf{x^2fx}$
1	0	3	1	4	**8**	**8**	**8**
2	2	1	0	1	**4**	**8**	**16**

3	4	2	2	0	**8**	**24**	**72**
fy	**6**	**6**	**3**	**5**	**20**	**40**	**96**
yfy	**0**	**12**	**12**	**30**	**54**		
y2fy	**0**	**24**	**48**	**180**	**252**	**Si*xi**	
f_{1y}y	**0**	**6**	**4**	**24**	**34**	**34**	
f_{2y}y	**0**	**2**	**0**	**6**	**8**	**16**	
f_{3y}y	**0**	**4**	**8**	**0**	**12**	**36**	
					Σ	**86**	

$E(X)=2 \qquad E(X^2)=\frac{24}{5} \quad D(X)=\frac{4}{5}$

$E(Y)=\frac{27}{10} \quad E(Y^2)=\frac{63}{5} \quad D(Y)=5.31$

$\sigma_x=0.89 \; \sigma_y=2.3 \quad \rho_{xy}=-0.54$

$$\frac{Y-E(Y)}{\sigma_Y}=\rho_{XY}\frac{X-E(X)}{\sigma_X}$$
$$\frac{Y-2.7}{2.3}=-0.54\frac{X-2}{0.89}$$
$$Y=3.96-1.39X$$

12.4. Zakon raspodele slučajnog vektora (X,Y) dat je tablicom. Odrediti metodom najmanjih kvadrata regresiju Y na X i ρ_{xy}.

X/Y	1	2	3	4	5	6
0	1	3	0	0	0	0
1	2	0	4	0	2	0
2	0	0	3	3	0	2

Rešenje:

X/Y	1	2	3	4	5	6	**fx**	**xfx**	**x2fx**
0	1	3	0	0	0	0	**4**	**0**	**0**
1	2	0	4	0	2	0	**8**	**8**	**8**
2	0	0	3	3	0	2	**8**	**16**	**32**
fy	**3**	**3**	**7**	**3**	**2**	**2**	**20**	**24**	**40**
yfy	**3**	**6**	**21**	**12**	**10**	**12**	**64**		
y2fy	**3**	**12**	**63**	**48**	**50**	**72**	**248**	**Si*xi**	
f1yy	**1**	**6**	**0**	**0**	**0**	**0**	**7**	**0**	
f2yy	**2**	**0**	**12**	**0**	**10**	**0**	**24**	**24**	
f3yy	**0**	**0**	**9**	**12**	**0**	**12**	**33**	**66**	
							Σ	**90**	

$$\alpha E(X^2) + \beta E(X) = E(XY)$$
$$\alpha E(X) + \beta = E(Y)$$
$$2\alpha + \frac{6}{5}\beta = \frac{9}{2}$$
$$\frac{6}{5}\alpha + \beta = \frac{16}{5} \Rightarrow \beta = \frac{16}{5} - \frac{6}{5}\alpha = 1.78$$
$$2\alpha + \frac{6}{5}\left(\frac{16}{5} - \frac{6}{5}\alpha\right) = \frac{9}{2}$$
$$14\alpha = \frac{9.25}{2} - 96 \Rightarrow \alpha = 1.18$$
$$Y = 1.18X + 1.78$$

DODATAK A - NEKE VAŽNE DISKRETNE RASPODELE

Binomna raspodela $B(n, p)$, $p \in (0,1)$

$$R_x = \{0,1,\ldots,n\}$$
$$p_i = p(X = i) = \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \qquad i = 0,1,\ldots,n$$

Puasonova raspodela $P_0(\lambda)$, (λ>0)

$$R_x = \{0,1,2,\ldots\}$$
$$p_i = p(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \qquad i = 0,1,2,\ldots$$

Geometrijska raspodela

$$R_x = \{1,2,3,\ldots\}$$
$$p_i = p(X = i) = (1 - p)^{i-1} p$$

DODATAK B - NEKE VAŽNE RASPODELE NEPREKIDNOG TIPA

Normalna (Gausova) raspodela $N\,(m,\sigma)$

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt \qquad f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$P(a\langle X\langle b)=P\left(\frac{a-m}{\sigma}\langle\frac{x-m}{\sigma}\langle\frac{b-m}{\sigma}\right)=P(t_1\langle T\langle t_2)=\Phi(t_2)-\Phi(t_1)$$

$$P(-a\langle X\langle a)=2\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)$$

$$P(-\infty\langle X\langle x)=0.5+\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

$$P(x\langle X\langle\infty)=0.5-\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

Uniformna raspodela $U(a,b)$, ($a<b$)

$$F(x)=\begin{cases}0, x\langle a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, a\le x\le b\\ 1, x\rangle b\end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases}0, x\notin[a,b]\\ \dfrac{1}{b-a}, x\in[a,b]\end{cases}$$

Gama raspodela $G(a,b)$, ($a>0$, $b>0$)

$$F(x)=\begin{cases}0, x\langle 0\\ \dfrac{a^b}{\Gamma(b)}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}t^{b-1}e^{-at}dt, x\ge 0\end{cases};\quad f(x)=\begin{cases}0, x\langle 0\\ \dfrac{a^b}{\Gamma(b)}x^{b-1}e^{-ax}, x\ge 0\end{cases};\quad \begin{array}{l}\Gamma(b)=\displaystyle\int_0^{\infty}x^{b-1}e^{-a}dx\\ \Gamma(n+1)=n!(\forall n\in N)\end{array}$$

Eksponencijalna raspodela $E_x(a)$, ($a>0$)

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ 1-e^{-ax}, x\rangle 0\end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ ae^{-ax}, x\rangle 0\end{cases}$$