Probni Prijemni Ispit iz Matematike April 2017

1. Uprostiti izraz

$$\left(\frac{1}{a-1}-\frac{a^3+1}{a^4-a}\right):\frac{a+1}{a-a^3},\quad a\neq -1,0,1.$$

2. Odrediti vrednost parametra r tako da jednačina

$$x^2+(r-5)x+(r+1)^2=0$$

ima jednaka rešenja.

3. Rešiti jednačinu

$$3^{2x+1}-28\cdot 3^x+9=0.$$

4. Rešiti jednačinu

$$3\log_x 4+2\log_{4x}4+3\log_{16x}4=0.$$

5. Dokazati trigonometrijski identitet

$$(\cos x+\cos y)^2+(\sin x+\sin y)^2=4\cos^2(\frac{x-y}{2}).$$

6. Ako je

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1},$$

izračunati $f(f(x))$.

Probni Prijemni Ispit iz Matematike April 2017

Inženjerstvo zaštite životne sredine

1. Proveriti tačnost jednakosti

$$\left[\left(\left(7+\frac{1}{3}\right):\frac{11}{6}\right)^{-1}+\frac{3}{4}\right]^{1/4}\cdot\left[\left(\left(14+\frac{2}{3}\right):\frac{11}{3}\right)^{-1}+\frac{3}{4}\right]^{1/4}=1.$$

2. Proveriti tačnost jednakosti

$$\frac{(a+b)^2-2ab}{(a-b)^2+2ab}:\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\right]=\frac{b-a}{b+a}.$$

3. Rešiti eksponencijalnu jednačinu

$$100^x-101\cdot 10^x+100=0.$$

1 Ako je I dati izraz, tada

$$
\begin{aligned}
I &= \left(\frac{1}{a-1} - \frac{a^3+1}{a(a-1)(a^2+a+1)}\right) \cdot \frac{a(1-a)(1+a)}{a+1} \\
&= \frac{a^3+a^2+a-(a^3+1)}{a(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \frac{a(1-a)}{1} \\
&= -\frac{a^2+a-1}{a^2+a+1} = \frac{1-a-a^2}{1+a+a^2}.
\end{aligned}
$$

2. Jednačina ima jednaka rešenja ako je njena diskriminanta jednaka nuli:

$$D = b^2 - 4ac = (r-5)^2 - 4(r+1)^2 = 0, \quad -3r^2 - 18r + 21 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+28}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2} = -3 \pm 4,$$
$$r_1 = 1, \quad r_2 = -7.$$

3. Data jednačina se može napisati u obliku

$$3 \cdot (3^x)^2 - 28 \cdot 3^x + 9 = 0.$$

Ako se uvede smena $y = 3^x$ dobija se jednačina $3y^2 - 28y + 9 = 0$, čija su rešenja

$$y_{1,2} = \frac{28 \pm \sqrt{784-108}}{6} = \frac{28 \pm 26}{6} = \frac{14 \pm 13}{3},$$

odnosno $y_1 = 1/3$ i $y_2 = 9$. Odgovarajuća rešenja polazne jednačine se dobijaju iz uslova $3^x = 1/3$ ili $3^x = 9$, tako da je $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$.

4. Za $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{4}$ i $x \neq \frac{1}{16}$, dobijamo ekvivalentnu jednačinu

$$\frac{3}{\log_4 x} + \frac{2}{\log_4 4x} + \frac{3}{\log_4 16x} = 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{3}{\log_4 x} + \frac{2}{1+\log_4 x} + \frac{3}{2+\log_4 x} = 0.$$

Smenom $t = 1 + \log_4 x$ se dobija

$$\frac{3}{t-1} + \frac{2}{t} + \frac{3}{t+1} = 0, \qquad \text{tj.} \qquad 3t(t+1) + 2(t^2-1) + 3t(t-1) = 0,$$

tako da je $8t^2 - 2 = 0$, $t^2 = 1/4$, $t = \pm 1/2$. Nalazimo da je $\log_4 x = -1 - 1/2 = -3/2$, ili $\log_4 x = -1 + 1/2 = -1/2$, pa su rešenja $x_1 = 4^{-3/2} = 1/8$ i $x_2 = 4^{-1/2} = 1/2$.

5. Leva strana L se transformiše

$$\begin{aligned} L &= \cos^2 x + 2\cos x \cos y + \cos^2 y + \sin^2 x + 2\sin x \sin y + \sin^2 y \\ &= 2 + 2\cos x \cos y + 2\sin x \sin y = 2(1 + \cos x \cos y + \sin x \sin y) \\ &= 2(1 + \cos(x-y)) = 2 \cdot 2\cos^2(\frac{x-y}{2}) = 4\cos^2(\frac{x-y}{2}). \end{aligned}$$

6. Najpre uprostimo

$$f(x) = \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} = \frac{4x}{x^2 - 1},$$

tako da je

$$f(f(x)) = f\left(\frac{4x}{x^2-1}\right) = \frac{4 \cdot \frac{4x}{x^2-1}}{\frac{16x^2}{(x^2-1)^2} - 1} = \frac{16x(x^2-1)}{16x^2 - (x^2-1)^2}.$$

Inženjerstvo zaštite životne sredine

1. Transformacije daju

$$\left[\left(\frac{22}{3}\cdot\frac{6}{11}\right)^{-1}+\frac{3}{4}\right]^{1/4}\cdot\left[\left(\frac{44}{3}\cdot\frac{3}{11}\right)^{-1}+\frac{3}{4}\right]^{1/4}=\left[\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right]^{1/4}\cdot\left[\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right]^{1/4}=1.$$

2.

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}:\left[\frac{a+b}{ab}:\frac{b-a}{ab}\right]=\left[\frac{a+b}{ab}\cdot\frac{ab}{b-a}\right]^{-1}=\frac{b-a}{b+a}.$$

3. Smena $10^x=t$ daje kvadratnu jednačinu $t^2-101t+100=0$, $t^2-100t-t+100=(t-100)(t-1)=0$. Tako su rešenja $t_1=100$ tj. $x_1=2$, i $t_2=1$ tj. $x_2=0$.